Résumé de Cours : Fonction Logarithme Népérien

Prof : SOUHAIL Mohamed | **Lycée Ibnou Batouta**

1. Définition et Signe

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la **primitive** de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.
- Domaine de définition : $D =]0, +\infty[$
- $\ln(1) = 0$

Le nombre e :
Il existe un unique réel, noté e, tel que :

$$\ln(e) = 1 \quad (\text{avec } e \approx 2,718)$$

Signe de $\ln(x)$:
- Si $x > 1$ alors $\ln(x) > 0$
- Si $0 < x < 1$ alors $\ln(x) < 0$

Domaine d'une fonction composée

Pour déterminer le D_f de $f(x) = \ln(u(x))$, il faut obligatoirement résoudre l'inéquation : $\mathbf{u(x) > 0}$
Ex : $f(x) = \ln(x-2) \implies x - 2 > 0 \implies D_f =]2, +\infty[$.

2. Propriétés Algébriques

La fonction ln transforme les **produits** en **sommes**.
Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, et pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$:
- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$ (ex : $\ln(a^2) = 2\ln(a)$)
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Attention aux erreurs !

$\ln(a + b) \neq \ln(a) + \ln(b)$
$\ln(x^2) = 2\ln(|x|)$ si $x \neq 0$.

3. Équations et Inéquations

La fonction ln est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.
Par conséquent, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:
$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$

Exemple classique

Résoudre $\ln(x - 1) = 2$:
1. **Domaine** : $x - 1 > 0 \implies x \in]1, +\infty[$.
2. **Résolution** : On sait que $2 = 2\ln(e) = \ln(e^2)$.
Donc $\ln(x-1) = \ln(e^2) \iff x - 1 = e^2 \iff x = e^2 + 1$.
Puisque $e^2 + 1 > 1$, la solution est $S = \{e^2 + 1\}$.

4. Limites Fondamentales

Limites aux bornes du domaine :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

L'axe des ordonnées ($x = 0$) est une asymptote verticale.
Croissances comparées en $+\infty$: (L'emporte sur x)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

La courbe admet une **branche parabolique** de direction l'axe des abscisses.
Croissances comparées en 0^+ :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x^n\ln(x) = 0$$

Limites dérivées (Taux d'accroissement) :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

5. Dérivation

Dérivée de base :
La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et : $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
Dérivée d'une fonction composée :
Si u est une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I, alors $\ln(u(x))$ est dérivable sur I et : $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
Généralisation avec valeur absolue :

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Ce qui donne la **primitive** de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est : $\ln|u(x)| + C$.

6. Courbe et Log de base a

La fonction logarithme de base a (avec $a > 0, a \neq 1$) est :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Cas particulier : Le logarithme décimal (log) est $\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
Courbe de la fonction ln :