

maxi. maths

Exercices résolus

Mathématiques

2ème Année Baccalauréat

Sciences Expérimentales et ses filières

Sciences et Technologies Industrielles et ses filières

- Résumés de Cours
- Exercices variés et progressifs
- Problèmes de synthèse
- Extraits de sujets du bac

Tome 1

2^{ème}
Bac

Activités préliminaires

1 Les identités remarquables

Développement

$$1 \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Factorisation

$$2 \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$3 \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$4 \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$5 \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

$$6 \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$7 \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$8 \quad (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4$$

Remarque :

Toutes ces égalités sont à connaître dans les deux sens!

2 Les fractions

a, b, c et sont des nombres réels

1 Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$;

avec $b \neq 0$

$$2 \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc ; (\text{conditions : } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0)$$

$$3 \quad \frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 ; (\text{condition : } b \neq 0)$$

$$4 \quad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} ; (\text{condition : } b \neq 0)$$

5 Pour additionner ou soustraire deux (ou plusieurs) fractions, il faut d'abord réduire au même dénominateur :

$$\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \mp \frac{cb}{bd} = \frac{ad \mp cb}{bd} ; (\text{conditions : } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0)$$

6 Pour multiplier deux fractions, il n'est pas nécessaire de rendre au même dénominateur : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (conditions : $b \neq 0$ et $d \neq 0$).

7 $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$ (conditions : $b \neq 0$ et $c \neq 0$)

inverse

8 $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$ (condition : $b \neq 0$ et $c \neq 0$)

inverse

9 $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (condition : $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$)

inverse

Exemples : $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{3}{2x-1} = \frac{x(2x-1) - 3(x-1)}{(x-1)(2x-1)} = \frac{2x^2 - 4x + 3}{(x-1)(2x-1)} \right)$

3 Les puissances

1 $\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} = a^n$; $n \in \mathbb{N}^*$; $a^1 = a$ (**Attention** : $\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ fois}} = na$)

2 Pour tout réel non nul : $a^0 = 1$

(Exemples : $(-5)^0 = 1$; $\pi^0 = 1$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^0 = 1$; $10^0 = 1$)

3 $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a^n} = a^{-n} ; a^n \times a^m = a^{n+m} ; (a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n ; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}} \\ a^n \times b^n = (ab)^n ; \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{array} \right.$

4 Les puissances de 10 : $10^1 = 10$; $10^3 = \underbrace{1000}_{3 \text{ zéros}}$; $10^n = \underbrace{1000\dots 0}_{n \text{ zéros}}$; où $n \in \mathbb{N}^*$

Exemples : $10^{-1} = 0,1$; $10^{-3} = \underbrace{0,001}_{3 \text{ zéros}}$; $10^{-n} = \underbrace{0,00\dots 01}_{n \text{ zéros}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Remarque :

► $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n+1}}$

► $7^{n+2} - 7^{n+1} = 7^{n+1}(7-1) = 6 \times 7^{n+1}$

4 Les racines carrées

Soit a un réel positif

On appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$, l'unique nombre positif b tel que : $b^2 = a$ (et on écrit : $b = \sqrt{a}$)

$$1 \quad \sqrt{0} = 0 ; \sqrt{1} = 1 ; \sqrt{x^2} = |x| ; \begin{cases} \sqrt{x^2} = x & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{x^2} = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$2 \quad \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} ; (\text{conditions : } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0)$$

$$3 \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} ; (\text{conditions : } a \geq 0 \text{ et } b > 0)$$

$$4 \quad \sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \times \sqrt{|b|} ; (\text{conditions : } a \text{ et } b \text{ de même signe : } a \times b \geq 0)$$

$$5 \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}} ; (\text{conditions : } a \text{ et } b \text{ de même signe ; } b \neq 0)$$

$$6 \quad \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} \iff a = b \\ \sqrt{a} < \sqrt{b} \iff a < b \end{cases} (\text{conditions : } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0)$$

$$7 \quad \text{si } a > 0 ; \text{ alors : } x^2 = a \iff (x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a})$$

$$8 \quad \blacktriangleright \text{ Le conjugué de } \sqrt{A} + B \text{ est } \sqrt{A} - B \text{ et on a :}$$

$$(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$$

$$\blacktriangleright \text{ Le conjugué de } \sqrt{x^2 - 2x + 3} - x + 2 \text{ est } \sqrt{x^2 - 2x + 3} + x - 2 ; \text{ leur produit est : } x^2 - 2x + 3 - (x - 2)^2$$

5 Les valeurs absolues : x, y, a, b et r sont des réels.

$$1 \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} (|x| = x \iff x \geq 0 ; |x| = -x \iff x \leq 0)$$

$$2 \quad |x| = 0 \iff x = 0$$

$$3 \quad |x| \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$4 \quad |x| = |y| \iff (x = y \text{ ou } x = -y)$$

$$5 \quad \text{si } a \geq 0 ; \text{ alors : } |x| = a \iff (x = a \text{ ou } x = -a)$$

$$6 \quad |a \times b| = |a| \times |b| ; \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ avec } b \neq 0 ; |a^n| = |a|^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Attention! : $|a+b| \leq |a|+|b|$ (Inégalité triangulaire)

7 $|x-a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x-a \leq r$

8 $|x-a| \geq r \Leftrightarrow x-a \leq -r \text{ ou } x-a \geq r$

9 $x^2 \leq r \Leftrightarrow -\sqrt{r} \leq x \leq \sqrt{r}$

10 $x^2 \geq r \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{r} \text{ ou } x \geq \sqrt{r}$

(condition : $r \geq 0$)

6 Signe de $ax+b$ - Inéquations (avec produit ou quotient)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe de	0	signe de $-a$

Exemples :

1

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	-	0	+

2

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-3x+2$	+	0	-

3

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$-2x+1$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+3)(-2x+1)$	$-$	0	0	$-$

4

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$-x+4$	+	+	0	-
$x+3$	-	0	+	+
$\frac{-x+4}{x+3}$	-	+	0	-

Pour résoudre des inéquations «produit» $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ (ou « > 0 » ou « ≤ 0 » ou « < 0 »)

ou «quotient» : $\frac{ax + b}{cx + d}$ on utilise un tableau de signe.

