Résumé de Cours : Suites Numériques

Prof : SOUHAIL Mohamed | **Lycée Ibnou Batouta**

1. Raisonnement par Récurrence

Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

1. Initialisation :
On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.

2. Hérédité :
Soit $n \geq n_0$. On suppose que $P(n)$ est vraie (Hypothèse de récurrence), et on montre que $P(n+1)$ est vraie.

3. Conclusion :
D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

2. Généralités sur les suites

Suites minorées, majorées, bornées :
- Majorée par M : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$
- Minorée par m : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$
- Bornée : $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$

Monotonie (Sens de variation) :
On étudie le signe de la différence $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$:
- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, (u_n) est **croissante**.
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, (u_n) est **décroissante**.

3. Suites Arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si :

$$u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$$

Terme général (en fonction de n) :
Pour tous entiers n et p : $u_n = u_p + (n-p)r$
Si le premier terme est u_0 : $u_n = u_0 + nr$

Somme des termes consécutifs :
$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (\text{Nbr de termes}) \times \frac{u_p + u_n}{2}$
Avec : Nombre de termes $= n - p + 1$.

4. Suites Géométriques

Une suite (v_n) est géométrique de raison q si :
$v_{n+1} = q \times v_n \iff \frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

Terme général (en fonction de n) :
Pour tous entiers n et p : $v_n = v_p \times q^{n-p}$ Si le premier terme est v_0 : $v_n = v_0 \times q^n$

Somme des termes consécutifs ($q \neq 1$) :

$$S_n = v_p \times \frac{1 - q^{\text{Nbr de termes}}}{1 - q}$$

5. Limites et Convergence

Limite de la suite $(\mathbf{q^n})$:
- Si $\mathbf{q > 1}$: $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $\mathbf{-1 < q < 1}$: $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $\mathbf{q = 1}$: $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $\mathbf{q \leq -1}$: La suite n'a pas de limite.

Limites avec n^p ($p > 0$) :
$\lim_{n \to +\infty} n^p = +\infty \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

Théorèmes de convergence :
- Toute suite **croissante et majorée** est convergente.
- Toute suite **décroissante et minorée** est convergente.

6. Critères d'Encadrement

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

Théorème des Gendarmes : Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim v_n = \lim w_n = l$, alors : $\lim u_n = l$

Limites infinies :
- Si $u_n \geq v_n$ et $\lim v_n = +\infty \implies \lim u_n = +\infty$
- Si $u_n \leq v_n$ et $\lim v_n = -\infty \implies \lim u_n = -\infty$

7. Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Ce théorème est le plus important à l'examen pour déterminer la limite finale d'une suite.
Si les **5 conditions** suivantes sont vérifiées :

1. f est une fonction continue sur un intervalle I.
2. $f(I) \subset I$ (L'image de I est incluse dans I).
3. $u_0 \in I$.
4. (u_n) est convergente (admet une limite l).
5. $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq n_0$.

ALORS : La limite l de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\mathbf{f(l) = l}$

Astuce

Il faut souvent résoudre $f(x) - x = 0$ et choisir la solution l qui appartient à l'intervalle I.

8. Suite auxiliaire $v_n = f(u_n)$

Continuité et limite :
Si la suite (u_n) converge vers une limite l, et si la fonction f est continue au point l, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(l)$$

Méthode

Très souvent, on utilise une suite auxiliaire v_n pour déterminer la limite finale :

1. Montrer que (v_n) est géométrique ou arithmétique.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Isoler u_n pour l'exprimer en fonction de v_n, puis en déduire u_n en fonction de n.
4. Calculer la **limite** de (u_n).