Exercice 1 : (5.5 pts)

On considère la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$

1) (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 1$. .... (1 pt)
   (b) Montrer que (u_n) est croissante. .... (1 pt)
2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$. .... (1 pt)
   (b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n). .... (1 pt)
3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = \sin(\pi S_n)$.
   (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n = -\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$. .... (1 pt)
   (b) En déduire la limite de la suite (T_n). .... (0,5 pt)

Exercice 2 : (11.75 pts)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2$.
Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer D_f. .... (0,25 pt)
2) Étudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f puis interpréter le résultat obtenu. .... (1 pt)
3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   puis déduire la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$. .... (1,25 points)
4) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f'(x) = 6\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)$. .... (1 pt)
5) Dresser le tableau de variations de f. .... (1 pt)
6) (a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+) : f(x) - x = x\left(\sqrt{x}-1\right)\left(1-3\sqrt{x}\right)$. .... (0,5 pt)
   (b) En déduire la position relative de (C_f) et la droite d'équation $y = x$. .... (1 pt)
7) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f''(x) = \dfrac{3\left(1-2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$ puis étudier la concavité de (C_f). .... (1,5 points)
8) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses. .... (1 pt)
9) Construire (C_f). .... (1 pt)
10) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \dfrac{1}{9} \le u_n \le 1$. .... (0,75 pt)
   (b) Montrer que (u_n) est croissante (on pourra utiliser le résultat de 6). .... (0,5 pt)
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite. .... (1 pt)

Exercice 3 : (2.75 pts)

Soit h la fonction définie sur $I = [0;+\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^3}$.

1) Vérifier que : $(\forall x \in I) : h(x) = u'(x)u(x)$ où : $u : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$. .... (0,75 pt)
2) En déduire les fonctions primitives de h sur I. .... (1 pt)
3) Vérifier que : $(\forall x \in I) : h(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^3}$.
   En déduire de nouveau les primitives de h sur I. .... (1 pt)