Résumé de Cours : Équations Différentielles

Prof : SOUHAIL Mohamed | Lycée Ibnou Batouta

1. Équations du 1er ordre

Équation de la forme $y' = ay$:
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions :

$$y(x) = ke^{ax} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Équation de la forme $y' = ay + b$:
(avec $a \neq 0$)
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions :

$$y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

2. Équations du 2nd ordre

Forme générale :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

(avec $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$)

L'équation caractéristique :
À cette équation différentielle, on associe l'équation du second degré suivante :

$$ar^2 + br + c = 0$$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
Les solutions de l'équation différentielle dépendent uniquement du signe de Δ.

3. Cas $\Delta > 0$

L'équation caractéristique admet **deux solutions réelles** distinctes : $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Les solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$$

où α et β sont des constantes réelles.

4. Cas $\Delta = 0$

L'équation caractéristique admet **une seule solution réelle** double : $r_0 = \frac{-b}{2a}$
Les solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$$

où α et β sont des constantes réelles.

5. Cas $\Delta < 0$

L'équation caractéristique admet **deux solutions complexes conjuguées** : $r_1 = p + iq$; $r_2 = p - iq$
Avec $p = \frac{-b}{2a}$ et $q = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
Les solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px}$$

où α et β sont des constantes réelles.

6. Conditions Initiales

Les constantes réelles (k ou α, β) se déterminent à l'aide des conditions initiales données dans l'énoncé.

Exemple : $y' = ay + b$

Résoudre $y' = 2y - 6$ avec $y(0) = 4$.
1. **Solution générale :** $(a = 2, b = -6)$
$y(x) = ke^{2x} - \frac{-6}{2} = ke^{2x} + 3$
2. **Condition initiale :** $y(0) = 4$
$ke^0 + 3 = 4 \implies k + 3 = 4 \implies k = 1$
3. **Solution particulière :**

$$y(x) = e^{2x} + 3$$

Examen : 2nd ordre

Pour l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, on vous donne souvent deux conditions, par exemple $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$, pour trouver α et β.
Attention : N'oubliez pas de calculer la dérivée $y'(x)$ de votre solution générale avant d'utiliser la deuxième condition !