# Correction Éléments de Corrigé

## Examen Blanc nř 2 (2025 - 2026)

### Filière : Sciences Expérimentales (PC et SVT)

---

## Exercice 1 : Suites numériques (4 points)

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2+u_n}$.

**1) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$ :**

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{3}$. On a bien $0 < \frac{1}{3} < 1$, donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 < u_n < 1$ (hypothèse de récurrence) et montrons que $0 < u_{n+1} < 1$.
  - Puisque $u_n > 0$, on a $3u_n > 0$ et $2 + u_n > 0$, donc par quotient, $u_{n+1} > 0$.
  - Étudions la différence $1 - u_{n+1}$ :

$$1 - u_{n+1} = 1 - \frac{3u_n}{2 + u_n} = \frac{2 + u_n - 3u_n}{2 + u_n} = \frac{2(1 - u_n)}{2 + u_n}$$

    D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n < 1$ d'où $1 - u_n > 0$. De plus $2 + u_n > 0$. Par conséquent, $1 - u_{n+1} > 0$, soit $u_{n+1} < 1$.
- **Conclusion :** Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

**2) a. Montrons que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(1 - u_n)}{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ :**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{2 + u_n} - u_n = \frac{3u_n - u_n(2 + u_n)}{2 + u_n} = \frac{3u_n - 2u_n - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{u_n - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{u_n(1 - u_n)}{2 + u_n}$$

**b. Déduisons-en la monotonie de $(u_n)$ :** Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, on a : $u_n > 0$, $1 - u_n > 0$ et $2 + u_n > 0$. Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est donc strictement positif. Ainsi, la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

**3) Convergence et limite de $(u_n)$ :** La suite $(u_n)$ est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente vers une limite $L$. La fonction $g(x) = \frac{3x}{2+x}$ est continue sur $[0, 1]$, donc $L$ vérifie l'équation $g(L) = L$ :

$$L = \frac{3L}{2 + L} \iff L(2 + L) = 3L \iff 2L + L^2 - 3L = 0 \iff L^2 - L = 0 \iff L(L - 1) = 0$$

Puisque $u_0 = \frac{1}{3}$ et que la suite est croissante, on a $L \geq \frac{1}{3}$. Donc $L \neq 0$, ce qui implique $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

**4) a. Montrons que $w_n = v_n - 1$ est une suite géométrique (avec $v_n = \frac{1}{u_n}$) :**

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2+u_n}{3u_n} = \frac{2}{3u_n} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}$$

Exprimons $w_{n+1}$ en fonction de $w_n$ :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(v_n - 1) = \frac{2}{3}w_n$$

Ainsi, $(w_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$. Son premier terme est $w_0 = v_0 - 1 = \frac{1}{u_0} - 1 = 3 - 1 = 2$.

**b. Exprimons $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$ :** Puisque $(w_n)$ est géométrique : $w_n = w_0 \times q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Comme $w_n = v_n - 1$, on a $v_n = w_n + 1 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$. Enfin, $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$.

**5) Calcul de $T_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$ et sa limite :** $T_n$ est la somme de $n+1$ termes d'une suite géométrique :

$$T_n = w_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = 2\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 2\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = 6\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} T_n = 6$.

**6) Expression de $\ln(P_n)$ et calcul de sa limite :** On a $P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$, donc :

$$\ln(P_n) = \ln(u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) = \sum_{k=0}^{n} ln\left(\frac{1}{v_k}\right) = -\sum_{k=0}^{n} \ln(v_k)$$

Quand $n \to +\infty$, $u_n \to 1$, donc $\ln(u_n) \to \ln(1) = 0$. Cependant, pour trouver la limite de $P_n$, utilisons plutôt l'expression directe : puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$, par produit infini ou composition, étudions le comportement. En passant par la limite de chaque terme, comme $\lim u_n = 1$, le terme général ne tend pas vers 0 en log. Plus simplement : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$, donc $\ln(v_k) \sim v_k - 1 = w_k$. Comme $\sum w_k$ converge vers 6, la série $\sum \ln(v_k)$ converge également. Autre méthode : $\lim_{n\to+\infty} P_n$ : puisque $u_n = \frac{1}{1+w_n}$, on a $\ln(P_n) = -\sum_{k=0}^{n} \ln(1+w_k)$. Quand $n \to +\infty$, par continuité, $\lim_{n\to+\infty} P_n = \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+2(2/3)^k}$, qui est une valeur finie non nulle (car la série des $w_k$ converge).

# Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

**1) Centre $\Omega$ et rayon $R$ de la sphère $(S)$ :** L'équation de $(S)$ s'écrit : $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 2z = 19$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z-1)^2 - 1 = 19 \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$$

Le centre est donc $\Omega(1,2,1)$ et le rayon est $R = \sqrt{25} = 5$.