Exemples : pour $(x + 3)(-2x + 1) > 0$: $S =]-3; \frac{1}{2}[$ (voir tableau (3))

pour : $\frac{-x + 4}{x + 3} \leq 0$: $S =]-\infty; -3[\cup [4; +\infty[$ (voir tableau (4))

7 Le second degré : $ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$

1 Comment résoudre une équation du second degré $(E): ax^2 + bx + c = 0$?
($a \neq 0$)

Méthode classique : calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

► Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet 2 solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

► Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution unique $x = \frac{-b}{2a}$

► Si $\Delta < 0$, alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$ (Pas de solution dans $\mathbb{R}$)

Autres méthodes et astuces :

1 Forme canonique : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ puis factoriser si possible...

2 Si $c = 0$, alors $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}$$

(Donc si $c = 0$, alors 0 et $-\frac{b}{a}$ sont les solutions de (E))

3 Si $a + b + c = 0$, alors 1 et $\frac{c}{a}$ sont les solutions de (E)

4 Si $a - b + c = 0$, alors -1 et $-\frac{c}{a}$ sont les solutions de (E)

5 Si α est une solution évidente de (E) alors l'autre solution est β telle que:

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \beta = \frac{c}{a\alpha} \text{ (ou } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \beta = -\frac{b}{a} - \alpha)$$

6 Comment déterminer le signe de $ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$)?

► Commencer par calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- ▶ Si $\Delta < 0$; alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$
- ▶ Si $\Delta = 0$; alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$
- ▶ Si $\Delta > 0$; alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2 et du signe contraire de a entre les racines.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax + b$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

8 Signe d'expressions avec racines carrées

1 Comment déterminer le signe de $\sqrt{A} - B$? (où $A \geq 0$ et $B \neq 0$)

- ▶ Si $B < 0$; alors $-B > 0$ et $\sqrt{A} \geq 0$, donc $\sqrt{A} - B > 0$
- ▶ Si $B > 0$; on multiplie et on divise par le conjugué $\sqrt{A} + B$:

$$\sqrt{A} - B = \frac{(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B)}{\sqrt{A} + B} = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$$

alors le signe de $\sqrt{A} - B$ est celui de $A - B^2$

2 Comment déterminer le signe de $\sqrt{A} + B$? (où $A \geq 0$ et $B \neq 0$)

- ▶ Si $B > 0$; alors $\sqrt{A} + B > 0$
- ▶ Si $B < 0$; on multiplie et on divise par le conjugué $\sqrt{A} - B$:

$$\sqrt{A} + B = \frac{(\sqrt{A} + B)(\sqrt{A} - B)}{\sqrt{A} - B} = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} - B}$$

comme $\sqrt{A} - B > 0$; alors le signe de $\sqrt{A} + B$ est celui de $A - B^2$.

3 Comment déterminer le signe de $\sqrt{A} - \sqrt{B}$? (où $A > 0$ et $B > 0$)

$$\text{on a : } \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

Donc le signe de $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ est celui de $A - B$.

9 Ensemble de définition d'une fonction

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}$$

Techniques pour chercher l'ensemble de définition d'une fonction :

Soient P et Q deux fonctions polynômes et f une fonction numérique.

Expression de la fonction f	Détermination de l'ensemble de définition de f
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$x \in D_f \Leftrightarrow Q(x) \neq 0$. Donc D_f est $\mathbb{R}$ privé des solutions de l'équation : $Q(x) = 0$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$x \in D_f \Leftrightarrow P(x) \geq 0$. Donc D_f est l'ensemble des solutions de l'inéquation : $P(x) \geq 0$
$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$x \in D_f \Leftrightarrow Q(x) > 0$. Donc D_f est l'ensemble des solutions de l'inéquation : $Q(x) > 0$
$f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$	$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ et $Q(x) \neq 0$. Donc D_f est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ privé des solutions de l'équation $Q(x) = 0$
$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)} - a}$ avec $a > 0$	$x \in D_f \Leftrightarrow Q(x) \geq 0$ et $\sqrt{Q(x)} - a \neq 0$. Donc D_f est l'ensemble des solutions de l'inéquation $Q(x) \geq 0$ privé des solutions de l'équation $Q(x) = a^2$

► Si $h = \sqrt{f}$; alors : $x \in D_h \Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \geq 0$

► Si $h = \frac{f}{\sqrt{g}}$; alors : $x \in D_h \Leftrightarrow x \in (D_g \cap D_f)$ et $g(x) > 0$

