Exercice 1 : (6.5 pts)

On considère la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = 5$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n}$

1) Calculer u_1 puis montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 4$. (1 point)
2) (a) Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(4 - u_n)}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (0,75 point)
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \leq 5$. (0,75 point)
3) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 1}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$. (1 point)
   (b) Écrire v_n en fonction de n. (0,5 point)
   (c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \dfrac{1 - 4^{n+2}}{1 - 4^{n+1}}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (1 point)
4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = \cos(\pi S_n)$.
   (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$. (1 point)
   (b) En déduire la limite de la suite (T_n). (0,5 point)

Exercice 2 : (13 pts)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ telles que : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$

1) Vérifier que $D_f =]0; +\infty[$. .... (0,5 pt)
2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement. .... (1 pt)
3) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis en déduire la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$. .... (1 pt)
4) (a) Montrer que : $(\forall x \in D_f) : f(x) - x = \dfrac{(1 - \sqrt{x})(2x + \sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x}}$. .... (1 pt)
   (b) En déduire la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta) : y = x$. .... (1 pt)
5) (a) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = \dfrac{x - 1}{4\sqrt{x^3}}$. .... (1 pt)
   (b) En déduire que f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et décroissante sur $]0; 1]$. .... (1 pt)
6) (a) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) : f''(x) = \dfrac{3 - x}{8\sqrt{x^5}}$. .... (1 pt)
   (b) Déduire la concavité de (C_f) et déterminer son point d'inflexion s'il existe. .... (1 pt)
7) (a) Déterminer les primitives de f sur $]0; +\infty[$ (**remarquez que** : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$). .... (1 pt)
   (b) En déduire la fonction primitive F de f vérifiant : $F(1) = 0$. .... (1 pt)
8) Construire dans le même repère la droite (Δ) et la courbe (C_f). .... (1 pt)
9) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 1$. .... (1 pt)
   b) Montrer que (u_n) est décroissante. .... (0,5 pt)
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. .... (1 pt)