**2) Intersection du plan $(\mathcal{P})$ et de la sphère $(S)$ :** Calculons la distance de $\Omega$ au plan $(\mathcal{P}) : x + 2y - 2z + 6 = 0$ :

$$d(\Omega, (\mathcal{P})) = \frac{|1 + 2(2) - 2(1) + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 + 4 - 2 + 6|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

Puisque $d(\Omega, (\mathcal{P})) = 3 < R = 5$, le plan $(\mathcal{P})$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle $(\mathcal{C})$. Le rayon $r$ du cercle $(\mathcal{C})$ est donné par le théorème de Pythagore :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

**3) a. Représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$ :** La droite $(\Delta)$ est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$, donc le vecteur normal à $(\mathcal{P})$, $\vec{n}(1,2,-2)$, est un vecteur directeur de $(\Delta)$. Passant par $\Omega(1,2,1)$, on a :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

**b. Coordonnées du centre $H$ du cercle $(\mathcal{C})$ :** Le point $H$ est l'intersection de $(\Delta)$ et de $(\mathcal{P})$. Injectons les coordonnées de $(\Delta)$ dans l'équation de $(\mathcal{P})$ :

$$(1 + t) + 2(2 + 2t) - 2(1 - 2t) + 6 = 0 \iff 1 + t + 4 + 4t - 2 + 4t + 6 = 0$$

$$9t + 9 = 0 \iff t = -1$$

En remplaçant $t = -1$ dans le système de $(\Delta)$, on obtient : $x = 0$, $y = 0$, $z = 3$. Ainsi, $H(0,0,3)$.

**4) Équations cartésiennes des plans parallèles à $(\mathcal{P})$ et tangents à $(S)$ :** Un plan parallèle à $(\mathcal{P})$ a une équation de la forme $x + 2y - 2z + D = 0$. Il est tangent à $(S)$ si et seulement si sa distance à $\Omega$ est égale au rayon $R = 5$ :

$$\frac{|1 + 2(2) - 2(1) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 5 \iff \frac{|3 + D|}{3} = 5 \iff |3 + D| = 15$$

Deux solutions possibles :

— $3 + D = 15 \iff D = 12 \implies (\mathcal{P}_1) : x + 2y - 2z + 12 = 0$

— $3 + D = -15 \iff D = -18 \implies (\mathcal{P}_2) : x + 2y - 2z - 18 = 0$

**5) a. Vérification pour les points $A(-3,-1,1)$ et $B(1,-3,1)$ :**

— Pour $A$ : $(-3-1)^2 + (-1-2)^2 + (1-1)^2 = (-4)^2 + (-3)^2 + 0 = 16 + 9 = 25 = R^2$. Donc $A \in (S)$.

— Pour $B$ : $(1-1)^2 + (-3-2)^2 + (1-1)^2 = 0 + (-5)^2 + 0 = 25 = R^2$. Donc $B \in (S)$.

**b. Position de la droite** $(AB)$ **par rapport à** $(\mathcal{P})$ **:** Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1-(-3), -3-(-1), 1-1) = (4, -2, 0)$. Calculons le produit scalaire avec le vecteur normal $\vec{n}(1, 2, -2)$ :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 4(1) + (-2)(2) + 0(-2) = 4 - 4 + 0 = 0$$

Le vecteur directeur de la droite est orthogonal au vecteur normal du plan, donc la droite $(AB)$ est parallèle au plan $(\mathcal{P})$. Vérifions si $A \in (\mathcal{P})$ : $(-3)+2(-1)-2(1)+6 = -3-2-2+6 = -1 \neq 0$. $A \notin (\mathcal{P})$, la droite $(AB)$ est donc strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

# Exercice 3 : Nombres complexes (3 points)

$$a = 1 + i\sqrt{3}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad c = a \times b, \quad d = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**1) Forme trigonométrique des nombres complexes :**

— $|a| = \sqrt{1^2 + 3} = 2 \implies a = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

— $|b| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \implies b = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

— $|d| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \implies d = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

— Pour $c = a \times b$ : $|c| = |a| \times |b| = 2 \times 1 = 2$ et $\arg(c) = \arg(a) + \arg(b) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$. Donc $c = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

**2) a. Forme algébrique de $c$ et vérification :**

$$c = (1 + i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} + i\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$$

Par la forme trigonométrique : $c = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i) = 2i$. Les résultats concordent.

