Exercice 1 : Suite homographique

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_0 = 0 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1. *Calculer* u_1 *et* u_2*.*
2. *Montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $0 < u_n < 1$*.*
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+1)}{u_n+2}$*.*
4. *En déduire le sens de variation de la suite* (u_n) *et prouver sa convergence.*
5. *On considère la suite auxiliaire* (v_n) *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par :* $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$*.*
   (a) *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique dont on précisera la raison* q *et le premier terme* v_0*.*
   (b) *Exprimer* v_n *en fonction de* n*.*
6. *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$*.*
7. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} u_n$*.*

Exercice 2 : Suite avec expression sous radical

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$u_0 = 1 \quad et \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{2u_n^2+1}} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. *Calculer le terme* u_1*.*
2. *Montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_n > 0$*.*
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{-2u_n^4}{2u_n^2+1}$*.*
4. *En déduire le sens de variation de la suite* (u_n) *et prouver sa convergence.*
5. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $v_n = \frac{1}{u_n^2}$*.*
   (a) *Montrer que* (v_n) *est une suite arithmétique dont on précisera la raison* r *et le premier terme* v_0*.*
   (b) *Exprimer* v_n *en fonction de* n*.*
6. *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$*.*
7. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} u_n$*.*

Exercice 3 : Suite homographique

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$u_0 = 3 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. *Calculer* u_1 *et* u_2*.*
2. *Montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_n > 1$*.*
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+3}$*.*
4. *En déduire que la suite* (u_n) *est strictement décroissante et qu'elle converge.*
5. *On considère la suite* (v_n) *définie par* $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
   (a) *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $q = \frac{1}{4}$*.*
   (b) *Calculer* v_0 *puis exprimer* v_n *en fonction de* n*.*
6. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$*.*
7. *En déduire la limite de la suite* (u_n)*.*

Exercice 4 : Suite avec logarithme et exponentielle

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$u_0 = e^2 \quad et \quad u_{n+1} = \sqrt{e \cdot u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. *Calculer* u_1 *et* u_2 *en fonction de* e*.*
2. *Montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_n > e$*.*
3. *Montrer que la suite* (u_n) *est strictement décroissante.*
4. *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*
5. *On considère la suite* (v_n) *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par :* $v_n = \ln(u_n) - 1$*.*
   (a) *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $q = \frac{1}{2}$ *et calculer* v_0*.*
   (b) *Exprimer* v_n *en fonction de* n*.*
6. *Exprimer* u_n *en fonction de* n *et déterminer* $\lim_{n\to+\infty} u_n$*.*

Exercice 5 : Équation de plan, Distance et Intersection Sphère-Plan

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *on considère les points* $A(2, 1, 1)$, $B(1, -1, 3)$ *et* $C(0, 1, 3)$, *ainsi que la sphère* (S) *d'équation générale :*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$$

1. *Déterminer les coordonnées des vecteurs* $\vec{AB}$ *et* $\vec{AC}$.
2. *Calculer le produit vectoriel* $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
3. *En déduire que les points* A, B *et* C *ne sont pas alignés, et montrer qu'une équation cartésienne du plan* (ABC) *est :* $2x - y - z - 2 = 0$.
4. *Déterminer le centre* Ω *et le rayon* R *de la sphère* (S).
5. *Calculer la distance* $d(\Omega, (ABC))$ *du point* Ω *au plan* (ABC).
6. *Montrer que le plan* (ABC) *coupe la sphère* (S) *selon un cercle* (Γ).
7. *Déterminer le rayon* r *du cercle* (Γ) *et donner une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par* Ω *et orthogonale au plan* (ABC).

Exercice 6 : Positions relatives, Tangence et Équations paramétriques

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *on considère la droite* (D) *définie par la représentation paramétrique :*
$(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ *et la sphère* (S) *de centre* $\Omega(1, 2, 0)$ *et de rayon* $R = 3$.

