## Exercice 1

On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$

On note $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

**Partie I :**

**1)** Déterminer $D_f$.

**2)** **a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**b)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -\infty$.

**c)** Déduisez la branches infinies de $(C_f)$.

**3)** **a)** Etudier la dérivabilité de la fonction $f$ à droite en 0.

**b)** Interprétez graphiquement le résultat.

**4)** **a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in ]0; +\infty[$.

**b)** Etudier les variations de $f$ puis dresser le tableau de variations de $f$.

**5)** **a)** Montrer que $f(x) - x = 2(1 - \sqrt{x})$, $\forall x \in ]0; +\infty[$.

**b)** Etudier la position relative de $(C_f)$ et la droite $(D)$ d'équation $y = x$.

**6)** Donner l'équation cartésienne de la tangente $(T)$ à $(C_f)$ au point d'abscisse 4.

**7)** Tracez $(C_f)$.

**Partie II :** On considère la suite $(U_n)$ définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n); \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

**1)** Montrer que $1 \leq U_n \leq 2 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

**2)** Montrer que $(U_n)$ est décroissante.

**3)** Déduire que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

## Exercice 2

Soit $(U_n)$ la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3 + U_n}{5 - U_n}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

**1)** montrer que $1 < U_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

**2)** **a)** Vérifier que $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(U_n - 3)}{5 - U_n}$.

**b)** Déduire que $(U_n)$ est décroissante et convergente.

**3)** on considère la suite $(V_n)$ définie par $V_n = \dfrac{U_n - 1}{3 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

**a)** montrer que $(V_n)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

**b)** calculer $V_n$ en fonction de n.

**c)** Déduire $U_n$ en fonction de n. Puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.