► Si $h = \frac{f}{\sqrt{g} + \varphi}$; alors : $x \in D_h \Leftrightarrow x \in (D_g \cap D_f \cap D_\varphi)$ et $g(x) \geq 0$

et $\sqrt{g(x)} + \varphi(x) \neq 0$

► Si $h = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{g}}$; alors : $x \in D_h \Leftrightarrow x \in (D_g \cap D_f)$ et $f(x) \geq 0$ et $g(x) > 0$

► Si $h = \sqrt{\frac{f}{g}}$; alors : $x \in D_h \Leftrightarrow x \in (D_f \cap D_g)$ et $g(x) \neq 0$ et $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$

10 Limites de fonctions

1. Limites usuelles

a. Au voisinage de ∞

- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ où $n \in \mathbb{N}^*$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- ▶ Si n est pair, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$
- ▶ Si n est impair, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

b. Au voisinage de 0

- ▶ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- ▶ Si n est pair, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- ▶ Si n est impair, alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

2. Limites de fonctions polynômes et rationnelles en un point a et en ∞ .

Soient P et Q deux fonctions polynômes et a un réel.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ avec } a_n \neq 0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \text{ avec } b_m \neq 0$$

- ▶ $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$ (Limite du terme du plus haut degré)
- ▶ Si $Q(a) \neq 0$; alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

3. Limite de la fonction $\sqrt{f}$

Soit f une fonction positive et ℓ un réel positif :

- ▶ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$; alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
- ▶ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$; alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty$

4. Opérations sur les limites

Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient :

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

ℓ et ℓ' désignent des réels.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$
			$-\infty$ si $\ell < 0$
$\ell \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$
			$+\infty$ si $\ell < 0$
0	$+\infty$	$+\infty$	?
0	$-\infty$	$-\infty$	?
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell > 0$	0^+	$+\infty$
	0^-	$-\infty$

$\ell < 0$	0^+	$-\infty$
	0^-	$+\infty$
0	0	$?$
$\ell \geq 0$	$+\infty$	0^+
	$-\infty$	0^-
$\ell \leq 0$	$+\infty$	0^-
	$-\infty$	0^+
∞	∞	$?$

Formes indéterminées :

1 $(+\infty) + (-\infty)$: Pour la somme.

2 $0 \times \infty$: Pour le produit.

3 $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$: Pour le quotient.

5. Limites du type $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ où $f(a) = g(a) = 0$ et $a \in \mathbb{R}$:

a. Cas où $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes.

On factorise $f(x)$ et $g(x)$ par $(x - a)$ puis on simplifie :

$$f(x) = (x - a)f_1(x) \text{ et } g(x) = (x - a)g_1(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)} \text{ si } g_1(a) \neq 0$$

b. Cas où f (ou g) est de la forme $\sqrt{h} \pm k$:

Dans ce cas on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée.

Exemple : Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{1 - \sqrt{x}}$:

$$\begin{aligned}
 x > 0 \text{ et } x \neq 1; \quad \frac{\sqrt{3x+1}-2}{1-\sqrt{x}} &= \frac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(\sqrt{3x+1}+2)} \\
 &= \frac{(3x+1-4)(1+\sqrt{x})}{(1-x)(\sqrt{3x+1}+2)} \\
 &= \frac{3(x-1)(1+\sqrt{x})}{-(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} \\
 &= \frac{-3(1+\sqrt{x})}{\sqrt{3x+1}+2}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(1+\sqrt{x})}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

c. Cas $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$:

Si f est une fonction dérivable en a , alors : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

Exemple : Calculons $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x+5)^{2017} + 1}{x+2}$:

La fonction $f: x \mapsto (3x+5)^{2017}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en -2 et on a :

$$f(-2) = (-1)^{2017} = -1$$

$$\text{et } (\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 2017(3x+5)^{2016} \times 3 = 6051(3x+5)^{2016}$$

$$f'(-2) = 6051(-1)^{2016} = 6051$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x+5)^{2017} + 1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = f'(-2) = 6051$$

6. Limites usuelles de fonctions trigonométriques

Soit a un réel.

$$1 \triangleright \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin(a)$$

$$2 \triangleright \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos(a)$$

$$3 \triangleright \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan(a) \text{ si } a \neq \frac{\pi}{2} + K\pi \text{ où } K \in \mathbb{Z}$$

$$4 \triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$5 \triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

$$6 \triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$7 \triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

7. Limites et ordre

Soient f , g et h des fonctions numériques définies sur un intervalle I et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

- $\triangleright$ Si $f(x) \geq g(x)$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$
 $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Si } f(x) \geq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \end{array}} \right\} \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
- $\triangleright$ Si $f(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -\infty$
 $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Si } f(x) \leq h(x) \text{ au voisinage de } a \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = -\infty \end{array}} \right\} \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
- $\triangleright$ Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ (où $\ell \in \mathbb{R}$)
 $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Si } g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ au voisinage de } a \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \text{ (où } \ell \in \mathbb{R}) \end{array}} \right\} \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
- $\triangleright$ Si $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
 $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Si } |f(x) - \ell| \leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{array}} \right\} \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

