

Exercice 1

1. Montrer que la solution de l'équation $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$ est $\frac{1}{4}$. (0.5 pt)

2. Soit h la fonction définie par :
$$\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt[3]{4x-3}-1}{x-1} & \text{si } x \in \left[\frac{3}{4}, +\infty\right] \setminus \{1\} \\ h(1) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Étudier la continuité de h en $x = 1$. (1 pt)

3. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2025} - 1}{x - 1}$ et $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}$. (1.5 pt)

4. Calculer $g'(x)$ dans chacun des cas suivants :

$g(x) = \sin(2x^3 + 4x) + \sin(\pi^2)$ et $g(x) = \sqrt[4]{x^3 + 3x + 1}$. (1 pt)

5. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

Montrer que : f est dérivable en $a \implies f$ est continue en a . (1 pt)

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{1}{2-\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que $D_f =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$. (0.75 pt)

2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f . (1.25 pt)

3. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartient à $D_f - \{1\}$. (1 pt)

(b) Dresser le tableau de variation de f . (0.5 pt)

4. (a) Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $]0; 1[$. (1 pt)

(b) En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1} . (0.5 pt)

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

Et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2$. (0.5 pt)

2. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0.5 pt)

3. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$. (0.5 pt)

4. (a) Étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$, puis interpréter le résultat obtenu. (0.75 pt)

(b) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$. (1 pt)

(c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$, puis donner le tableau de variations de f . (0.75 pt)

(d) Déterminer l'équation de (T) la tangente de la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4. (0.75 pt)

5. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

(a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. (0.5 pt)

(b) Dresser le tableau de variation de la fonction g^{-1} . (0.25 pt)

(c) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en 1, puis déterminer $(g^{-1})'(1)$. (0.75 pt)

(d) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + g^{-1}(x) - 5}{x - 1}$. (1 pt)

(e) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J . (0.75 pt)

Exercice 4

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = x^{n+1} - 3x^n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer que h est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{3n}{n+1}\right]$ et elle est strictement croissante sur $\left]\frac{3n}{n+1}; +\infty\right[$, puis donner le tableau de variation de h . (1 pt)

(b) En déduire que $h\left(\frac{3n}{n+1}\right) < 0$, (remarquer que $h(1) = -1$). (0.5 pt)

2. Montrer que : $\exists! \beta \in \left[\frac{3n}{n+1}; 3\right] h(\beta) = 0$. (0.5 pt)

﴿هُوَ الَّذِي يُصَلِّي عَلَيْكُمْ وَمَلَائِكَتُهُ لِيُخْرِجَكُم مِّنَ الظُّلُمَاتِ إِلَى النُّورِ وَكَانَ بِالْمُؤْمِنِينَ رَحِيمًا﴾
(الأحزاب 43)