Résumé de Cours : Calcul Intégral

Prof : SOUHAIL Mohamed | Lycée Ibnou Batouta

1. Définition et Linéarité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et F une primitive de f sur I. Soient $a, b \in I$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés élémentaires :
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Relation de Chasles :
Pour tout $c \in I$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Linéarité de l'intégrale :
Pour tous réels α et β :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Intégrale et Ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec $\mathbf{a \leq b}$.

Positivité :
Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Conservation de l'ordre :
Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$, alors : $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Valeur Absolue :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Encadrement

Si pour tout $x \in [a, b]$, on a $m \leq f(x) \leq M$, alors : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

3. Valeur Moyenne

La valeur moyenne μ d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$ (avec $a \neq b$) est donnée par :
$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$
Interprétation géométrique : C'est la hauteur du rectangle de base $[a, b]$ qui a la même aire que le domaine sous la courbe de f.

4. Intégration par Parties (IPP)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ dont les dérivées u' et v' sont continues.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Choix de $u(x)$: Règle ALPES

Pour bien choisir la fonction à dériver $u(x)$, on suit l'ordre de priorité du mot **ALPES** : **A** : Arctan (Hors programme PC/SVT)

L : **L**ogarithme (ln)	**E** : **E**xponentielle (e^x)
P : **P**olynôme ($x, x^2+1, .$)	**S** : **S**inus / Cosinus

Exemple d'Application

Calculer $I = \int_1^e x \ln(x)\,dx$
D'après **ALPES**, on pose $u(x) = \ln(x)$ (priorité L) et $v'(x) = x$.

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{e^2}{2}\ln(e) - 0\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$

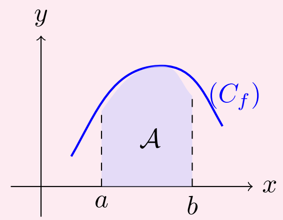
$I = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}$

5. Calcul des Aires

L'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right) \times u.a$$

où $u.a$ est l'unité d'aire : $u.a = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||$.



Aire entre deux courbes (C_f) et (C_g) :

$$\mathcal{A} = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx\right) \times u.a$$

6. Calcul des Volumes

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
La rotation de la courbe (C_f) autour de l'axe des abscisses engendre un solide de révolution.
Le volume $\mathcal{V}$ de ce solide est donné par :

$$\mathcal{V} = \left(\pi \int_a^b (f(x))^2\,dx\right) \times u.v$$

où $u.v$ est l'unité de volume :

$$u.v = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}|| \times ||\vec{k}||$$