Résumé de Cours : Étude des Fonctions

Prof : SOUHAIL Mohamed | Lycée Ibnou Batouta

1. Parité et Périodicité

Fonction Paire :
Pour tout $x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ et $\mathbf{f(-x) = f(x)}$.
$\Longrightarrow$ La courbe (C_f) est symétrique par rapport à **l'axe des ordonnées.**

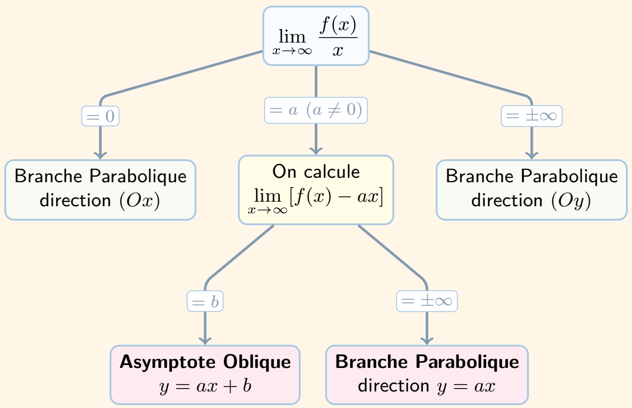
Fonction Impaire :
Pour tout $x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ et $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$.
$\Longrightarrow$ La courbe (C_f) est symétrique par rapport à **l'origine** O.

Fonction Périodique :
f est périodique de période T si :
$x + T \in D_f$ et $\mathbf{f(x + T) = f(x)}$.

2. Asymptotes et Branches Infinies

Asymptotes de base :
- $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow$ **A. Verticale** $x = a$.
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Longrightarrow$ **A. Horizontale** $y = b$.

Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ **(Carte Mentale) :**



3. Centre et Axe de Symétrie

Soit (C_f) la courbe représentative de f.

Axe de symétrie :
La droite $(\Delta) : x = a$ est un axe de symétrie si pour tout $x \in D_f$:

$$(2a - x) \in D_f \quad \text{et} \quad \mathbf{f(2a - x) = f(x)}$$

Centre de symétrie :
Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie si pour tout $x \in D_f$:

$$(2a - x) \in D_f \quad \text{et} \quad \mathbf{f(2a - x) + f(x) = 2b}$$

4. Dérivée Première et Variations

Soit f une fonction dérivable sur I.
- Si $\mathbf{f'(x) > 0}$ sur I, alors f est **strictement croissante**.
- Si $\mathbf{f'(x) < 0}$ sur I, alors f est **strictement décroissante**.
- Si $\mathbf{f'(x) = 0}$ sur I, alors f est constante.

Extremum :
Si $f'(x)$ s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum (maximum ou minimum) en x_0.

Équation de la Tangente

La tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse x_0 a pour équation :
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

5. Concavité et Points d'Inflexion

On étudie le signe de la **dérivée seconde** $f''(x)$:
- Si $\mathbf{f''(x) \geq 0}$, la courbe (C_f) est **Convexe** ($\cup$). Elle est située au-dessus de toutes ses tangentes.
- Si $\mathbf{f''(x) \leq 0}$, la courbe (C_f) est **Concave** ($\cap$). Elle est située en dessous de toutes ses tangentes.

Point d'inflexion :
Si $f''(x)$ **s'annule et change de signe** en x_0, alors le point $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion pour (C_f). (La tangente traverse la courbe).

6. Plan d'Étude d'une Fonction

Pour bien réussir le problème d'analyse (souvent sur 10 points à l'examen), il faut suivre ces étapes :

1. Déterminer D_f et calculer les limites aux bornes.
2. Étudier les branches infinies (Asymptotes / Branches paraboliques) grâce à la carte mentale.
3. Calculer $f'(x)$, étudier son signe, et dresser le tableau de variations.
4. Calculer $f''(x)$, étudier la concavité et les points d'inflexion.
5. Déterminer les points d'intersection avec les axes (résoudre $f(x) = 0$ et calculer $f(0)$).
6. Tracer les asymptotes, les tangentes, puis la courbe (C_f).