

Résumé de Cours : Limites et Continuité

Prof : **SOUHAIL Mohamed** | Lycée Ibnou Batouta

1. Continuité en un point

f est **continue** en x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Continuité à droite et à gauche :

f est continue en x_0 ssi elle est continue à droite et à gauche : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

8. Continuité sur un intervalle

- f est continue sur $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$.

- f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et à gauche en b .

Continuité des fonctions usuelles :

1. Toute fonction **polynôme** est continue sur \mathbb{R} .
2. Toute fonction **rationnelle** est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.
3. Les fonctions sin et cos sont continues sur \mathbb{R} .
4. La fonction tan est continue sur chaque intervalle de son domaine $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$.
5. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

9. Opérations sur les fonctions continues

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I , alors :

- $f + g$, $f - g$ et $f \times g$ sont continues sur I .
- λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) est continue sur I .
- $|f|$ et f^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues sur I .
- $\frac{f}{g}$ et $\frac{1}{g}$ sont continues sur I (si $g(x) \neq 0$ sur I).
- \sqrt{f} est continue sur I (si $f(x) \geq 0$ sur I).

Continuité de la composée :

Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .

2. Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Cas particulier (Existence de solution) :

Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Cas d'unicité (Bijection) :

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur $[a, b]$, alors Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution.

3. Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction **continue**.

Intervalle I	f croissante	f décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b[$	$] \lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$	$] \lim_{b^-} f, \lim_{a^+} f[$

4. Fonction Réciproque f^{-1}

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur I , alors elle réalise une bijection de I vers $J = f(I)$.

Propriétés de f^{-1} :

1. f^{-1} est continue sur J .
2. f^{-1} a le **même sens de variation** que f .
3. Courbes : $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (1ère bissectrice).

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \iff \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases}$$

5. Racine n -ième $\sqrt[n]{x}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ . Sa réciproque est la fonction racine n -ième : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Propriétés ($x, y \geq 0$) :

- $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$
- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n^2]{x}$
- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$

Limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

6. Opérations et Compositions

Somme, produit, quotient : La continuité se conserve par ces opérations (attention au dénominateur $\neq 0$).

Composition : Si f est continue sur I et g est continue sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

Calcul de Limite

Si f est continue en L et $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = L$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = f(L)$$

7. Étapes pour $f(x) = 0$

Pour montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a, b[$:

1. Vérifier la **continuité** de f sur $[a, b]$.
2. Calculer $f(a)$ et $f(b)$ et vérifier que $f(a) \times f(b) < 0$.
3. Montrer que f est **strictement monotone** (calcul de f').