

Examen Blanc n° 1

2025 - 2026

Matière : Mathématiques

Filière : Sciences Expérimentales (PC et SVT)

Durée : 3h

Coefficient : 7

« La rigueur et la précision sont les clés de la réussite »

Instructions Générales

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

Domaine	Exercice	Barème
Suites numériques	Exercice 1	4 points
Géométrie dans l'espace	Exercice 2	3 points
Nombres complexes	Exercice 3	3 points
Probabilités	Exercice 4	3 points
Étude de fonction, calcul intégral et suite	Problème	11 points

Exercice 1 (4 points)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}.$$

(0.5) **1)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

(0.75) **2)**

a. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

(0.5) **3)** Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

(0.75) **4)** On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{1}{u_n}$.

a. Montrer que (v_n) vérifie la relation $v_{n+1} = \frac{v_n + 1}{2}$, puis en déduire que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - 1$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

(0.75) **5)** Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n , puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

(0.75) **6)** Calculer $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ en fonction de n , puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Exercice 2 (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$ et le plan (\mathcal{P}) d'équation : $x + 2y - z + 1 = 0$.

(0.5) **1)** Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (S) .

(0.5) **2)** Montrer que le plan (\mathcal{P}) coupe la sphère (S) suivant un cercle (\mathcal{C}) . Déterminer le rayon r du cercle (\mathcal{C}) .

(0.75) **3)** Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (\mathcal{P}) .

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

b. Déterminer les coordonnées du centre H du cercle (\mathcal{C}) .

(0.5) **4)** Donner une équation cartésienne du plan (\mathcal{Q}) parallèle à (\mathcal{P}) et tangent à la sphère (S) .

(0.75) **5)** On considère les points $A(1, 2, 1)$ et $B(3, 2, 3)$.

a. Vérifier que les points A et B appartiennent à la sphère (S) .

b. Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan (\mathcal{P}) .

Exercice 3 (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = 1 + i\sqrt{3}, \quad b = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c = a \times b, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

- (0.5) 1) Écrire les nombres complexes a , b , c et d sous forme trigonométrique (module et argument).
- (0.5) 2)
- Vérifier que $c = a \times b$.
 - En déduire la forme trigonométrique de c .
- (0.75) 3)
- Montrer que $d = e^{i\frac{\pi}{6}}$.
 - Vérifier que $a = 2d^2$ et que $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- (0.5) 4) Donner l'écriture exponentielle de $\frac{b-a}{d-a}$ et en déduire la nature du triangle ABD .
- (0.75) 5) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- Déterminer l'expression complexe de R .
 - Vérifier que c est l'image de a par la rotation R .
- (0.5) 6) Déterminer l'affixe du point E image du point D par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules rouges. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

- (0.5) 1) On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.
- Déterminer le nombre total de tirages possibles.
 - Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir 2 boules blanches et 1 boule noire ».
- (0.75) 2) On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
- Calculer la probabilité de l'événement B : « la première boule est blanche et la seconde est rouge ».
 - Montrer que la probabilité de l'événement C : « obtenir deux boules de couleurs différentes » est $\frac{31}{45}$.
- (0.5) 3) Sachant que la deuxième boule tirée est rouge, calculer la probabilité que la première boule soit blanche.
- (0.75) 4) On répète l'expérience du tirage successif avec remise de deux boules, 5 fois de suite. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient deux boules de couleurs différentes.
- Déterminer la loi de probabilité de X .
 - Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.
- (0.5) 5) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 fois l'événement C .

Problème (11 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ \ln\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Soit (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.

Partie I : Étude de la fonction f

(0.5) **1)** Déterminer le domaine de définition de f .

(1) **2)** Calculer :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(0.5) **3)** f est-elle continue en 0? Justifier.

(1) **4)** Étudier la dérivabilité de f en 0 à gauche et à droite. Interpréter.

(1) **5)** Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et pour $x > 0$.

(0.5) **6)** Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x < 0$ et pour $x > 0$. Dresser le tableau de variations de f .

(0.75) **7)**

a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse $x = 0$.

b. Étudier la position relative de (\mathcal{C}_f) par rapport à (T) sur \mathbb{R} .

(0.75) **8)** Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

(0.5) **9)** Tracer (\mathcal{C}_f) , (T) et la droite asymptotique (unité 2 cm).

Partie II : Fonction réciproque et calcul intégral

(0.75) **10)** Soit g la restriction de f à $I =]-\infty, 0]$.

a. Montrer que g réalise une bijection de I sur J (déterminer J).

b. Donner le tableau de variations de g^{-1} sur J .

(0.5) **11)** Calculer $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ et $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$.

(0.75) **12)** En déduire l'aire, en cm^2 , du domaine délimité par (\mathcal{C}_f) , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

Partie III : Suite numérique

(0.5) **13)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$ pour (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(0.75) **14)**

a. Montrer que (u_n) est décroissante.

b. En déduire qu'elle est convergente.

(0.5) **15)** Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.