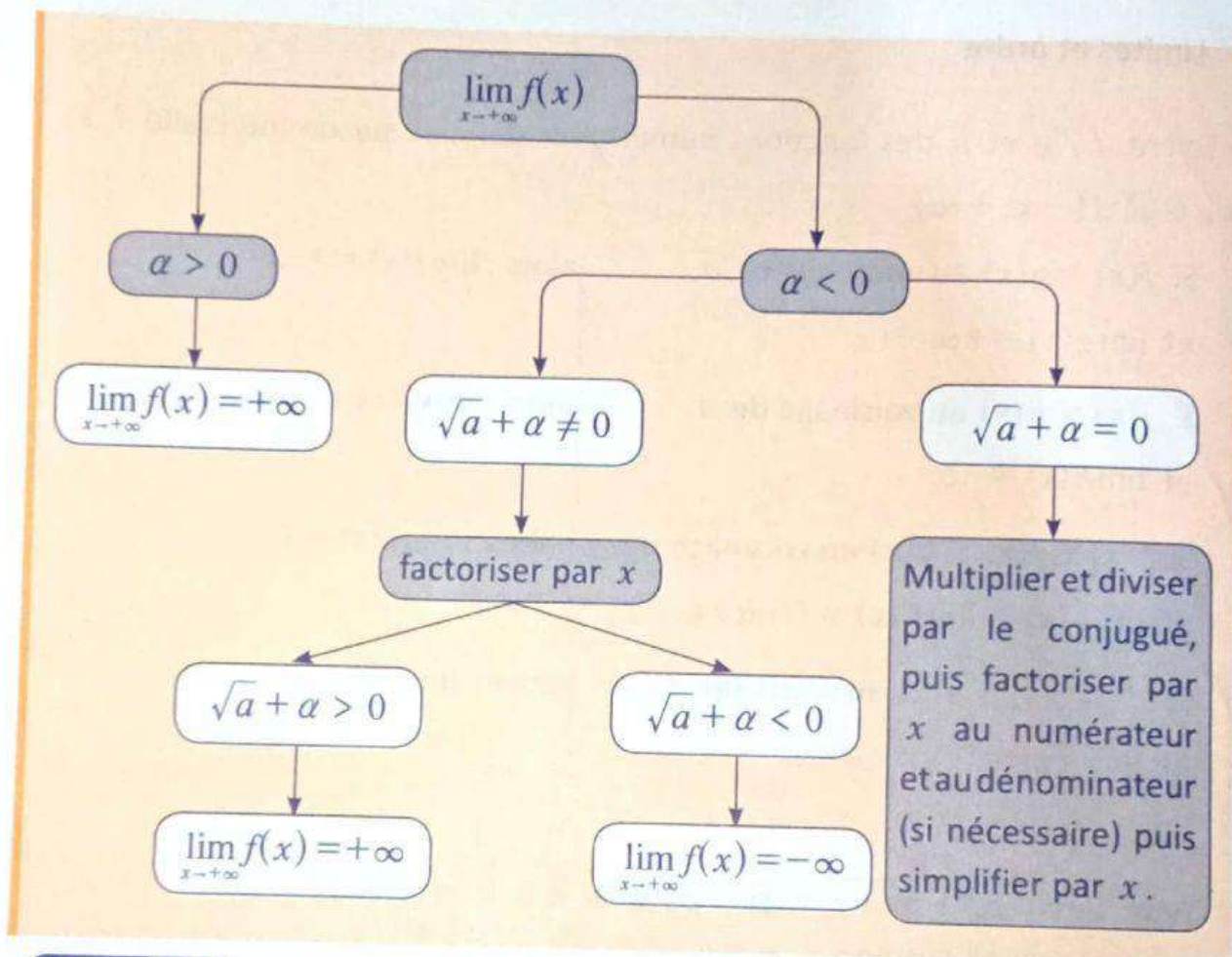
8. Type $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta)$ avec $a > 0$ et $\alpha \neq 0$

Comment factoriser par x l'expression $\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$?

$$\begin{aligned}
 x > 0 ; (\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta) &= \sqrt{x^2 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right)} + \alpha x + \beta \\
 &= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + x \left(\alpha + \frac{\beta}{x} \right) \\
 &= |x| \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + x \left(\alpha + \frac{\beta}{x} \right) \\
 &= x \left[\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + \alpha + \frac{\beta}{x} \right] \quad (x > 0 ; \text{ donc } |x| = x)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + \alpha + \frac{\beta}{x} \right) = \sqrt{a} + \alpha$$

On pose $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$



Exemple 1 :

Calculons: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - 3x + 2)$

On a : $a = 1$ et $\alpha = -3$ (donc $\alpha < 0$)

comme $\sqrt{a} + \alpha = -2 \neq 0$, il suffit de factoriser par x :

$$x > 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - 3x + 2) = x \left[\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3 + \frac{2}{x} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3 + \frac{2}{x} \right) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3 + \frac{2}{x} \right] = -\infty$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 3x + 2 = -\infty$

Exemple 2 :

Calculons: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x - 1} - 2x + 5)$

On a : $a = 4$ et $\alpha = -2$ (donc : $\alpha < 0$)

Comme $\sqrt{a} + \alpha = 0$, on utilise le conjugué :

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{4x^2 + 3x - 1} - 2x + 5) &= \sqrt{4x^2 + 3x - 1} - (2x - 5) \\
 &= \frac{[\sqrt{4x^2 + 3x - 1} - (2x - 5)][\sqrt{4x^2 + 3x - 1} + (2x - 5)]}{\sqrt{4x^2 + 3x - 1} + (2x - 5)} \\
 &= \frac{4x^2 + 3x - 1 - (2x - 5)^2}{\sqrt{4x^2 + 3x - 1} + (2x - 5)} \\
 &= \frac{23x - 26}{\sqrt{4x^2 + 3x - 1} + (2x - 5)} \\
 &= \frac{x(23 - \frac{26}{x})}{x[\sqrt{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{5}{x}]} \\
 &= \frac{23 - \frac{26}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{5}{x}}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(23 - \frac{26}{x}\right) &= 23 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{5}{x}\right) &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{23 - \frac{26}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{5}{x}} = \frac{23}{4}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x - 1} - 2x + 5) = \frac{23}{4}$

