الاشتقــاق وتطبيقـاتــه

I– تذكير حول الاشتقــاق :

1) العدد المشتق - العدد المشتق على اليمين - العدد المشتق على اليسار - الدالة المشتقة :

تعريف 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim_{x \to x_0}\left(\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(x_0)}{x-x_0}\right)=\ell$.
- العدد الحقيقي ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ونرمز له بـ $\mathrm{f}'(x_0)$.

أمثلة :

أدرس اشتقاق الدالة f في x_0 في الحالتين : أ) $\mathrm{f}(x)=x^3+1$ ؛ $x_0=2$ ب) $\mathrm{f}(x)=x-\frac{1}{x}$ ؛ $x_0=-1$

تعريف 2 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[x_0;a[$ حيث $x_0<a$.

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim_{x \to x_0^+}\left(\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(x_0)}{x-x_0}\right)=\ell$.
- العدد الحقيقي ℓ يسمى العدد المشتق على اليمين في x_0 للدالة f ، ونرمز له بالرمز $\mathrm{f}_d'(x_0)$.

تعريف 3 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]a;x_0]$ حيث $a<x_0$.

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim_{x \to x_0^-}\left(\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(x_0)}{x-x_0}\right)=\ell$.
- العدد الحقيقي ℓ يسمى العدد المشتق على اليسار للدالة f في x_0 ونرمز له بالرمز $\mathrm{f}_g'(x_0)$.

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.

(f قابلة للاشتقاق في x_0) يكافئ (f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 و $\mathrm{f}_d'(x_0)=\mathrm{f}_g'(x_0)$)

أمثلة :

أدرس اشتقاق الدالة f في x_0 في الحالات التالية :

1) $\mathrm{f}(x)=|x-1|$ و $x_0=1$

2) $\begin{cases} \mathrm{f}(x)=\sin x & ; \quad x\geq 0 \\ \mathrm{f}(x)=\frac{2-2\cos x}{x} & ; \quad x<0 \end{cases}$ و $x_0=0$

تعريف 4 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I .

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقط المجال I ،
- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال $[a;b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح $]a;b[$ وقابلة للاشتقاق على اليمين في a وقابلة قابلة للاشتقاق على اليسار في b .
- الدالة $x \mapsto \mathrm{f}'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f ونرمز لها بالرمز f' .

مثال :

حدد الدالة المشتقة للدالة : $\mathrm{f}: x \mapsto x^2+x-1$

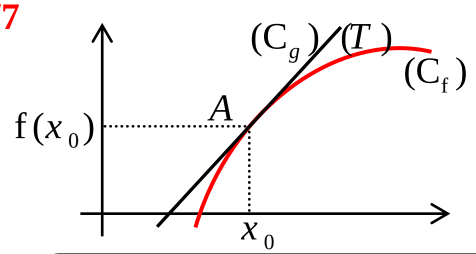
2) تأويلات هندسية :

أ) معادلة المماس لمنحنى دالة :

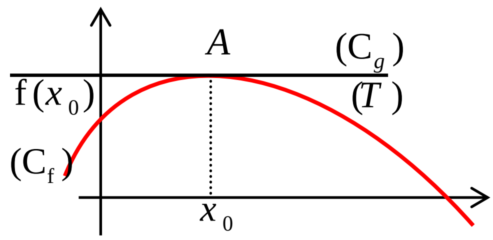
خاصية :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة x_0.

المستقيم ذو المعادلة $y=\mathrm{f}'(x_0)(x-x_0)+\mathrm{f}(x_0)$ هو مماس لـ (C_f) منحنى الدالة f في النقطة $A(x_0;\mathrm{f}(x_0))$



الدالة $g: x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في x_0 .



إذا كان $f'(x_0) = 0$ فإن المماس أفقي لأن معامله الموجه منعدم .

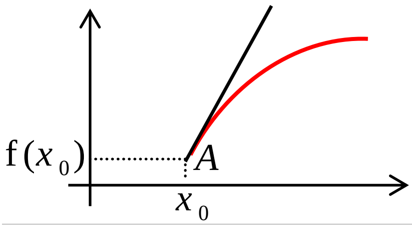
مثال :

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{x}$ و (C_f) منحناها في معلم م م .

