Exercice 1

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ telles que : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$

1) Vérifier que $D_f =]0;+\infty[$. .... (0,5 pt)
2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement. .... (1 pt)
3) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis en déduire la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$. .... (1 pt)
4) (a) Montrer que : $(\forall x \in D_f) : f(x) - x = \dfrac{(1-\sqrt{x})(2x+\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}$. .... (1 pt)
   (b) En déduire la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta) : y = x$. .... (1 pt)
5) (a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[) : f'(x) = \dfrac{x-1}{4\sqrt{x^3}}$. .... (1 pt)
   (b) En déduire que f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]0;1]$. .... (1 pt)
6) (a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[) : f''(x) = \dfrac{3-x}{8\sqrt{x^5}}$. .... (1 pt)
   (b) Déduire la concavité de (C_f) et déterminer son point d'inflexion s'il existe. .... (1 pt)
7) (a) Déterminer les primitives de f sur $]0;+\infty[$ (**remarquez que** : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$). .... (1 pt)
   (b) En déduire la fonction primitive F de f vérifiant : $F(1) = 0$. .... (1 pt)
8) Construire dans le même repère la droite (Δ) et la courbe (C_f). .... (1 pt)
9) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 1$. .... (1 pt)
   b) Montrer que (u_n) est décroissante. .... (0,5 pt)
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. .... (1 pt)

Exercice 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 4$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{1+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Et soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{2-u_n}{1-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, puis calculer v_0. .... (1,5 + 0,5 pt)
2) Écrire v_n en fonction de n, puis déduire que : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$. .... (1 × 2 pt)
3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis en déduire la convergence de la suite (u_n). .... (1 × 2 pt)

﴿قُل لَّوۡ كَانَ ٱلۡبَحۡرُ مِدَادٗا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّي لَنَفِدَ ٱلۡبَحۡرُ قَبۡلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَٰتُ رَبِّي وَلَوۡ جِئۡنَا بِمِثۡلِهِۦ مَدَدٗا﴾ (الكهف 109)