9. Type $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta)$ avec $a > 0$ et $\alpha \neq 0$

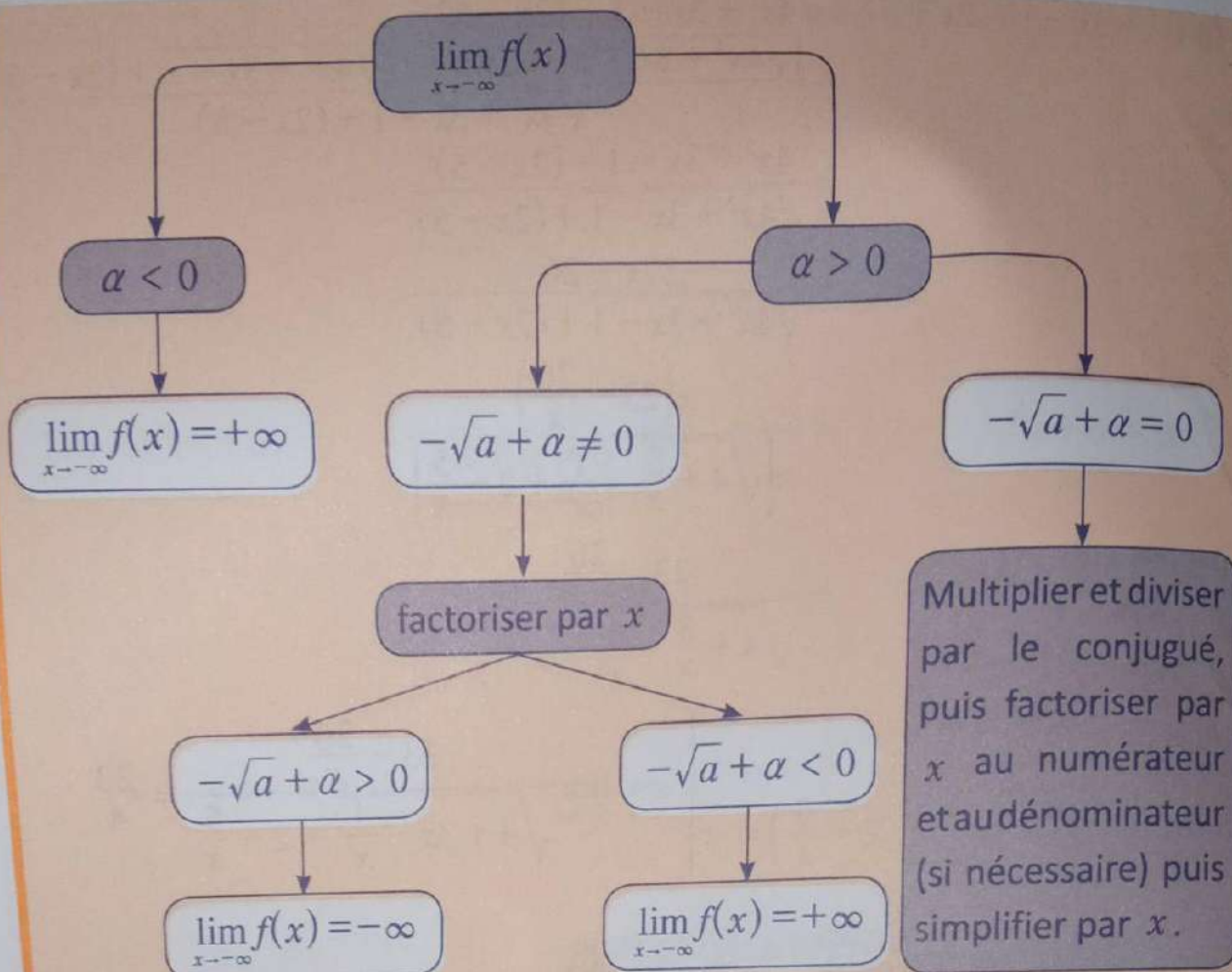
Comment factoriser par x l'expression $(\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta)$?

$x < 0$;

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta &= |x| \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + x \left(\alpha + \frac{\beta}{x} \right) \\
 &= -x \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + x \left(\alpha + \frac{\beta}{x} \right) ; (x < 0 \text{ donc } |x| = -x) \\
 &= x \left[-\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + \alpha + \frac{\beta}{x} \right]
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + \alpha + \frac{\beta}{x} \right) = -\sqrt{a} + \alpha$$

On pose $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$; $a > 0$ et $\alpha \neq 0$



Exemple 1 :

Calculons: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + x - 2)$

On a : $a = 2$ et $\alpha = 1$

Comme $-\sqrt{a} + \alpha = 1 - \sqrt{2} (< 0)$; alors il suffit de factoriser par x

$$x < 0 ; \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + x - 2 = x \left[-\sqrt{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right]$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right) = -\sqrt{2} + 1 < 0 \}$ donc:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[-\sqrt{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right] = +\infty$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + x - 2) = +\infty$

Exemple 2 :