1. *Donner un point* A *appartenant à* (D) *et un vecteur directeur* $\vec{u}$ *de* (D).
2. *Déterminer l'équation cartésienne de la sphère* (S).
3. *Calculer le produit vectoriel* $\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}$.
4. *En déduire la distance* $d(\Omega, (D))$ *entre le centre de la sphère et la droite* (D).
5. *Justifier la position relative de la droite* (D) *par rapport à la sphère* (S).
6. *Déterminer les coordonnées des points d'intersection de* (D) *et* (S).
7. *Trouver l'équation cartésienne du plan* (P) *passant par* Ω *et orthogonal à la droite* (D).

Exercice 7 : Plans parallèles et Projection orthogonale

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *on donne la sphère* (S) *de centre* $\Omega(0, 1, -2)$ *et de rayon* $R = 3$, *et le plan* (P) *d'équation cartésienne :* $x + 2y - 2z + 2 = 0$.

1. *Vérifier que le point* $M(2, -1, 1)$ *appartient au plan* (P).
2. *Calculer la distance* $d(\Omega, (P))$.
3. *En déduire la position relative du plan* (P) *et de la sphère* (S).
4. *Soit* (Δ) *la droite passant par* Ω *et perpendiculaire à* (P).
   (a) *Donner un vecteur directeur de* (Δ).
   (b) *Établir une représentation paramétrique de* (Δ).
5. *Déterminer les coordonnées du point* H, *projeté orthogonal de* Ω *sur le plan* (P).
6. *Déterminer les équations cartésiennes des deux plans* (P_1) *et* (P_2) *parallèles à* (P) *et tangents à la sphère* (S).

Exercice 8 : Diamètre d'une sphère et orthogonalité

On considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(3, 3, -1)$ *et* $C(0, 2, 3)$ *dans un repère orthonormé direct.*

1. *Déterminer les coordonnées du point* I, *milieu du segment* $[AB]$.
2. *Calculer la distance* AB, *puis en déduire le rayon de la sphère* (S) *de diamètre* $[AB]$.
3. *Montrer que l'équation cartésienne de la sphère* (S) *est :* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 5 = 0$.

4. *Calculer le produit scalaire* $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.
5. *En déduire la position du point* C *par rapport à la sphère* (S) *(intérieur, extérieur ou sur la sphère).*
6. *Donner une représentation paramétrique de la droite* (BC).
7. *Déterminer les points d'intersection de la droite* (BC) *avec la sphère* (S).

Exercice 9 : Tirage simultané et Variable aléatoire

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher répartie de la façon suivante :

- *4 boules rouges portant les numéros : 1, 2, 2, 3.*
- *6 boules noires portant les numéros : 1, 1, 2, 2, 3, 3.*

On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

1. *Déterminer le nombre de tirages possibles (cardinal de l'univers* Ω*).*
2. *Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur.*
3. *Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules portant des numéros pairs.*
4. *Soit* X *la variable aléatoire qui égale au nombre de boules rouges tirées.*
   (a) *Déterminer l'ensemble des valeurs prises par* X.
   (b) *Montrer que* $P(X = 1) = \frac{1}{2}$.
   (c) *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire* X *(présenter le résultat sous forme de tableau).*
5. *Calculer l'espérance mathématique* $E(X)$.

Exercice 10 : Tirage successif sans remise et probabilité conditionnelle

Un sac contient 8 jetons indiscernables au toucher :

- *3 jetons blancs portant la lettre "A".*
- *2 jetons blancs portant la lettre "B".*
- *3 jetons rouges portant la lettre "A".*

On tire successivement et sans remise 2 jetons du sac.

