COURS DE MATHÉMATIQUES
LES SUITES NUMÉRIQUES

2ème BAC – Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre

---

1. Notion de suite numérique

Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad n \longmapsto u_n.$$

— u_n est le terme de rang n ; (u_n) désigne la suite.

— Une suite peut être définie par une formule explicite, par exemple $u_n = 2n + 3$.

— Elle peut aussi être définie par récurrence : un premier terme et une relation permettant de calculer les termes suivants, par exemple $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Remarque importante : Il faut toujours respecter le rang du premier terme. Si la suite commence à u_p, les formules et les sommes doivent être écrites à partir de ce rang.

2. Sens de variation, majoration et convergence

Majorée, minorée et bornée

Soit (u_n) une suite numérique.

— (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n, $u_n \leq M$.

— (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n, $m \leq u_n$.

— (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $A > 0$ tel que $|u_n| \leq A$ pour tout n.

Monotonie

— (u_n) est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n.

— (u_n) est strictement croissante si $u_{n+1} > u_n$ pour tout n.

— (u_n) est décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n.

— (u_n) est constante si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n.

Méthode : Étudier le sens de variation

Pour étudier les variations d'une suite, on peut :

1. étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
2. lorsque les termes sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ;
3. si $u_n = f(n)$, étudier éventuellement les variations de la fonction f sur un intervalle adapté.

Théorème de convergence des suites monotones

— Toute suite croissante et majorée est convergente.

— Toute suite décroissante et minorée est convergente.

— Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

— Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Propriété : Toute suite convergente est bornée et sa limite est unique. La réciproque est fausse : une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

3. Suites arithmétiques

Définition et raison

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r, appelé **raison**, tel que

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

pour tout rang considéré. De manière équivalente,

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = r.}$$

Terme général

Si (u_n) est arithmétique de raison r, alors, pour tous entiers $n \geq p$:

$$\boxed{u_n = u_p + (n - p)r.}$$

En particulier, si le premier terme est u_0 :

$$\boxed{u_n = u_0 + nr.}$$

Sens de variation

Le sens de variation d'une suite arithmétique dépend du signe de sa raison :

$r > 0$	(u_n) est strictement croissante
$r = 0$	(u_n) est constante
$r < 0$	(u_n) est strictement décroissante

Somme des termes consécutifs

Pour $n \geq p$:

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}.}$$

En particulier :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple

On considère une suite arithmétique telle que $u_3 = 7$ et $r = 4$.

$$u_{10} = u_3 + (10-3)r = 7 + 7 \times 4 = \boxed{35}.$$

La somme $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{10}$ comporte $10 - 3 + 1 = 8$ termes :

$$S = \frac{8(u_3+u_{10})}{2} = \frac{8(7+35)}{2} = \boxed{168}.$$

Limite d'une suite arithmétique

Pour une suite arithmétique de raison r :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0, \\ u_0 & \text{si } r = 0, \\ -\infty & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

4. Suites géométriques

Définition et raison

Une suite (v_n) est **géométrique** s'il existe un réel q, appelé **raison**, tel que

$$\boxed{v_{n+1} = qv_n}$$

pour tout rang considéré. Lorsque les termes concernés sont non nuls, cela équivaut à

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q.$$

Terme général

Si (v_n) est géométrique de raison q, alors, pour tous entiers $n \geq p$:

$$\boxed{v_n = v_p\, q^{\,n-p}.}$$

En particulier, si le premier terme est v_0 :

$$\boxed{v_n = v_0 q^n.}$$

Somme des termes consécutifs

Pour $n \geq p$:

$$S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n.$$

Si $q = 1$, alors

$$\boxed{S = (n-p+1)v_p.}$$

Si $q \neq 1$, alors

$$\boxed{S = v_p\, \frac{1-q^{\,n-p+1}}{1-q}.}$$

Variations d'une suite géométrique

— Si $q > 1$, la suite (q^n) est croissante ; si $0 < q < 1$, elle est décroissante.

— Pour $q > 0$ et $v_0 > 0$, la suite (v_n) a le même sens de variation que (q^n).

— Pour $q > 0$ et $v_0 < 0$, son sens de variation est contraire à celui de (q^n).

— Si $q < 0$ et $v_0 \neq 0$, les termes changent de signe : la suite n'est pas monotone.

Limites de la suite (q^n)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1, \\ 1 & \text{si } q = 1, \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1. \end{cases}}$$

Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Exemple

Soit (v_n) la suite géométrique telle que $v_2 = 12$ et $q = \frac{1}{2}$.

$$v_6 = v_2 q^{6-2} = 12\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

5. Limite d'une suite numérique

Convergence vers une limite finie

On dit que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque ses termes se rapprochent de ℓ à partir d'un certain rang. On écrit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.}$$

Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Limites infinies

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

signifie que, pour tout réel A, il existe un rang N tel que $u_n > A$ pour tout $n \geq N$.