Calculons: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - 2} + 3x - 4)$

On a : $a = 9$ et $\alpha = 3$

Comme $-\sqrt{a} + a = 0$, alors on utilise le conjugué :

$$\begin{aligned} x < 0 ; \sqrt{9x^2 - 2} + 3x - 4 &= \frac{(\sqrt{9x^2 - 2} + 3x)(\sqrt{9x^2 - 2} - 3x)}{\sqrt{9x^2 - 2} - 3x} - 4 \\ &= \frac{9x^2 - 2 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 - 2} - 3x} - 4 \\ &= \frac{-2}{\sqrt{9x^2 - 2} - 3x} - 4 \end{aligned}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - 2} - 3x) = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt{9x^2 - 2} - 3x} = 0$

D'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt{9x^2 - 2} - 3x} - 4 = -4$ Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - 2} + 3x - 4) = -4$

Exercices

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 1}{6}$ 2 $f(x) = \frac{3x}{9(x-1)^2 - 1}$ 3 $f(x) = \frac{5x-1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

Exercice 2

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2 - 2x - 8}$ 2 $f(x) = \sqrt{\frac{3x-4}{2-x}}$ 3 $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - x - 2}}$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{3 - |x-1|}$ 2 $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{|x|-1}}$ 3 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-5|-3-1}}$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

1 a. $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - x + 1$ b. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{2x+2}$ c. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1-2x}{x-2}}$
 2 a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-5}{(x-1)^2}$ b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 2x - 3}$ c. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{2 - \sqrt{x}}$

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

1 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - x + 1)$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - \sqrt{2}x^3 + x + 1$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 + x + 1)^3$

2 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 7x}{x - x^2}$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{(x + 1)^3}$ c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{2x^2 - (2x + 1)^2}$

3 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x}$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2x^2 - x + 1}{8x^2 + 3}}$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{2x - 3}}$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

1 a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x}$ b. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{9 - x^2}$ c. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$

2 a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}$ b. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x + 6} - 3}$ c. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 5} - 3}$

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

1 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} + 3x$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 3} - x)$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} + 2x\sqrt{x}$

2 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{16x^2 + 1} + 4x$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + x + 1}$

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

1 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x + 1}}{x + 2}$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + 1}}{x + 2}$ c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$

2 a. $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \left(1 - \frac{5}{x^2 - 4} \right)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} (-3x^2 + x + 1)$

Exercice 9

- 1 a.** Etudier la limite de la fonction f en 0 telle que : $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}$
- b.** Etudier la limite de la fonction f en 1 telle que :
$$\begin{cases} f(x) = -x + 1; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}; x > 1 \end{cases}$$
- 2** Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = -3x + b; x \geq 1 \\ f(x) = 2x + 5; x < 1 \end{cases}$$
- Déterminer b sachant que f admet une limite finie au point 1.

Exercice 10

- 1** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$ **2** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 6x}$ **3** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x^2}$
- 4** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2 + 2x}$ **5** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3}$ **6** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin x}$

Exercice 11

soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2 + \sin x}{x}$

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{3}{5}$. en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice 12

- 1** En utilisant un encadrement convenable, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin \sqrt{x}}{x^2 + 1} - \sqrt{2} \right] \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \cos x)$$

- 2** Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 0[); \frac{2-x}{x} \leq \frac{\cos(x) - x + 1}{x} \leq -1$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x - x + 1}{x}$

Exercice 13

En utilisant un encadrement convenable, calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + \cos x - x \sin x}{3x^2 + 1}$$

Exercice 14

h est une fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et vérifie :
 $(\forall x \in]0; +\infty[); x^3 - 3x^2 < h(x) < x^3 + x^2$

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{h(x)}{x^3} \right]$
 (justifier vos réponses).

Solutions

Exercice 1

1 On a : $f(x) = \frac{x^2 + x\sqrt{2} - 1}{6}$ qui s'écrit : $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{6}x - \frac{1}{6}$

Donc f est une fonction polynôme d'où $D_f = \mathbb{R}$ (D_f est l'ensemble de définition de f)

2 Déterminons l'ensemble de définition de f où : $f(x) = \frac{3x}{9(x-1)^2 - 1}$

Soit D_f l'ensemble de définition de f , et soit x un réel.

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow 9(x-1)^2 - 1 \neq 0$

► Résolvons l'équation $9(x-1)^2 - 1 = 0$

On a : $9(x-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 9(x-1)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{3} \text{ ou } x-1 = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = \frac{2}{3}$$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right\}$ c'est-à-dire $D_f =]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}; \frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[$

3 Déterminons l'ensemble de définition de f où : $f(x) = \frac{5x-1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

Soit D_f l'ensemble de définition de f et soit x un réel.

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x \neq 0$

► Résolvons l'équation $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

On a : $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - 3x + 2 = 0$$

Les deux solutions de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont 1 et 2 (à vérifier en utilisant Δ).