1. *Quel est le nombre total de choix possibles ?*
2. *Calculer la probabilité de l'événement* W *: "Obtenir deux jetons blancs".*
3. *Calculer la probabilité de l'événement* M *: "Obtenir deux jetons portant la même lettre".*
4. *Calculer la probabilité de l'événement* $W \cap M$.
5. *Les événements* W *et* M *sont-ils indépendants ? Justifier.*
6. *Calculer la probabilité conditionnelle* $P_M(W)$.
7. *Calculer la probabilité d'obtenir au moins un jeton rouge.*

Exercice 11 : Tirage successif avec remise et produit de numéros

Une boîte contient 6 cartes indiscernables portant les nombres suivants :

$$-1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2$$

On tire au hasard et successivement avec remise 2 cartes de la boîte.

1. *Déterminer le nombre de tirages possibles.*
2. *Calculer la probabilité d'obtenir deux cartes portant le même nombre.*
3. *Calculer la probabilité que la première carte tirée porte un nombre strictement négatif.*
4. *Soit* Y *la variable aléatoire égale au produit des nombres inscrits sur les deux cartes tirées.*
   (a) *Déterminer* $Y(\Omega)$.
   (b) *Montrer que* $P(Y = 0) = \frac{3}{4}$.
   (c) *Déterminer la loi de probabilité de* Y.
5. *Calculer l'espérance mathématique* $E(Y)$.

Exercice 12 : Schéma de Bernoulli et Loi Binomiale

On lance un dé truqué à 6 faces. La probabilité d'obtenir la face numéro 6 lors d'un lancer est égale à $p = \frac{1}{3}$. On répète cette expérience 4 fois de manière indépendante.

1. *Quelle est la probabilité d'échouer (ne pas obtenir la face 6) à un lancer ?*
2. *Calculer la probabilité d'obtenir la face 6 exactement deux fois.*
3. *Calculer la probabilité d'obtenir la face 6 au moins une fois.*
4. *Soit Z la variable aléatoire désignant le nombre de fois où la face 6 est apparue.*
   (a) *Reconnaitre la loi de la variable aléatoire Z en donnant ses paramètres.*
   (b) *Donner l'expression générale de $P(Z = k)$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.*
   (c) *Calculer $P(Z \leq 3)$.*
5. *Calculer l'espérance mathématique $E(Z)$.*

Exercice 13 : Résolution, forme exponentielle et puissance complexe

1. *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :*
$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$$
2. *On pose $a = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.*
   (a) *Calculer le module $|a|$ et déterminer un argument de a.*
   (b) *Écrire le nombre a sous sa forme exponentielle.*
   (c) *Soit $b = \bar{a}$ le conjugué de a. Donner la forme exponentielle de b.*
3. *Calculer la valeur complexe du rapport $\frac{a}{b}$, puis en déduire sous forme algébrique la valeur de la puissance :*
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2026}$$
4. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $c = 2\sqrt{2}$.*
   (a) *Écrire le rapport $\frac{c-a}{b-a}$ sous forme algébrique.*
   (b) *Déterminer le module et un argument de ce rapport, puis en déduire la nature du triangle ABC.*

Exercice 14 : Homothétie, Rotation et Alignement

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$.*
2. *On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2+2i$, $b = 2 - 2i$ et $c = 4$.*
   (a) *Placer les points dans le plan complexe.*
   (b) *Écrire le nombre $\frac{a}{c}$ sous forme trigonométrique.*
3. *Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et soit h l'homothétie de centre A et de rapport $k = 3$.*
   (a) *Donner l'expression complexe de la rotation R.*
   (b) *Soit D l'image du point B par la rotation R. Déterminer l'affixe d du point D.*
   (c) *Soit E l'image du point C par l'homothétie h. Déterminer l'affixe e du point E.*
4. *Étudier l'alignement des points A, D et E.*

Exercice 15 : Transformations complexes et configurations géométriques

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = i, \quad b = 1 + 2i, \quad c = 2 + i \quad \text{et} \quad d = 1$$

1. *Calculer les distances AB et CD.*
2. *Déterminer l'affixe des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.*
3. *Calculer le rapport $\frac{c-a}{b-d}$ sous sa forme algébrique.*
4. *En déduire que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires. Que peut-on conclure pour $ABCD$?*