Exercice 1

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1, +\infty[$, et que : $2 < \alpha < 3$
   (b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{2x^2}$

1. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de D_f et $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x)$
2. Déterminer les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.
3. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (Λ) d'équation $y = x$.
5. Étudier la concavité de $(\mathscr{C}_f)$.
6. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On donne $\alpha = 2.1$ et $f(\alpha) = 3.8$)

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x\left(\sqrt{x} - 2\right)^2$
On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que peut-on déduire ?
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$
   puis étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
4. Étudier la concavité de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et montrer que $(\mathscr{C}_f)$ admet un unique point d'inflexion I auquel on déterminera ses coordonnées.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x) = x$ et interpréter le résultat graphiquement.
6. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
7. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [4, +\infty[$.
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}.
   (c) Calculer $g(9)$ puis déterminer $(g^{-1})'(9)$.
   (d) Trouver $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
8. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.