Donc: $D_f = \mathbb{R} - \{0; 1; 2\}$ (D_f est $\mathbb{R}$ privé de solutions de $(x^3 - 3x^2 + 2x = 0)$)
 D'où: $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$

Exercice 2

1 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-2x-8}$$

Soit D_f l'ensemble de définition de f :

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1-2x \geq 0 \text{ et } x^2-2x-8 \neq 0\}$

Remarque: On résoud l'équation (E): $x^2-2x-8=0$ et l'inéquation:

$$(I): 1-2x \geq 0;$$

Si S_I est l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) et S_E est l'ensemble de solutions de l'équation (E) ; alors : $D_f = S_I - S_E$

Soit x un réel, résolvons l'inéquation : $1-2x \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } 1-2x \geq 0 &\Leftrightarrow 2x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } S_I =]-\infty; \frac{1}{2}]$$

Résolvons l'équation : $x^2-2x-8=0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (1) \times (-8)$$

$$\Delta = 36$$

Donc les solutions de (E) sont $x_1 = \frac{2+6}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$

D'où : D_f est S_I privé de -2 et de 4 (On remarque que $4 \notin S_I$)

$$\text{C'est-à-dire : } D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; \frac{1}{2}]$$

2 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f telle que:

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-4}{2-x}}$$

On a : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{3x-4}{2-x} \geq 0 \text{ et } 2-x \neq 0 \right\}$

$$\triangleright 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

► Tableau de signes de : $\frac{3x-4}{2-x}$

Soit x un réel,

► On a : $3x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ et $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
$3x-4$	-	0	+	+
$2-x$	+	+	0	-
$\frac{3x-4}{2-x}$	-	0	+	-

Donc : $\frac{3x-4}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4}{3}, 2\right]$

D'où : $D_f = \left[\frac{4}{3}, 2\right]$

3 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f telle que :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2}}$$

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2} \geq 0 \text{ et } x^2-x-2 \neq 0\right)$

Réolvons l'inéquation : $\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2} \geq 0$

Réolvons d'abord les deux équations :

(E) : $x^2-2x-15=0$ et (F) : $x^2-x-2=0$

infos :

(E) : $ax^2+bx+c=0$

Si $a \neq 0$ et $a-b+c=0$

alors -1 et $-\frac{c}{a}$ sont les solutions de (E)

Puis dressons le tableau de signe de : $\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2}$

L'équation (F) admet deux solutions : -1 et 2.

Réolvons : $x^2-2x-15=0$ (F)

On a : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15)$
 $= 64$

L'équation (F) admet deux solutions : $x_1 = \frac{2+8}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{2-8}{2} = -3$

Tableau de signes de $\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2}$:

x	$-\infty$	-3	-1	2	5	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 15$	+	0	-	-	-	0	+
$x^2 - x - 2$	+		+	0	-	0	+
$\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - x - 2}$	+	0	-	+	-	0	+

Donc : $D_f =]-\infty ; -3] \cup]-1 ; 2[\cup [5 ; +\infty[$

Exercice 3

1 Déterminons l'ensemble de définition de f telle que : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{3 - |x - 1|}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3 - |x - 1| \neq 0\}$

Réolvons l'équation : $3 - |x - 1| = 0$

Soit x un réel, on a : $3 - |x - 1| = 0 \Leftrightarrow |x - 1| = 3$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 3 \text{ ou } x - 1 = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -2$$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; 4\}$

D'où : $D_f =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 4[\cup]4 ; +\infty[$

2 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{|x| - 1}}$$

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow |x| - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow |x| > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \text{ ou } x < -1$$

Donc : $D_f =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

3 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x - 5| - 3} - 1}$$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow |x - 5| - 3 \geq 0$ et $\sqrt{|x - 5| - 3} - 1 \neq 0$

Réolvons l'inéquation : (I) : $|x - 5| - 3 \geq 0$

On a : $|x - 5| - 3 \geq 0 \Leftrightarrow |x - 5| \geq 3$ ou $x - 5 \leq -3$

$$\Leftrightarrow x \geq 8 \text{ ou } x \leq 2$$

D'où : $S_1 =]-\infty ; 2] \cup [8 ; +\infty[$ (I).

Réolvons l'équation : $\sqrt{|x-5|-3}-1=0$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $\sqrt{|x-5|-3}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{|x-5|-3}=1$

$$\Leftrightarrow |x-5|-3=1$$

$$\Leftrightarrow |x-5|=4$$

$$\Leftrightarrow x-5=4 \text{ ou } \Leftrightarrow x-5=-4$$

$$\Leftrightarrow x=9 \text{ ou } x=1$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S_E = \{1; 9\}$

D'où : $D_f = S_f - S_E$

Donc : $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; 2] \cup [8; 9[\cup]9; +\infty[$

Exercice 4

1 a. On a : $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - x + 1 = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3$ (car f est une fonction polynôme)

b. Calculons $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{2x+2}$:

La fonction $x \mapsto \frac{x-3}{2x+2}$ est une fonction rationnelle définie en 3.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{2x+2} = \frac{3-3}{8} = 0$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{2x+2} = 0$$

c. Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1-2x}{x-2}}$:

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-2x}{x-2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1-2x}{x-2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1-2x}{x-2}} = 1$$

2 Limites de : $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ en a cas où : $f(a) \neq 0$ et $g(a) = 0$.

a. Calculons : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-5}{(x-1)^2}$ on a : $\lim_{x \rightarrow 1} 3x-5 = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$

Puisque : $(x-1)^2 > 0$ pour $x \neq 1$ et $-3 < 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-5}{(x-1)^2} = -\infty$

b. Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 2x - 3}$:

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x - 3 = -3$ (1) et $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2x - 3 = 0$

Étudions le signe de $x^2 + 2x - 3$ au voisinage 1.

Les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ sont 1 et -3.

D'où le tableau de signes de $x^2 + 2x - 3$:

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$	
$x^2 + 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 2x - 3 = 0^-$ (2) ($x^2 + 2x - 3$) est négative à gauche de 1).

