Résumé de Cours : Fonction Exponentielle

Prof : SOUHAIL Mohamed | **Lycée Ibnou Batouta**

1. Définition et Lien avec $\ln$

La fonction exponentielle népérienne, notée exp ou $\mathbf{x \mapsto e^x}$, est la bijection réciproque de la fonction ln.
Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}$.

Conséquences directes :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y > 0$:

$$e^x = y \iff x = \ln(y), \quad \ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad e^{\ln(y)} = y$$

Remarque : Le nombre e vérifie $\ln(e) = 1$ et $e \approx 2,718$.
La fonction $x \mapsto e^x$ est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$ ($e^x > 0$).

2. Propriétés Algébriques

Les propriétés de la fonction exponentielle sont analogues à celles des puissances.
Pour tous réels a et b, et pour tout entier $r \in \mathbb{Q}$:
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^r = e^{r \times a}$

3. Équations et Inéquations

La fonction $x \mapsto e^x$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \iff a = b \text{ et } e^a < e^b \iff a < b$$

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$e^{2x} - e^x \geq 0 \iff e^{2x} \geq e^x \iff 2x \geq x \quad \iff x \geq 0$
Donc $S = [0, +\infty[$.

4. Limites Fondamentales

Limites aux bornes :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Croissances comparées : Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Limite au point 0 : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Astuce pour les formes indéterminées

En $+\infty$: Si vous avez une F.I. de type $\frac{\infty}{\infty}$, pensez à factoriser par e^x en haut et en bas.
En $-\infty$: Pensez souvent à développer pour faire apparaître la limite usuelle $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

5. Dérivation et Primitives

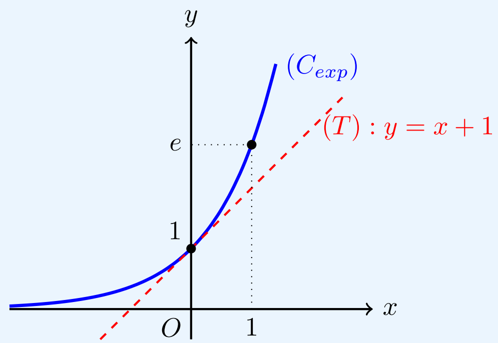
Dérivée de base :
La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même : $(e^x)' = e^x$

Dérivée d'une fonction composée :
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :
$(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

Primitives :
Toute fonction de la forme $u'(x)e^{u(x)}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$e^{u(x)} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

6. Courbe Représentative



- L'axe des abscisses ($y = 0$) est une **asymptote horizontale** au voisinage de $-\infty$.
- La courbe admet une **branche parabolique** de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

7. Fonction Exponentielle de base a

Soit a un réel tel que $a > 0$ et $a \neq 1$.
La fonction exponentielle de base a, notée $x \mapsto a^x$, est définie sur $\mathbb{R}$ par : $a^x = e^{x \ln(a)}$

Propriétés principales :
- **Dérivée :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$
- **Monotonie et Limites :** Le sens de variation dépend de a :

• **Si $\mathbf{a > 1}$:** Fonction **strictement croissante** (car $\ln(a) > 0$).
$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

• **Si $\mathbf{0 < a < 1}$:** Fonction **strictement décroissante** (car $\ln(a) < 0$).
$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$