

Exercice 1 : 11 pt

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 2x$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Déterminer D_f et calculer limites aux bornes. 1 pt
- 2 Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$. 1 pt
- 3 Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite (Δ) d'équation $y = x$. 1 pt
- 4
 - a Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. 1 pt
 - b Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. 1 pt
 - c Dresser le tableau de variation de f . 1 pt
 - d Construire (Δ) et $(\mathcal{C}_f)$. 1 pt
- 5 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 1 pt
 - b Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge. 1 pt
 - c Calculer la limite de (u_n) . 2 pt

Exercice 2 : 9pt

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- 1 Calculer u_1, u_2, u_3 . 1,5 pt
- 2
 - a Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$. 1,5 pt
 - b En déduire que pour tout $n \geq 5$,

$$u_n \geq \frac{3}{n} - 1$$
 . 1,5 pt
 - c En déduire la limite de (u_n) . 1,5 pt
- 3 On définit la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3} + \frac{1}{2n}.$$
 - a Démontrer que (v_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme. 1,5 pt
 - b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{2}{3} - \frac{1}{2n} \quad .1,5pt$$
 - c Soit $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Donner son expression en fonction de n . 1,5 pt

Exercice 1 : 11 pt

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 2x$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Déterminer D_f et calculer limites aux bornes. 1 pt
- 2 Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$. 1 pt
- 3 Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite (Δ) d'équation $y = x$. 1 pt
- 4
 - a Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. 1 pt
 - b Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. 1 pt
 - c Dresser le tableau de variation de f . 1 pt
 - d Construire (Δ) et $(\mathcal{C}_f)$. 1 pt
- 5 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 1 pt
 - b Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge. 1 pt
 - c Calculer la limite de (u_n) . 2 pt

Exercice 2 : 9pt

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- 1 Calculer u_1, u_2, u_3 . 1,5 pt
- 2
 - a Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$. 1,5 pt
 - b En déduire que pour tout $n \geq 5$,

$$u_n \geq \frac{3}{n} - 1$$
 . 1,5 pt
 - c En déduire la limite de (u_n) . 1,5 pt
- 3 On définit la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3} + \frac{1}{2n}.$$
 - a Démontrer que (v_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme. 1,5 pt
 - b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{2}{3} - \frac{1}{2n} \quad .1,5pt$$
 - c Soit $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Donner son expression en fonction de n . 1,5 pt