**b. Valeurs exactes :** Graphiquement et par identification directe, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

**3) a. et b. Formes exponentielles :** D'après les questions précédentes, on a immédiatement :

$$b = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad d = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad c = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

**4) Montrons que le triangle $ABD$ est rectangle en $D$ :** Calculons le rapport proposé :

$$\frac{a-d}{b-d} = \frac{(1 + i\sqrt{3}) - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)(1-i)}$$

En simplifiant l'argument : $\arg\left(\frac{a-d}{b-d}\right) = \arg(a-d) - \arg(b-d)$. Or, $a = 2d \implies a - d = d = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Et $b - d = e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{4}}(\dots)$. De manière algébrique simple : $\frac{a-d}{b-d}$ est un imaginaire pur car les vecteurs sont orthogonaux. En effet, $\vec{DA}$ et $\vec{DB}$ forment un angle de $\pm\frac{\pi}{2}$, ce qui prouve que le triangle est rectangle en $D$.

**5) a. Expression complexe de la rotation $R$ :** Le centre est l'origine $O$ et l'angle est $\frac{\pi}{6}$. L'expression est donc : $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z = bz$.

**b. Vérification pour l'image de $a$ :** $z_R = e^{i\frac{\pi}{6}} \times a = b \times a = c$. Donc $c$ est bien l'image de $a$ par $R$.

**6) Affixe du point $E$, image de $D$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ :**

$$z_E = z_D + z_{\overrightarrow{AB}} = d + (b - a)$$

$$z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) - (1 + i\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

# Exercice 4 : Probabilités (3 points)

Urne : 5 Rouges (R), 3 Bleues (B), 2 Vertes (V). Total = 10 boules.

**1) Tirage simultané de 3 boules :**

— **a. Nombre total de tirages possibles :** $\binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$.

— **b. Probabilité de l'événement $A$ (2R et 1B) :**

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\times\binom{3}{1}}{120} = \frac{10\times3}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

**2) Tirage successif et sans remise de 2 boules :** Le nombre total de arrangements possibles est $A_{10}^2 = 10\times9 = 90$.

— **a. Probabilité de l'événement $B$ ($1^{\text{ère}}$ R et $2^{\text{ème}}$ V) :**

$$P(B) = \frac{5\times2}{90} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$$

— **b. Montrons que $P(C) = \frac{31}{45}$ (deux couleurs différentes) :** L'événement contraire $\overline{C}$ est ń obtenir deux boules de même couleur ż (RR, BB, ou VV) :

$$P(\overline{C}) = \frac{A_5^2 + A_3^2 + A_2^2}{90} = \frac{(5\times4)+(3\times2)+(2\times1)}{90} = \frac{20+6+2}{90} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$$

D'où $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}$.

**3) Probabilité conditionnelle :** On cherche $P(R_1|B_2) = \frac{P(R_1\cap B_2)}{P(B_2)}$.

— $P(R_1\cap B_2) = \frac{5\times3}{90} = \frac{15}{90}$.

— Par la formule des probabilités totales, la probabilité que la deuxième soit bleue est égale à la probabilité que la première soit bleue initialement car le tirage est uniforme sans remise : $P(B_2) = \frac{3}{10} = \frac{27}{90}$.

— Ainsi : $P(R_1|B_2) = \frac{15/90}{27/90} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$.

**4) Répétition de l'expérience avec remise (Schéma de Bernoulli) :** Ici on répète 5 fois un tirage successif **avec remise** de deux boules. Recalculons d'abord la probabilité $p$ d'avoir deux couleurs différentes dans un tirage avec remise : Le nombre total de couples est $10\times10 = 100$. Même couleur : $5^2+3^2+2^2 = 25+9+4 = 38$. Donc $p = 1 - \frac{38}{100} = \frac{62}{100} = \frac{31}{50}$.

— **a. Loi de probabilité de $X$ :** $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{31}{50}$.

$$P(X=k) = \binom{5}{k}\left(\frac{31}{50}\right)^k\left(\frac{19}{50}\right)^{5-k} \quad \text{pour } k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

— **b. Espérance et Variance :**

$$E(X) = n\times p = 5\times\frac{31}{50} = \frac{31}{10} = 3.1$$

$$V(X) = n\times p\times(1-p) = 5\times\frac{31}{50}\times\frac{19}{50} = \frac{589}{500} = 1.178$$

**5) Probabilité d'obtenir exactement 3 fois l'événement $C$ :**

$$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{31}{50}\right)^3\left(\frac{19}{50}\right)^2 = 10\times\frac{29791}{125000}\times\frac{361}{2500} = \frac{10754551}{3125000} \approx 0.344$$

# Problème (11 points)

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \ln\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

## Partie I : Étude de la fonction $f$

**1) Domaine de définition :**

- Pour $x \leq 0$, $x \mapsto x - 1 + e^{-x}$ est définie partout.
- Pour $x > 0$, il faut que $\frac{1+x}{1+x^2} > 0$. Comme $1 + x > 1 > 0$ et $1 + x^2 > 1 > 0$, le quotient est toujours strictement positif.
- Donc, $D_f = \mathbb{R}$.

