Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3, \qquad u_{n+1} = \frac{7u_n - 4}{u_n + 2}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que : $1 < u_n < 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 4)}{u_n + 2}$$

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 1}$.
   a) Calculer v_0, v_1 et v_2.
   b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.
   c) Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire que :

$$u_n = \frac{2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4}{2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1}$$

6. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + 2\sqrt{5}z + 20 = 0$$

2. Soit z_1 la solution telle que $\mathrm{Im}(z_1) > 0$. Donner la forme trigonométrique de z_1 et de $\overline{z_1}$.
3. Résoudre l'équation : $z - z_2 = z \cdot e^{-\frac{\pi}{3}}$.
4. Soient les points $D(z_1)$, $E(\overline{z_1})$ et $F(-2\sqrt{5})$. Que peut-on dire du triangle OEF ?
5. Soit T la translation de vecteur $\vec{u}(3\sqrt{5})$.
   a) Donner l'écriture complexe de T.
   b) Déterminer G, l'image de D par T.
6. Soit h l'homothétie de centre I et de rapport $k = 3$.
   a) Donner l'écriture complexe de h.
   b) Déterminer l'image de F par h.
7. Soit R la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   a) Donner l'écriture complexe de R.
   b) Donner J, l'image de E par R.
8. Placer les points D, E, F et I dans un repère orthonormé tel que $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$.

Exercice 3

Soient les points $A(-1,0,1)$, $B(-3,0,0)$ et $C(1,1,0)$, et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 2 = 0$$

1. Déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que l'équation du plan (ABC) est :

$$x - 2y + 2z + 3 = 0$$

3. Montrer que le centre de (S) est $\Omega(1,1,1)$ et que son rayon est $R = 2$.
4. Calculer la distance $d(\Omega, (ABC))$.

5. En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle, et déterminer son rayon r.
6. Donner la représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par Ω et orthogonale au plan (ABC).
7. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC).

Exercice 4

On considère une urne contenant des boules numérotées. On tire simultanément 2 boules.

1. Donner la probabilité des événements suivants :
   - A : Les deux boules portent des nombres impairs.
   - B : Les deux boules portent des nombres premiers.
   - C : Le produit des deux nombres est égal à 12.
   - D : La somme des deux nombres est égale à 8.
   - E : Les deux boules portent le même numéro.
2. On répète cette expérience 4 fois de façon indépendante. Soit X le nombre de fois où l'événement E est réalisé.
   a) Donner la nature (la loi) de X.
   b) Donner la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathbb{V}(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 5 : Problème

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (-x^2+3x-1)e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\ln^2 x - 3\ln x - 3}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f au point $a = 0$.
2. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.
4. Montrer que pour tout $x > 0$: $\dfrac{\ln^2 x}{x} = 4\left(\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$.
5. En déduire $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, puis interpréter graphiquement.
6. Montrer que la fonction dérivée f' est définie par :

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2-5x+4)e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln x\,(\ln x - 5)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

7. En déduire la monotonie de f sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$.
8. Montrer que la dérivée seconde f'' est donnée par :

$$f''(x) = \begin{cases} (-x^2+7x-9)e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2\ln^2 x - 15\ln x + 5}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

9. Donner le tableau de convexité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et déterminer les points d'inflexion.
10. Donner l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $a = -1$.
11. Vérifier que $F(x) = \dfrac{\ln^3 x}{3} - \dfrac{3\ln^2 x}{2} - 3\ln x$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
12. Sachant que $f(x) \leq 0$ sur $[-1, 0]$, calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} |f(x)|\,dx$.
13. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la tangente au point d'abscisse -1.