Résumé de Cours : Les Primitives

Prof : SOUHAIL Mohamed | Lycée Ibnou Batouta

1. Définition et Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle **fonction primitive** de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

Ensemble des primitives :
Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme :

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{c} \quad (c \in \mathbb{R})$$

Linéarité :
Si F et G sont des primitives de f et g, alors :
- $F + G$ est une primitive de $f + g$
- kF est une primitive de kf $(k \in \mathbb{R})$

2. Primitive vérifiant une condition

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives.
Cependant, pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une **unique** primitive F de f sur I qui vérifie la condition initiale :

$$F(x_0) = y_0$$

Méthode : Trouver la constante c

Déterminer la primitive F de $f(x) = 2x + 3$ telle que $F(1) = 5$.
1. **Forme générale :** $F(x) = x^2 + 3x + c$
2. **Utiliser la condition :** $F(1) = 5$
$1^2 + 3(1) + c = 5 \implies 4 + c = 5 \implies c = 1$
3. **Conclusion :** $F(x) = x^2 + 3x + 1$

3. Primitives Usuelles

Dans le tableau suivant, c est une constante réelle.

Fonction f(x)	Primitive F(x)
a (constante)	$ax + c$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
x^r $(r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$2\sqrt{x} + c$

Remarque : La règle $x^r \to \frac{x^{r+1}}{r+1}$ fonctionne pour tous les exposants rationnels (puissances, fractions, négatifs) **sauf** pour $r = -1$ (c'est-à-dire $\frac{1}{x}$).

4. Primitives Trigonométriques

Fonction f(x)	Primitive F(x)
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(ax + b)$ $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + c$
$\sin(ax + b)$ $(a \neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$

Astuce / Application

Primitive de $f(x) = \sin(2x - \pi)$:
Ici $a = 2$. Donc $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x - \pi) + c$.

5. Opérations (Fonctions Composées)

Soit u une fonction dérivable. Ces règles sont indispensables pour l'examen !

La fonction f	La primitive F
$u'(x) \cdot u(x)$	$\frac{1}{2}[u(x)]^2 + c$
$u'(x) \cdot [u(x)]^n$ $(n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1} + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ $(u > 0)$	$2\sqrt{u(x)} + c$
$u'(x) \cdot \cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + c$
$u'(x) \cdot \sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$

6. Méthodologie et Astuces

Apparition de la dérivée :
Très souvent, $f(x)$ ne ressemble pas directement à $u' \cdot u^n$. Il faut multiplier et diviser par une constante pour faire apparaître $u'(x)$.

Exemple classique

Trouver les primitives de $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$.
On pose $u(x) = x^2 + 1 \implies u'(x) = 2x$.
On remarque qu'il manque un "2" dans $f(x)$.
On réécrit f : $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{2x} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot u'(x) \cdot [u(x)]^{\frac{1}{2}}$
En appliquant la règle $u' \cdot u^r \to \frac{u^{r+1}}{r+1}$ (avec $r = \frac{1}{2}$) :
$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + 1)^3} + c$