

Exercice 1

I. Soit f la fonction définie sur par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$

1. Montrer que : $D_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$
 2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déduire la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.
 4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 5. (a) Vérifier que : $f(x) - x = \frac{x(4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}$ pour tout x de D_f
(b) Déduire la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$.
 6. (a) Montrer que : $f'(x) = \frac{x-4}{2(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)}$ pour tout x de $]0; 1[\cup]1; +\infty[$
(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
 7. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ (On admet que $I\left(9; \frac{9}{2}\right)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$).
- II. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [4; +\infty[$.

1. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Tracer la courbe $(\mathcal{C}^{-1})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

III. Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer que $U_n > 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{4U_n + 2}{U_n + 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Vérifier que : $U_{n+1} = 4 - \frac{10}{U_n + 3}$
2. Montrer par récurrence que : $-1 < U_n < 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$
3. (a) Montrer que : $U_{n+1} - U_n = \frac{(2 - U_n)(U_n + 1)}{U_n + 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
(b) Montrer que la suite (U_n) est croissante puis déduire que $U_n \geq \frac{2}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
(c) Déduire que (U_n) est convergente.
4. On pose : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
(a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
(b) Exprimer V_n en fonction de n .
(c) Montrer que : $U_n = \frac{2 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
5. Calculer la limite de la suite (W_n) définie par $W_n = \sqrt{2 + 3U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
6. (a) Montrer que : $0 < 2 - U_{n+1} \leq \frac{2}{3}(2 - U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
(b) Déduire que : $0 < 2 - U_n \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer de nouveau $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.