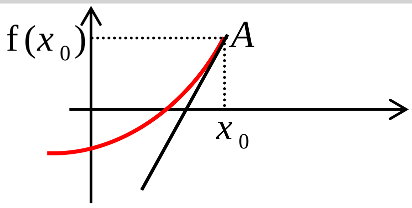
حدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 4 و الدالة التآلفية المماسة للدالة f في 4 .

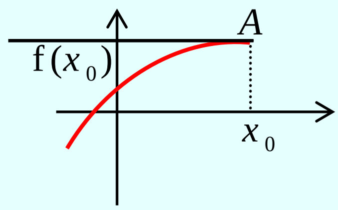
ب) نصف مماس لمنحنى دالة :

* إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 ، فإن :
نصف المستقيم ذو المعادلة : $y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad ; x \geq x_0$
هو نصف مماس لمنحنى الدالة f على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$.

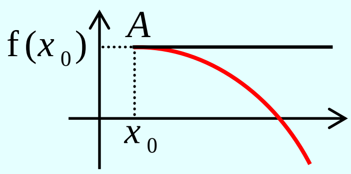


* إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 ، فإن :
نصف المستقيم ذو المعادلة : $y = f_g'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad ; x \leq x_0$
هو نصف مماس لمنحنى الدالة f على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$.



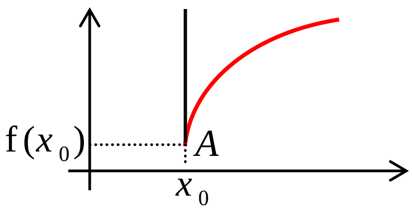


إذا كان $f_d'(x_0) = 0$ (أو $f_g'(x_0) = 0$)
فإن نصف المماس أفقي .

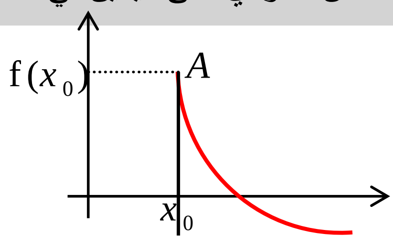


ج) حالة دالة غير قابلة للاشتقاق في نقطة :

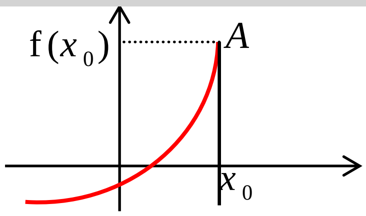
* إذا كان : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = +\infty$ ، فإن : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى .



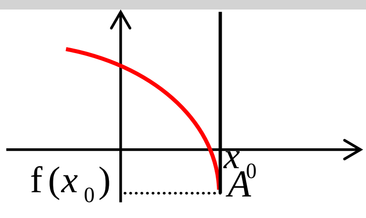
* إذا كان : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = -\infty$ ، فإن : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل .



* إذا كان : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = +\infty$ ، فإن : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل.



* إذا كان : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = -\infty$ ، فإن : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى .



3) قابلية الاشتقاق والاتصال :

خاصية :

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 فإنها متصلة في x_0 .
إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإنها متصلة على المجال I .

ملاحظة :

- إذا كانت f دالة غير متصلة في x_0 فإنها غير قابلة للاشتقاق في x_0 .
- إذا كانت f دالة متصلة في x_0 فإنها ليست بالضرورة قابلة للاشتقاق في x_0 .

مثلا : الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $\mathrm{f}(x)=|x|$ متصلة في 0 لكنها غير قابلة للاشتقاق في 0 .

4) الكتابة التفاضلية :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و f' مشتقتها على هذا المجال ، نضع $y=\mathrm{f}(x)$.

الكتابة $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ أو $dy=\mathrm{f}'(x)dx$ تسمى كتابة تفاضلية .

مثال :

نضع $y=x^3$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، التعبير $\dfrac{dy}{dx}=3x^2$ أو $dy=3x^2dx$ هو كتابة تفاضلية .

