

Exercice 1

1. Soit f la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3\sqrt{x^2 + 6x} - 2\sqrt[3]{2}}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{5\sqrt[3]{2}}{12} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 2$.

2. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{4\}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt[3]{1 - x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{1}{2 - \sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \text{ et } x \neq 4 \end{cases}$$

(a) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

(b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 1.

(c) f est-elle dérivable en 1? Justifier.

3. Comparer les deux nombres : $\sqrt[5]{91}$ et $\sqrt[3]{15}$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E) : \sqrt[3]{x^2 + 2x + 2} = 1$

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x - 1} - \sqrt{x}$

1. Donner le tableau de variations de la fonction f .

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1; +\infty[$ et que $\alpha \in]1; 2[$.

3. Vérifier que : $\alpha = \sqrt[3]{2\alpha^2 - \alpha + 1}$.

4. Donner le signe de f sur $]1; +\infty[$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Vérifier que : $D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

2. Montrer que la fonction f est impaire.

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4. Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$.

5. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .

6. Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 4.

7. Soit g la restriction de la fonction f sur $I =]1; +\infty[$.

(a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

(b) Calculer $g(\sqrt{2})$ puis montrer que g^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ et calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

(c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.