Exercice 1 : (12 pts)

Partie I Soit g la fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par : $\boxed{g(x)=x^2+\sqrt{x-1}}$

1. Étudier la monotonie de la fonction g sur $[0;+\infty[$, et dresser son tableau de variation . . . . . . (0,75 pt)
2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $[0;+\infty[$, et que $\frac{1}{2}<\alpha<1$. (0,75 pt)
3. Montrer que $(\forall x\in[0;\alpha[)\,;\ g(x)<0$ et $(\forall x\in]\alpha;+\infty[)\,;\ g(x)>0$. . . . . (0,5 pt)

Partie II On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $\boxed{f(x)=\dfrac{x^2+(\sqrt{x}-1)^2}{x}}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. . . . . (0,75 pt)
2. Vérifier que $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\ f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}+1$. . . . . (0,5 pt)
3. Montrer que C_f admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote (D) dont on déterminera une équation . (0,75 pt)
4. Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$. . . . . (0,75 pt)
5. En déduire que f est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$. (0,5 pt)
6. Montrer que $f(\alpha)=\alpha+\alpha^3$, puis dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$. . . . . . . (0,75 pt)
7. Montrer que la droite (T) d'équation $y=x$ est tangente à la courbe C_f au point $A(1;1)$. . . . . (0,5 pt)
8. Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\ f(x)\geq x$, puis interpréter ce résultat graphiquement. . . . . (0,5 pt)
9. Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\ f''(x)=\dfrac{4-3\sqrt{x}}{2x^3}$. . . . . (0,75 pt)
10. Étudier la concavité de C_f et déduire l'abscisse du point d'inflexion de la courbe C_f. . . . . . . (0,75 pt)
11. Construire (D), (T) et C_f, dans le même repère (O,i,j). . . . . (1,5 pt)
12. (on prendra $\alpha\approx0.5$, $f(\alpha)\approx0.7$, $\dfrac{16}{9}\approx1.7$ et $f\left(\dfrac{16}{9}\right)\approx1.8$) . . . . (0,75 pt)

Partie III Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0=\alpha$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $\alpha\leq u_n<1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. . . . . (0,5 pt)
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et en déduire qu'elle est convergente. . . . . (0,75 pt)
3. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. . . . . (0,75 pt)

Exercice 2 : (8 pts)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=3$ et $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-8}{u_n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $2<u_n<4$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. a) Vérifier que $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n-2)(4-u_n)}{u_n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que $3\leq u_n<4$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. a) Montrer que $\dfrac{1}{3}(4-u_n)<4-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}\times(4-u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   b) En déduire que $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\leq4-u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   c) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $v_n=\dfrac{u_n-2}{4-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3.
   b) En déduire que $u_n=\dfrac{4\times3^n+2}{3^n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   c) Déterminer de nouveau $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.