5) جدول مشتقات بعض الدوال :

$D_{\mathrm{f}'}$	$\mathrm{f}'(x)$	$\mathrm{f}(x)$
$\mathbb{R}$	0	a
$\mathbb{R}$	a	ax
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$n.x^{n-1}$	x^n حيث $(n\in\mathbb{N};n>1)$
$\mathbb{R}^+$	$r.x^{r-1}$	x^r حيث $(r\in\mathbb{Q};r>1)$
$\mathbb{R}_+^*$	$r.x^{r-1}$	x^r حيث $(r\in\mathbb{Q};r<1)$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$ € $\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$	$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

II– الاشتقــاق والعمليات :

1) العمليات على الدوال المشتقة (تذكير) :

لتكن u و v دالتين عدديتين قابلتين للاشتقاق على مجال مفتوح I ، و k عدد حقيقي ، لدينا :
الدالة العددية f قابلة للاشتقاق على I في كل الحالات التالية :

$\mathrm{f}'(x)$	$\mathrm{f}(x)$	
$\mathrm{f}'(x)=u'(x)+v'(x)$	$\mathrm{f}(x)=u(x)+v(x)$	$\forall x\in I$
$\mathrm{f}'(x)=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$	$\mathrm{f}(x)=u(x).v(x)$	
$\mathrm{f}'(x)=k.u'(x)$	$\mathrm{f}(x)=k.u(x)$	
$\mathrm{f}'(x)=\dfrac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$	$\mathrm{f}(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\forall x\in I$ بحيث $v(x)\neq 0$
$\mathrm{f}'(x)=\dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}$	$\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{v(x)}$	

نتائج :

الدوال الحدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
الدوال الجذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال مفتوح ضمن مجموعة تعريفها .

2) مشتقة مركب دالتين :

خاصية :

لتكن u و h دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على مجالين مفتوحين I و J بحيث $u(I)\subset J$ وليكن $x_0\in I$.
نعتبر الدالة f المعرفة على I بما يلي : $\forall x\in I:\ \mathrm{f}(x)=h\circ u(x)=h\left(u(x)\right)$
إذا كانت u قابلة للاشتقاق في x_0 و h قابلة للاشتقاق في $u(x_0)$ فإن f قابلة للاشتقاق في x_0 ولدينا :
$$\mathrm{f}'(x_0)=u'(x_0)\times h'\left(u(x_0)\right)$$
إذا كانت u قابلة للاشتقاق على المجال I و h قابلة للاشتقاق على المجال $u(I)$ فإن $h\circ u$ قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا : $\forall x\in I:\ \mathrm{f}'(x)=u'(x)\times h'\left(u(x)\right)$

نتائج :

- إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و $n\in\mathbb{N}^*$ فإن الدالة المعرفة على المجال I بـ $\mathrm{f}(x)=(u(x))^n$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ \mathrm{f}'(x)=n.u'(x).\left(u(x)\right)^{n-1}$
- إذا كانت u قابلة للاشتقاق وموجبة قطعا على مجال مفتوح I فإن الدالة المعرفة على المجال I بـ $\mathrm{f}(x)=\sqrt{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ \mathrm{f}'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

تمرين تطبيقي :

بين أن الدوال f و g و h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أحسب مشتقاتها حيث :
$$\mathrm{f}(x)=\sin(2x-3)\ \text{،}\quad g(x)=\sqrt{x^2+1}\ \text{،}\quad h(x)=(x^2-1)^5$$

3) مشتقة الدالة العكسية :

خاصية مقبولة :

لتكن f دالة عددية **متصلة ورتيبة قطعا** على مجال مفتوح I و $J=\mathrm{f}(I)$ وليكن $x_0\in I$ و $y_0=\mathrm{f}(x_0)$.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $\mathrm{f}'(x_0)\neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في y_0 ولدينا : $\left(\mathrm{f}^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{\mathrm{f}'(x_0)}$
إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I بحيث $\forall x\in I:\mathrm{f}'(x)\neq 0$ ، فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال J ولدينا : $\forall x\in J:\ \left(\mathrm{f}^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{f}'\left(\mathrm{f}^{-1}(x)\right)}$.