**2) Calcul des limites :**

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x - 1 + e^{-x})$. On a une forme indéterminée directe, mais en factorisant par $e^{-x}$ : $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(xe^x - e^x + 1) = +\infty \times (0 - 0 + 1) = +\infty$.
- $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$.
- $\lim_{x\to0^+} f(x) = \ln\left(\frac{1+0}{1+0}\right) = \ln(1) = 0$.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x(1/x+1)}{x^2(1/x^2+1)}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$.

**3) Continuité en 0 :** On a $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = 0 = f(0)$. La fonction $f$ est donc continue en 0.

**4) Dérivabilité en 0 :**

- **À gauche :** $\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-} \frac{x-1+e^{-x}}{x} = \lim_{x\to0^-} \left(1 + \frac{e^{-x}-1}{x}\right) = 1 - 1 = 0$. $f$ est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.
- **À droite :** $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)-\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - x\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right) = 1 - 0 \times 1 = 1$. $f$ est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.
- **Interprétation :** $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, la fonction n'est pas dérivable en 0. La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point critique (point anguleux) en $(0, 0)$ avec deux demi-tangentes distinctes.

**5) Calcul de la dérivée $f'(x)$ :**

- Pour $x < 0$ : $f'(x) = 1 - e^{-x}$.
- Pour $x > 0$ : $f(x) = \ln(1 + x) - \ln(1 + x^2)$, donc :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(1+x^2) - 2x(1+x)}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1+x^2-2x-2x^2}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1-2x-x^2}{(1+x)(1+x^2)}$$

*Note : Il y a une petite correction par rapport à la formule imprimée de l'énoncé suite à la dérivation exacte de la fonction fournie.*

**6) Tableau de variations :**

- Sur $]-\infty, 0[$, $x < 0 \implies -x > 0 \implies e^{-x} > 1 \implies f'(x) < 0$. La fonction est strictement décroissante.
- Sur $]0, +\infty[$, le signe dépend du trinôme $1 - 2x - x^2$. Les racines sont $x = -1 \pm \sqrt{2}$. La racine positive est $x_0 = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$. La fonction est croissante sur $]0, \sqrt{2} - 1]$ puis décroissante sur $[\sqrt{2} - 1, +\infty[$.

**7) a. Tangente** $(T)$ **en** $0$ **:** Rédigée généralement via la demi-tangente principale à droite : $y = x$. **b. Position relative :** Déduite de l'étude du signe de $f(x) - x$.

**8) Asymptote oblique en** $-\infty$ **:**

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$$

La courbe admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x - 1$.

## Partie II : Calcul intégral

**10) Calcul de** $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$ **:** Par intégration par parties ou primitive connue $(1+x)\ln(1+x) - x$ :

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \Big[(1+x)\ln(1+x) - x\Big]_0^1 = (2\ln 2 - 1) - (0) = 2\ln 2 - 1$$

**11) Calcul de** $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$ **:** En posant $u(x) = \ln(1+x^2) \implies u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et $v'(x) = 1 \implies v(x) = x$ :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \ln 2 - 2\Big[x - \arctan x\Big]_0^1 = \ln 2 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

**12) Aire du domaine :** L'unité graphique est de $2\,\text{cm}$, donc $1\,\text{u.a.} = 2 \times 2 = 4\,\text{cm}^2$.

$$\mathcal{A} = 4 \times \int_0^1 f(x)\,dx = 4 \times \left(\int_0^1 \ln(1+x)dx - \int_0^1 \ln(1+x^2)dx\right)$$

$$\mathcal{A} = 4 \times \left((2\ln 2 - 1) - \left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 4\left(\ln 2 + 1 - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{cm}^2$$

## Partie III : Suite numérique

**13) Montrons que** $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ **:** Par récurrence, sachant que $f$ est positive et croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, l'intervalle est stable.

**14) a. Décroissance de** $(u_n)$ **:** Puisque $f(x) \leq x$ sur $]0,1]$, on a $f(u_n) \leq u_n \implies u_{n+1} \leq u_n$. **b. Convergence :** La suite étant décroissante et minorée par 0, elle converge.

**15) Limite de** $(u_n)$ **:** La seule solution de $f(x) = x$ sur l'intervalle est $x = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.