Résumé de Cours : Dérivation et Applications

Prof : SOUHAIL Mohamed | Lycée Ibnou Batouta

1. Dérivabilité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
f est **dérivable en** a si : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$
Le nombre l est appelé **nombre dérivé** de f en a, noté $\mathbf{f'(a)}$.
Dérivabilité à droite et à gauche :
f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite ($f'_d(a)$) et à gauche ($f'_g(a)$) et :

$$\mathbf{f'_d(a) = f'_g(a)}$$

2. Interprétations Géométriques

Tangente à la courbe :
Si f est dérivable en a, alors (C_f) admet une tangente au point d'abscisse a : (T) : $\mathbf{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$ *Si* $f'(a) = 0 \implies$ Tangente **horizontale**.
Demi-tangentes verticales :

La limite	**Interprétation géométrique**
$\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$	(C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$ à droite de $A(a; f(a))$ dirigée vers le **haut**.
$\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$	(C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$ à droite de $A(a; f(a))$ dirigée vers le **bas**.
$\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$	(C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$ à gauche de $A(a; f(a))$ dirigée vers le **bas**.
$\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$	(C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$ à gauche de $A(a; f(a))$ dirigée vers le **haut**.

3. Tableau des Dérivées Usuelles

Fonction	**Dérivée**	**Intervalle**
k	0	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$1/x$	$-1/x^2$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2 x$	D_{tan}

4. Opérations sur les Dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.

— $(u+v)' = u' + v'$
— $(k \cdot u)' = k \cdot u'$
— $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
— $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
— $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
— $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$
— $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

5. Dérivée de la Fonction Réciproque

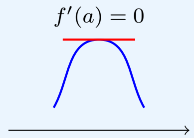
Si f est continue et strictement monotone sur I, elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et : $\mathbf{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}}$ Formule générale pour tout $x \in J$: $\mathbf{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' o f^{-1}(x)}}$

6. Dérivée et Variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Monotonie :
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est **croissante**.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est **décroissante**.
- Si $f'(x) = 0$, alors f est **constante**.

Extremums relatifs :
Si f' **s'annule en** a **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local (maximum ou minimum) de f.



7. Dérivée de la composée

Règle de la chaîne :
Si v est dérivable sur I et u est dérivable sur $v(I)$, alors $f = u \circ v$ est dérivable sur I et :

$$\mathbf{(u \circ v)'(x) = v'(x) \cdot u'(v(x))}$$

Exemple : Fonctions trigo.

$(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$
$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$