نتيجة :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بـ : $\mathrm{f}(x)=\sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ ولدينا $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$

تمرين تطبيقي :

1) لتكن f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x^2+1}$ ،
بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $]1;+\infty[$ وأن f^{-1} قابلة للاشتقاق في $\mathrm{f}(1)$.
2) حدد الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $\mathrm{f}(x)=\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}$

خاصية :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، و u دالة موجبة قطعا وقابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .
الدالة f المعرفة على المجال I بـ : $\mathrm{f}(x)=\sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\mathrm{f}'(x)\mapsto\dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\sqrt[5]{x^2+2}$ ، بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $f'(x)$.

III– تطبيقات الاشتقـــاق :

1) رتابة دالة وإشارة مشتقتها :

خاصية 1 :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .

f تزايدية على المجال I $\Leftrightarrow$ $f'\geq 0$ على I

f تناقصية على المجال I $\Leftrightarrow$ $f'\leq 0$ على I

f ثابتة على المجال I $\Leftrightarrow$ $f'=0$ على I

خاصية 2 :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .

f تزايدية قطعا على I إذا كانت $(f'>0$ على I وقد تنعدم f' في عدد منته من نقط $I)$

f تناقصية قطعا على I إذا كانت $(f'<0$ على I وقد تنعدم f' في عدد منته من نقط $I)$

ملاحظة (حالة مجال غير مفتوح):

إذا كانت f دالة رتيبة على المجال المفتوح $]a;b[$ ومتصلة على اليمين في a ومتصلة على اليسار في b فإن الدالة f لها نفس الرتابة على المجال $[a;b]$.

نفس الملاحظة بالنسبة للمجالات $]a;b]$ ، $[a;b[$ ، $[a;+\infty[$ و $]-\infty;a]$ ، وفي حالة الرتابة قطعا .

تمرين تطبيقي :

1) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x^2-4x+3$.

2) بين أن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3) بين أن الدالة h المعرفة على $]-\infty;1]$ بـ : $h(x)=\sqrt{1-x}$ تناقصية قطعا على المجال $]-\infty;1]$.

2) مطاريف دالة عددية :

تعريف 1 :

لتكن f دالة عددية و D_f حيز تعريفها ، وليكن $x_0\in D_f$.

نقول إن العدد $f(x_0)$ هو القيمة القصوى المطلقة للدالة f عند العدد x_0 إذا كان : $\forall x\in D_f : f(x)\leq f(x_0)$

نقول إن العدد $f(x_0)$ هو القيمة الدنيا المطلقة للدالة f عند العدد x_0 إذا كان : $\forall x\in D_f : f(x)\geq f(x_0)$

تعريف 2 :

لتكن f دالة عددية و D_f حيز تعريفها ، وليكن $x_0\in D_f$.

نقول إن العدد $f(x_0)$ هو قيمة قصوى نسبية للدالة f عند العدد x_0 إذا وُجد مجال مفتوح I ضمن D_f بحيث :

$x_0\in I$ و $\forall x\in I : f(x)\leq f(x_0)$.

نقول إن العدد $f(x_0)$ هو قيمة دنيا نسبية للدالة f عند العدد x_0 إذا وُجد مجال مفتوح I ضمن D_f بحيث :

$x_0\in I$ و $\forall x\in I : f(x_0)\leq f(x)$.

تعريف 3 :

لتكن f دالة عددية و D_f حيز تعريفها ، وليكن $x_0\in D_f$ ، إذا كان العدد $f(x_0)$ قيمة قصوى أو دنيا للدالة f ، فإننا نقول إن النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مطراف للدالة f ، أو f تقبل مطرافا في x_0 .

خاصية :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح مركزه x_0 إذا انعدمت f' في x_0 مغيرة إشارتها بجوار x_0 فإن f تقبل مطرافا في x_0 .

تمرين تطبيقي :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها .

2) بين أن $f(-1)$ هي القيمة القصوى المطلقة لـ f وأن $f(1)$ هي القيمة الدنيا المطلقة لـ f .

IV– التمثيل المبياني لمنحنى دالة (تذكير) :

في جميع الفقرات المتبقية ، f دالة عددية و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) الفروع اللانهائية لمنحنى دالة :

أ) المستقيمات المقاربة :

- المقارب الموازي لمحور الأفاصيل :

تعريف :

ليكن a من $\mathbb{R}$ ، إذا كان : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$ أو $\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=a\right)$ نقول إن المستقيم ذو المعادلة $y=a$ مقارب لـ (C_f) موازي لمحور الأفاصيل بجوار $+\infty$ أو (بجوار $-\infty$).

