

Exercice 1

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{U_n + 2} \end{cases}$$

- Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 2$.
- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} - U_n = \frac{(1 + U_n)(2 - U_n)}{U_n + 2}$
 - Étudier la monotonie de $(U_n)_n$ puis déduire que la suite $(U_n)_n$ est convergente
- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_{n+1} - 2 < \frac{1}{4}(U_n - 2)$
 - Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ puis calculer $\lim U_n$
- On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $V_n = \frac{2 - U_n}{U_n + 1}$
 - Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
 - Déterminer (V_n) en fonction de n .
 - Déduire (U_n) en fonction de n , puis calculer $\lim U_n$ une autre fois

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x + 1} + x$
et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

- Vérifier que $D_f = [-1; +\infty[$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - Déterminer la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
- Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.
- Montrer que f est dérivable sur $] -1; +\infty[$
 - Montrer que $(\forall x \in] -1; +\infty[) : f'(x) = \frac{(2x + 1)^2 + x^2}{2\sqrt{x + 1}} + 1$
 - Donner le tableau de variation de f .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in] -1; 0[$
- Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer.
- Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$.
- Construire $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère

Exercice 3

Les questions sont indépendantes

- Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes sur $I = \mathbb{R}$
 - $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$
 - $f(x) = \frac{x + 2}{(2x^2 + 8x + 9)^2}$
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ dans les cas suivants
 - $U_n = \frac{2n^3 - 1}{3n^2 + 2n - 1}$
 - $U_n = \frac{\sqrt{2}^n - \sqrt{3}^n}{\sqrt{2}^n + \sqrt{3}^n}$