Résumé de Cours : Les nombres complexes

Prof : SOUHAIL Mohamed | Lycée Ibnou Batouta

1. Forme Algébrique

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
Il existe un nombre i tel que : $\mathbf{i^2 = -1}$.
Tout complexe z s'écrit par : $z = a + ib \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$
- $a = \text{Re}(z)$: Partie réelle.
- $b = \text{Im}(z)$: Partie imaginaire.

Égalité de deux complexes :
$z = z' \iff \text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$.
$z = 0 \iff a = 0$ et $b = 0$.
- Si $b = 0$, alors $z \in \mathbb{R}$ (réel pur).
- Si $a = 0$, alors $z \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pur).

2. Conjugué et Module

Soit $z = a + ib$.
Le Conjugué $\bar{z}$: $\bar{z} = a - ib$
Propriétés :
$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad ; \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
$z + \bar{z} = 2a \quad ; \quad z - \bar{z} = 2ib$
Le Module $|z|$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Propriétés :
$|z| = 0 \iff z = 0 \quad ; \quad |z| = |-z| = |\bar{z}|$
$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad ; \quad |z^n| = |z|^n$
$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad ; \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

3. Équations du 2nd degré dans $\mathbb{C}$

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
Cas 1 : $\Delta > 0$: $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Cas 2 : $\Delta = 0$ (1 solution réelle double) : $z_0 = \frac{-b}{2a}$
Cas 3 : $\boldsymbol{\Delta < 0}$ (2 solutions complexes conjuguées)
$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad ; \quad z_2 = \bar{z_1} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

4. Formes Trigo. et Exponentielle

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On pose $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$.
Calcul de l'argument θ : $\cos(\theta) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{r}$
Forme Trigonométrique :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$
Forme Exponentielle :
$z = r \cdot e^{i\theta}$ avec $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
Propriétés des arguments :
- $\arg(z \cdot z') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n \cdot \arg(z) \ [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi] \implies \bar{z} = re^{-i\theta}$

Formules de Moivre et d'Euler :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

5. Affixe, Distance et Milieu

Le plan complexe est rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
À tout point $M(a, b)$ est associé son **affixe** $z_M = a + ib$.
Affixe d'un vecteur : $Z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$
Distance entre deux points : $AB = |z_B - z_A|$
Milieu d'un segment :
Le point I milieu de $[AB]$ a pour affixe : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

6. Alignement et Cocycliques

Alignement de 3 points :
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si :
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ (c-à-d $\arg = 0$ ou π)
Vecteurs Orthogonaux :
$\vec{AB} \perp \vec{AC} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$ (c-à-d $\arg = \pm\frac{\pi}{2}$)
A, B, C, D sont cocycliques (ou alignés) $\iff$

$$\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) \times \left(\frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}\right) \in \mathbb{R}$$

7. Angles Orientés et Triangles

Mesure d'un angle orienté :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{AB})} \equiv \arg(z_B - z_A) \ [2\pi]$$

$$\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi]$$

Nature du triangle ABC (Très fréquent)

On calcule $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
1. Triangle rectangle en A :
$Z = i \cdot k \quad (k \in \mathbb{R}^*) \implies \arg(Z) \equiv \pm\frac{\pi}{2}$
2. Triangle isocèle en A :
$Z = e^{i\theta} \implies |Z| = 1 \implies \frac{AC}{AB} = 1 \implies AC = AB$
3. Triangle rectangle et isocèle en A :
$Z = \pm i \implies \begin{cases} |Z| = 1 \\ \arg(Z) \equiv \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$
4. Triangle équilatéral :
$Z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \implies \begin{cases} |Z| = 1 \\ \arg(Z) \equiv \pm\frac{\pi}{3} \end{cases}$

8. Transformations du Plan

Soit $M(z)$ un point et $M'(z')$ son image par la transformation.
A. La Translation : $t_{\vec{u}}$
De vecteur $\vec{u}$ d'affixe z_u : $z' = z + z_u$
B. L'Homothétie : $h(\Omega, k)$
De centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$.

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

Interprétation : $\vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M}$
C. La Rotation : $R(\Omega, \theta)$
De centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$