De même,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

signifie que, pour tout réel A, il existe un rang N tel que $u_n < A$ pour tout $n \geq N$.

Remarque : Une suite qui n'admet pas de limite finie est dite divergente. Une suite divergente ne tend pas nécessairement vers $+\infty$ ou $-\infty$. Par exemple, $u_n = (-1)^n$ est divergente et n'a pas de limite.

6. Limites usuelles et opérations

Limites usuelles

Pour tout entier $p \geq 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

Plus généralement, si $p > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-p} = 0$.

Opérations sur les limites finies

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = m$, alors :

Suite	Limite
$u_n + v_n$	$\ell + m$
$u_n - v_n$	$\ell - m$
$u_n v_n$	ℓm
λu_n $(\lambda \in \mathbb{R})$	$\lambda \ell$

Si $m \neq 0$, alors, à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{m}.$$

Formes indéterminées

Les expressions suivantes ne permettent pas de conclure directement :

$$\boxed{+\infty - \infty, \qquad 0 \times \infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}.}$$

Il faut transformer l'expression (factorisation, mise au même dénominateur, terme dominant, etc.) avant de déterminer la limite.

Limites des polynômes et des quotients

— Pour un polynôme, le comportement à l'infini est déterminé par son terme de plus haut degré.

— Pour un quotient de polynômes, on compare les degrés et les coefficients dominants.

Par exemple, si $P(n) = a_d n^d + \cdots$ avec $a_d \neq 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{n^d} = a_d.$$

7. Limites et ordre

Passage à la limite dans une inégalité

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si les deux suites convergent vers ℓ et m, alors

$$\boxed{\ell \leq m.}$$

En particulier, si $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang et si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell \geq 0$.

Théorème des gendarmes

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

Si, à partir d'un certain rang,

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

et si

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell,$$

alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.}$$

Comparaison avec une suite divergente

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.

De même, si $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang et si $u_n \to -\infty$, alors $v_n \to -\infty$.

8. Limite d'une suite de la forme $f(u_n)$

Continuité et limite

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant les termes u_n à partir d'un certain rang. Si

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

et si f est continue en ℓ, alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).}$$

Exemple

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. La fonction $f(x) = x^2 + 3x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n^2 + 3u_n) = f(2) = 2^2 + 3\times 2 = \boxed{10}.$$

9. Suites définies par récurrence

On considère une suite définie par

$$\boxed{u_{n+1} = f(u_n)}$$

et par un premier terme u_0.

Méthode : Étudier une suite récurrente

Une étude classique peut suivre les étapes suivantes :

1. **Montrer que les termes restent dans un intervalle I :** vérifier que $u_0 \in I$ et que $f(I) \subset I$.
2. **Étudier les variations :** calculer $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ et étudier son signe. On peut aussi utiliser une comparaison de quotient lorsque cela est possible.
3. **Montrer que la suite est bornée :** utiliser l'intervalle invariant ou un encadrement adapté.
4. **Conclure sur la convergence :** appliquer le théorème de convergence des suites monotones lorsque ses hypothèses sont vérifiées.
5. **Déterminer la limite :** si $u_n \to \ell$ et si f est continue en ℓ, alors
$$\ell = f(\ell).$$

Attention : L'équation $\ell = f(\ell)$ donne les limites possibles, mais ne prouve pas à elle seule que la suite converge. Il faut d'abord établir la convergence (par exemple en prouvant que la suite est monotone et bornée).

Exemple de suite récurrente

Soit

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = 2u_n(1-u_n).$$

Pour représenter graphiquement les premiers termes, on utilise la courbe $y = f(x)$ avec $f(x) = 2x(1-x)$ et la droite $y = x$. Les itérations se lisent alternativement sur la courbe et sur la droite.

Pour étudier cette suite, on commence par rechercher un intervalle stable par f, puis on étudie le signe de

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n(1-u_n) - u_n = u_n(1-2u_n).$$

10. Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite vérifiant une relation de la forme

$$\boxed{u_{n+1} = au_n + b}$$

est appelée suite arithmético-géométrique.

Principe de résolution

Lorsque $a \neq 1$, on cherche le réel α vérifiant

$$\alpha = a\alpha + b \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha = \frac{b}{1-a}.$$

On pose alors $v_n = u_n - \alpha$. On obtient :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = a(u_n - \alpha) = av_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison a, et

$$v_n = v_0 a^n.$$

Finalement :

$$\boxed{u_n = \alpha + (u_0 - \alpha)a^n.}$$

Exemple détaillé

Soit la suite définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

Le point fixe vérifie $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 2$, donc $\alpha = 4$. Posons $v_n = u_n - 4$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1 - 4 = -3$.

$$v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Par conséquent :

$$\boxed{u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$