- المقارب الموازي لمحور الأراتيب :

تعريف :

ليكن a من $\mathbb{R}$ ، إذا كان: $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ أو $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ نقول إن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ مقارب لـ (C_f) موازي لمحور الأراتيب.

- المقارب المائل :

تعريف :

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $a\neq 0$ ،

إذا كان: $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(ax+b))=0$ أو $\left(\lim_{x\to-\infty} (f(x)-(ax+b))=0\right)$ نقول إن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ أو (بجوار $-\infty$).

خاصية :

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ ، بحيث $a\neq 0$،

إذا كان : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-ax)=b$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

إذا كان : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-ax)=b$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ب) الفروع الشلجمية :

تعاريف :

لتكن f دالة عددية بحيث $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ و a من $\mathbb{R}$ ،

إذا كان : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ نقول إن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

إذا كان : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

إذا كان : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a\neq 0$ و $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-ax)=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$.

ملاحظة :

بنفس الطريقة نعرف الفروع الشلجمية بجوار $-\infty$ (يكفي فقط تعويض $x\to+\infty$ بـ $x\to-\infty$)

تمرين تطبيقي :

حدد D_f ثم أدرس الفروع اللانهائية لـ (C_f) منحنى الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=x^2$

2) $f(x)=\sqrt[3]{2x}+1$

3) $f(x)=2x+\sqrt{x}$

4) $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2+1}$

5) $f(x)=3x-2+\frac{4}{x-1}$

2) تقعر منحنى - نقط انعطاف منحنى :

أ) تقعر منحنى دالة :

تعريف :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I .
نقول إن لـ (C_f) تقعرا موجها نحو الأعلى (أو (C_f) محدب) إذا كان يوجد فوق جميع مماساته .
نقول إن لـ (C_f) تقعرا موجها نحو الأسفل (أو (C_f) مقعر) إذا كان يوجد تحت جميع مماساته .

خاصية :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I .
إذا كانت f'' موجبة قطعا على المجال I فإن لـ (C_f) تقعر موجه نحو الأعلى.
إذا كانت f'' سالبة قطعا على المجال I فإن لـ (C_f) تقعر موجه نحو الأسفل.

ب) نقط انعطاف منحنى دالة :

تعريف :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.
نقول إن النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف لـ (C_f) إذا تغير تقعر (C_f) عند النقطة A .

خاصية 1 :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.
إذا كانت f' تنعدم في x_0 و لا تغير إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة $A(x_0;f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f).

خاصية 2 :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.
إذا كانت f'' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة $A(x_0;f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f).

تمرين تطبيقي :

حدد نقط انعطاف وتقعر (C_f) منحنى الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^3-6x^2+5x+2$

3) محور تماثل - مركز تماثل منحنى :

خاصية 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجموعة D و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم ، و a من $\mathbb{R}$ ،
المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تماثل للمنحنى $(C_f) \Leftrightarrow \forall x \in D : \left.\begin{array}{l}(2a-x)\in D \\ f(2a-x)=f(x)\end{array}\right\}$

حالة خاصة :

إذا كانت f دالة زوجية فإن منحناها (C_f) في معلم متعامد ممنظم يكون متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب .

خاصية 2 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجموعة D و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم ، و a و b من $\mathbb{R}$ ،
النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل للمنحنى $(C_f) \Leftrightarrow \forall x \in D : \left.\begin{array}{l}(2a-x)\in D \\ f(2a-x)=2b-f(x)\end{array}\right\}$

حالة خاصة :

إذا كانت f دالة فردية فإن منحناها (C_f) في معلم متعامد ممنظم يكون متماثلا بالنسبة لأصل المعلم .

تمرين تطبيقي :

1) بين أن النقطة $I(1;3)$ مركز تماثل لـ (C_f) منحنى الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$
2) بين أن المستقيم $(D):x=2$ محور تماثل لـ (C_g) منحنى الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=x^2-4x+3$