Examen Blanc nř 3

2025 - 2026

Matière : Mathématiques

Filière : Sciences Expérimentales (PC et SVT)

Durée : 3h

Coefficient : 7

ń L'effort d'aujourd'hui est la réussite de demain ż

Instructions Générales

— L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
— Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
— L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

Domaine	Exercice	Barème
Suites numériques	Exercice 1	4 points
Géométrie dans l'espace	Exercice 2	3 points
Nombres complexes	Exercice 3	3 points
Probabilités	Exercice 4	3 points
Étude de fonction, calcul intégral et suite	Problème	11 points

Exercice 1 (4 points)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}.$$

(0.5) **1)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

(0.75) **2)**

a. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4 - u_n^2}{u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante.

(0.5) **3)** Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

(0.75) **4)** On pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

(0.75) **5)** Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

(0.75) **6)** On pose $Q_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$. Exprimer Q_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n$.

Exercice 2 (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z - 11 = 0$$

et le plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $2x + y - 2z - 11 = 0$.

(0.5) **1)** Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (S).

(0.5) **2)** Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$. Déterminer le rayon r du cercle $(\mathcal{C})$.

(0.75) **3)** Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$.

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b. Déterminer les coordonnées du centre H du cercle $(\mathcal{C})$.

(0.5) **4)** Donner une équation cartésienne de chacun des plans parallèles à $(\mathcal{P})$ et tangents à la sphère (S).

(0.75) **5)** On considère les points $A(5,5,3)$ et $B(7,1,3)$.

a. Vérifier que les points A et B appartiennent à la sphère (S).

b. Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan $(\mathcal{P})$, sans être contenue dans $(\mathcal{P})$.

Exercice 3 (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = \sqrt{3} + i, \quad b = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c = a \times b, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

(0.5) **1)** Écrire les nombres complexes a, b, c et d sous forme trigonométrique (module et argument).

(0.5) **2)**

a. Calculer $c = a \times b$ sous forme algébrique, puis vérifier à l'aide des formes trigonométriques.

b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

(0.75) **3)**

a. Montrer que $d = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $a = 2d$ et $b = d^2$.

b. Vérifier que $c = 2i$ et que $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(0.5) **4)** Calculer $\dfrac{c-d}{a-d}$ et en déduire la nature du triangle ACD.

(0.75) **5)** Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Déterminer l'expression complexe de R.

b. Vérifier que c est l'image de a par la rotation R.

(0.5) **6)** Déterminer l'affixe du point E, image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient 3 boules blanches, 3 boules noires et 3 boules rouges. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

(0.5) **1)** On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a. Déterminer le nombre total de tirages possibles.

b. Calculer la probabilité de l'événement A : ń obtenir une boule de chaque couleur ż.

(0.75) **2)** On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

a. Calculer la probabilité de l'événement B : ń la première boule est blanche et la seconde est rouge ż.

b. Montrer que la probabilité de l'événement C : ń obtenir deux boules de couleurs différentes ż est $\dfrac{3}{4}$.

(0.5) **3)** Sachant que la deuxième boule tirée est noire, calculer la probabilité que la première boule soit blanche.

(0.75) **4)** On répète l'expérience du tirage successif **avec remise** de deux boules, 4 fois de suite. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient deux boules de couleurs différentes.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

(0.5) **5)** Calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 fois l'événement C lors des 4 répétitions.

Problème (11 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x\,e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie I : Étude de la fonction f

(0.5) **1)** Déterminer le domaine de définition de f.

(1) **2)** Calculer :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$.

b. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(0.5) **3)** f est-elle continue en 0 ? Justifier.

(1) **4)** Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

(1) **5)** Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et pour $x > 0$. Montrer que pour $x > 0$:

$$f'(x) = (1-x)\,e^{-x}.$$

(0.5) **6)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur chaque intervalle et dresser le tableau de variations complet de f.

(0.75) **7)**

a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x = 0$.

b. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T) sur $\mathbb{R}$.

(0.75) **8)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - \dfrac{x}{2}\right]$. Interpréter graphiquement.

(0.5) **9)** Tracer $(\mathcal{C}_f)$, (T) et la droite asymptote oblique (unité 2 cm).

Partie II : Calcul intégral

(0.75) **10)** Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$.

(0.5) **11)** Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

(0.75) **12)** En déduire l'aire, en cm^2, du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie III : Suite numérique

On définit la suite (u_n) par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(0.5) **13)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$.

(0.75) **14)**

a. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) \leq x$, puis en déduire que (u_n) est décroissante.

b. Conclure que la suite (u_n) est convergente.

(0.5) **15)** Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.