

Résumé de Cours : Géométrie dans l'espace

Prof : **SOUHAIL Mohamed**

Lycée Ibnou Batouta

Repère Orthonormé & Colinéarité

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé.

Colinéarité : $\vec{U}(x, y, z)$ et $\vec{V}(x', y', z')$.

\vec{U} et \vec{V} colinéaires $\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : \vec{U} = \alpha \vec{V}$

$\iff \Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}; \Delta_y = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}; \Delta_z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Vecteurs Coplanaires

\vec{U}, \vec{V} et \vec{W} coplanaires $\iff \det(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = 0$

$$\det = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

Exemple

$\vec{U}(1, 0, 0), \vec{V}(0, 1, 0), \vec{W}(2, 3, 0)$.

$\det(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = 1(0) - 0 + 0 = 0$.

Les vecteurs sont coplanaires (ils appartiennent au plan (Oxy)).

Norme, Distance et Milieu

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$I \text{ milieu de } [AB] : I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Exemple

$A(1, 2, -1)$ et $B(1, -2, 2)$.

$$AB = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

Milieu $I(1, 0, \frac{1}{2})$.

Produit Scalaire

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times \cos(\vec{U}, \vec{V})$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = xx' + yy' + zz'$$

$$\vec{U} \perp \vec{V} \iff \vec{U} \cdot \vec{V} = 0$$

Droite dans l'espace

(D) passe par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur dir. $\vec{U}(a, b, c)$.

$$(D) : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Exemple

(D) passe par $A(1, -1, 0)$ et dirigée par $\vec{U}(2, 1, -3)$.

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Plan dans l'espace

- Equation : $(P) : ax + by + cz + d = 0$

- $\vec{n}(a, b, c)$ est le vecteur normal à (P) .

Exemple

Déterminer (P) passant par $A(0, 1, 2)$ de vecteur normal $\vec{n}(1, -2, 1)$.

L'équation est : $1x - 2y + 1z + d = 0$.

$$A \in (P) \implies 0 - 2(1) + 2 + d = 0 \implies d = 0.$$

Donc $(P) : x - 2y + z = 0$.

Position relative : Plan et Droite

(D) de vec dir. \vec{U} , (P) de vecteur normal \vec{n} .

- $(P) \perp (D) \iff \vec{n}$ et \vec{U} colinéaires

- $(P) \parallel (D) \iff \vec{n} \cdot \vec{U} = 0$

Exemple

$(P) : x + y - z = 0$ et (D) dirigée par $\vec{U}(1, 1, 2)$.

$\vec{n}(1, 1, -1)$ est normal à (P) .

$$\vec{n} \cdot \vec{U} = (1)(1) + (1)(1) + (-1)(2) = 0.$$

Donc (D) est parallèle à (P) .

Distance d'un point à un plan

$$d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Produit Vectoriel \wedge

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

- \vec{U}, \vec{V} colinéaires $\iff \vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

- Aire triangle : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

- Distance point-droite : $d(\Omega, (D)) = \frac{\|\vec{U} \wedge \vec{A}\Omega\|}{\|\vec{U}\|}$

Exemple

Distance point-droite :

$M(1, 0, 0)$ et (D) passant par $O(0, 0, 0)$ dirigée par $\vec{k}(0, 0, 1)$.

$$O\vec{M} \wedge \vec{k} = (1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, -1, 0).$$

$$d(M, (D)) = \frac{\|O\vec{M} \wedge \vec{k}\|}{\|\vec{k}\|} = \frac{1}{1} = 1.$$

Sphère dans l'espace

À partir du centre et rayon :

(S) de centre $\Omega(a, b, c)$ et rayon R :
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

À partir d'un diamètre $[AB]$:

$M \in (S) \iff \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$

Équation générale :

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$
 est une sphère si $D = a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$.

Exemple

Équation par diamètre $[AB]$:

Soient $A(1, 0, -1)$ et $B(3, 2, 1)$.
 Centre Ω milieu de $[AB]$: $\Omega(2, 1, 0)$.
 Rayon $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{2} = \sqrt{3}$.
 (S) : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3$

Exemple

Trouver Ω et R (Éq. Générale) :

(S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$
 $\iff (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + z^2 = 0$
 $\iff (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 5$
 Centre $\Omega(1, -2, 0)$ et Rayon $R = \sqrt{5}$.

Équation cartésienne par diamètre

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

La sphère (S) de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant : $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ En utilisant les coordonnées, l'équation cartésienne s'écrit directement :

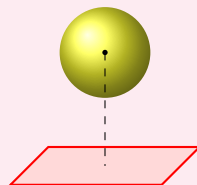
$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

Remarque : Le centre Ω est le milieu de $[AB]$ et le rayon est $R = \frac{AB}{2}$.

Position relative : Sphère et Plan

On calcule $d = d(\Omega, (P))$ et on compare avec R .

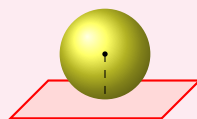
1) $d > R$: **L'intersection est vide**



Exemple

(S) centre $O(0, 0, 0)$, $R = 1$. (P) : $z = 2$.
 $d(O, (P)) = 2$. Comme $2 > 1$, pas d'intersection.

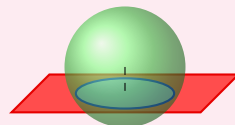
2) $d = R$: (P) est tangent en H



Exemple

(S) centre $O(0, 0, 0)$, $R = 3$.
 (P) : $x + y + z - 3\sqrt{3} = 0$.
 $d = \frac{|-3\sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = 3 = R$. (P) est tangent.

3) $d < R$: (P) coupe (S) suivant un cercle



Rayon du cercle : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Exemple

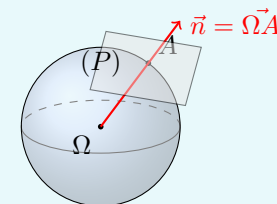
(S) centre $O(0, 0, 0)$, $R = 3$. (P) : $x + 2y + 2z - 6 = 0$.
 $d = \frac{|-6|}{\sqrt{1+4+4}} = 2$.
 $d = 2 < R = 3$, coupe selon un cercle de rayon
 $r = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

Plan tangent à une sphère

Soit (S) une sphère de centre Ω et A un point appartenant à (S).

Le plan tangent à la sphère (S) au point A est le plan (P) passant par A et dont le vecteur normal est $\vec{n} = \vec{\Omega A}$.

$$M \in (P) \iff \vec{AM} \cdot \vec{\Omega A} = 0$$



Exemple

Exemple : Soit (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 3 = 0$ et $A(0, 2, 1)$.

- On vérifie que $A \in (S)$:
 $0^2 + 2^2 + 1^2 - 2(1) - 3 = 4 + 1 - 2 - 3 = 0$. (Vrai)
- Centre de la sphère : $\Omega(0, 0, 1)$.
- Vecteur normal : $\vec{\Omega A}(0 - 0, 2 - 0, 1 - 1)$
 $\implies \vec{n}(0, 2, 0)$.
- Équation de (P) : $0(x - 0) + 2(y - 2) + 0(z - 1) = 0$
 $\iff 2y - 4 = 0 \iff y = 2$.

Représentation paramétrique d'une sphère

Soit (S) une sphère de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon R .

Une représentation paramétrique de la sphère (S) est donnée par le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x = x_\Omega + R \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ y = y_\Omega + R \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ z = z_\Omega + R \sin(\varphi) \end{cases}$$

Où les paramètres θ et φ vérifient :
 $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$