Exercise 1

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty;3[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, puis interpréter le résultat graphiquement.
2. Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et que : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$, puis en déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$.
3. Montrer que : $\forall x\in]-\infty;3[$: $f'(x)=\dfrac{6-x}{2\sqrt{3-x}(3-x)}$, puis justifier que f est strictement croissante sur $]-\infty;3[$.
4. (a) Montrer que : $\forall x\in]-\infty;3[$: $f(x)-x=\dfrac{x(x-2)}{\sqrt{3-x}(1+\sqrt{3-x})}$.
   (b) En déduire la position relative de (C_f) et la droite (D) d'équation $y=x$.
5. Déterminer l'équation de la tangente (T') à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2.
6. Construire les droites (D), (T') et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
7. (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   (b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0, puis montrer que : $(f^{-1})'(0)=\sqrt{3}$.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente (T'') à la courbe $(C_{f^{-1}})$ au point d'abscisse 0.
   (d) Construire, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe $(C_{f^{-1}})$. (Utiliser deux couleurs différentes).

Exercise 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=5$ et $u_{n+1}=\dfrac{7u_n+4}{2u_n+5}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. (a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N} : u_n\geq 2$.
   (b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N} : u_{n+1}-u_n=\dfrac{-2(u_n-2)(u_n+1)}{2u_n+5}$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante puis que : $\forall n\in\mathbb{N} : 2\leq u_n\leq 5$.
   (d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
2. (a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N} : |u_{n+1}-2|\leq \dfrac{1}{3}(u_n-2)$.
   (b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N} : |u_n-2|\leq 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
   (c) Calculer $\lim u_n$.
3. On pose : $\forall n\in\mathbb{N} : v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{3}$ et déterminer son premier terme.
   (b) Calculer v_n en fonction de n et en déduire que : $\forall n\in\mathbb{N} : u_n=\dfrac{2+\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n}$.
   (c) Retrouver de nouveau : $\lim u_n$.
4. On considère la somme : $S_n=\sum\limits_{i=0}^{n} v_i=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$. Montrer que : $S_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
5. Calculer en fonction de n, le produit : $P_n=\prod\limits_{i=1}^{n} v_i=v_1\times v_2\times v_3\times\cdots\times v_n$.
6. On pose : $\forall n\in\mathbb{N} : w_n=\sqrt{7+u_n}$, calculer $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

﴿وَمَا خَلَقْنَا ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَآ إِلَّا بِٱلْحَقِّ ۗ وَإِنَّ ٱلسَّاعَةَ لَءَاتِيَةٌ ۖ فَٱصْفَحِ ٱلصَّفْحَ ٱلْجَمِيلَ﴾ (الحجر 85)