

## 1) Suites numériques (3 points)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 4$  et

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1 + u_n} \text{ pour tout entier naturel } n$$

- 1) a) Vérifier que  $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+u_n}$  pour tout entier naturel  $n$ . (0.25 pt)  
b) Montrer par récurrence que  $2 \leq u_n \leq 4$  pour tout entier naturel  $n$ . (0.5 pt)
- 2) a) Montrer que  $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n}$  pour tout entier naturel  $n$ . (0.25 pt)  
b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et en déduire que  $(u_n)$  est convergente. (0.5 pt)
- 3) Soit  $(v_n)$  la suite numérique définie par :  $v_n = \frac{2-u_n}{1-u_n}$  pour tout entier naturel  $n$ .  
a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$ . (0.5 pt)  
b) Montrer que  $u_n = 1 + \frac{1}{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}$  pour tout entier naturel  $n$ . (0.5 pt)  
c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ . (0.25 pt)

## 2) Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux points  $A(-1, 0, -1)$  et  $B(1, 2, -1)$ , le plan  $(P)$  passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}(2, -2, 1)$  et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(2, -1, 0)$  et de rayon 5.

- 1) Montrer que  $2x - 2y + z + 3 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(P)$ . (0.5 pt)
- 2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère  $(S)$ . (0.25 pt)

- 3) a) Vérifier que la distance du point  $\Omega$  au plan  $(P)$  est  $d(\Omega, (P)) = 3$ . (0.5 pt)  
b) En déduire que le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(\Gamma)$  de rayon à déterminer. (0.5 pt)
- 4) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par  $\Omega$  et perpendiculaire au plan  $(P)$ . (0.5 pt)  
b) Montrer que le point  $H(0, 1, -1)$  est le centre du cercle  $(\Gamma)$ . (0.5 pt)  
c) Montrer que la droite  $(\Delta)$  est une médiatrice du segment  $[AB]$ . (0.5 pt)

## 3) Nombres complexes (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a = \sqrt{3}(1 - i)$  et  $b = 2 + \sqrt{3} + i$ .

- 1) Vérifier que  $|a| = \sqrt{6}$  et que  $\arg(a) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ . (0.75 pt)
- 2) a) Montrer que  $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$  puis vérifier que  $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ . (0.75 pt)  
b) En déduire une forme trigonométrique du complexe  $b$  puis vérifier que  $b^{24}$  est un nombre réel. (0.5 pt)
- 3) Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ , qui transforme chaque point  $M$  du plan d'affixe  $z$  en un point  $M'$  d'affixe  $z'$ . On pose  $R(B) = B'$ ,  $R(A) = A'$  et  $R(A') = A''$ .  
a) Vérifier que  $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$  et que  $\arg(a') \equiv -\frac{\pi}{12} [2\pi]$  où  $a'$  est l'affixe du point  $A'$ . (0.5 pt)  
b) Montrer que l'affixe du point  $A''$  est  $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$  et en déduire que les points  $O$ ,  $A''$  et  $B$  sont alignés. (0.5 pt)  
c) Montrer que  $b'$ , l'affixe du point  $B'$ , vérifie  $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$ . (0.5 pt)

- d) En déduire que le triangle  $OAB'$  est rectangle en  $O$ . (0.5 pt)

## Partie II :

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$ .

### 4) Calcul des probabilités (2 points)

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

- 1) Montrer que  $p(A) = \frac{1}{3}$ , où  $A$  est l'événement « les deux boules tirées portent le même numéro ». (0.5 pt)
- 2) Montrer que  $p(B) = \frac{5}{21}$ , où  $B$  est l'événement « la somme des numéros des boules tirées est 4 ». (0.5 pt)
- 3) Calculer  $p(A \cap B)$ . (0.5 pt)
- 4) Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ? Justifier. (0.5 pt)

### 5) Étude de fonctions numériques et calcul intégral (8 points)

#### Partie I :

On considère les deux fonctions  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = e^x$  et  $v(x) = x$ .

- 1) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes  $(C_u)$  et  $(C_v)$  des fonctions  $u$  et  $v$ . (0.5 pt)
- 2) Justifier graphiquement que  $e^x - x > 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ . (0.25 pt)
- 3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C_u)$ , la courbe  $(C_v)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ . (0.5 pt)

- 1) a) Vérifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . (0.25 pt)
- b) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$ . (0.5 pt)
- c) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , puis interpréter géométriquement ce résultat. (0.5 pt)
- 2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . (0.25 pt)
- b) Vérifier que pour tout  $x < 0$ ,  $f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$ . (0.5 pt)
- c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ , puis en déduire que la courbe  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = x$  au voisinage de  $-\infty$ . (0.75 pt)
- 3) a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{1-x}{e^x-x}$ . (0.5 pt)
- b) Étudier le signe de la fonction dérivée de  $f$ , puis déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . (0.5 pt)
- c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $] -1, 0[$ . (0.75 pt)
- 4) La courbe  $(C_f)$  est la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé.
  - a) Justifier graphiquement que l'équation  $f(x) = x$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$ . (0.5 pt)
  - b) Montrer que :  $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$ . (0.5 pt)
- 5) Soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I = ] -\infty, 1[$ .
  - a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer  $g^{-1}(x)$ ). (0.5 pt)
  - b) Vérifier que  $g^{-1}$  est dérivable en 1 et calculer  $(g^{-1})'(1)$ . (0.75 pt)