De (1) et (2) on déduit que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 2x - 3} = +\infty$

c. Calculons $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x}{2 - \sqrt{x}}$:

On a : $\lim_{x \rightarrow 4^+} x = 4$ (1) et $\lim_{x \rightarrow 4} 2 - \sqrt{x} = 0$

Étudions le signe de $2 - \sqrt{x}$ à droite de 4.

Soit x un réel, on a : $x > 4 \iff \sqrt{x} > 2$
 $\iff 2 - \sqrt{x} < 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 4^+} 2 - \sqrt{x} = 0^-$ (2) ($2 - \sqrt{x} < 0$) à droite de 4).

De (1) et (2) on déduit que : $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x}{2 - \sqrt{x}} = -\infty$

Exercice 5

1 Limites de fonctions polynômes au voisinage de ∞ :

a. On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5 = -\infty$

b. On a : $x^3 - \sqrt{2}x^3 + x + 1 = (1 - \sqrt{2})x^3 + x + 1$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - \sqrt{2}x^3 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \sqrt{2})x^3$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $1 - \sqrt{2} < 0$

Alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \sqrt{2})x^3 = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - \sqrt{2}x^3 + x + 1 = +\infty$

c. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + x + 1)^3$:

Méthode 1 :

Le terme du plus haut degré du polynôme $(-3x^3 + x + 1)^3$ est $(-3x^3)^3$ c'est-à-dire: $-27x^9$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + x + 1)^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -27x^9$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^9 = +\infty$ et $-27 < 0$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + x + 1)^3 = -\infty$$

Méthode 2 :

On calcule d'abord $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + x + 1$ puis on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + x + 1)^3$

2 Limites de fonctions rationnelles au voisinage de ∞ :

$$\begin{aligned} \text{a. On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 7x}{x - x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 7x}{x - x^2} = -\infty$$

$$\begin{aligned} \text{b. On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{(x + 1)^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{(x + 1)^3} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{c. On a : } 2x^2 - (2x + 1)^2 &= 2x^2 - 4x^2 - 4x - 1 \\ &= -2x^2 - 4x - 1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \frac{2x^2 - 7x + 1}{2x^2 - (2x + 1)^2} = \frac{2x^2 - 7x + 1}{-2x^2 - 4x - 1}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{-2x^2 - 4x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-2} = -1$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{2x^2 - (2x + 1)^2} = -1$$

3 Limites de fonctions de la forme $\sqrt{f}$ au voisinage de ∞ où f est une fonction rationnelle positive.

$$\text{a. On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x} = +\infty$$

b. On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{8x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{8x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2x^2 - x + 1}{8x^2 + 3}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

c. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x - 3} = 0^+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{2x - 3}} = 0$

Exercice 6

1 a. Calculons $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x}$

On a : $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ et $x^2 - 2x = x(x - 2)$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x} = 6$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x} = 6$

b. Calculons $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{9 - x^2}$

On a : $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$ et $9 - x^2 = -(x - 3)(x + 3)$ pour tout x un réel,

Donc : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2}{-(x + 3)} = -\frac{1}{6}$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{9 - x^2} = -\frac{1}{6}$

c. Calculons $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$

On a : $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ (1)

Effectuons la division euclidienne de $2x^3 + 3x^2 + 4x + 3$ par $x + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 & x + 1 \\
 -2x^3 - 2x^2 & 2x^2 + x + 3 \\
 \hline
 x^2 + 4x + 3 & \\
 -x^2 - x & \\
 \hline
 3x + 3 & \\
 -3x - 3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Donc : $2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(2x^2 + x + 3)$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x + 3}{x + 2} = 4$

2 a. Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{x(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} \\ &= \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = 0$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} = 0$$

b. Calculons $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x + 6} - 3}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x + 6} - 3} &= \frac{(x - 3)(x + 2)(\sqrt{x + 6} + 3)}{(\sqrt{x + 6} - 3)(\sqrt{x + 6} + 3)} \\ &= \frac{(x - 3)(x + 2)(\sqrt{x + 6} + 3)}{x - 3} \\ &= (x + 2)(\sqrt{x + 6} + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x + 6} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2)(\sqrt{x + 6} + 3) \\ &= 5 \times (\sqrt{9} + 3) \\ &= 30 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x + 6} - 3} = 30$$

c. Calculons $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 5} - 3}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 5} - 3} &= \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x + 5} + 3)}{(\sqrt{x + 5} - 3)(\sqrt{x + 5} + 3)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{(x - 4)(\sqrt{x + 5} + 3)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{\sqrt{x + 5} + 3}{\sqrt{x} + 2} \end{aligned}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 5} + 3}{\sqrt{x} + 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 5} - 3} = \frac{3}{2}$$

Remarque :

On peut écrire $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$ sous la forme : $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} = \frac{\frac{x-4}{\sqrt{x+2}}}{\frac{x-4}{\sqrt{x+5}+3}}$

(On utilise le conjugué du dénominateur et le conjugué du numérateur).

Exercice 7

a. Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x} + 3x$

Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty; -1]$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sqrt{x^2+x} + 3x &= \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})} + 3x = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 3x \\ &= -x\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 3x = x(3-\sqrt{1+\frac{1}{x}}) \quad (\text{car } x < 0) \end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 2$ (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$)

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} x(3 - \sqrt{1+\frac{1}{x}}) = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x} + 3x = -\infty$$

b. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - x$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x > 0, \text{ on a : } \sqrt{x+3} - x &= \sqrt{x^2(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})} - x = |x|\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - x \\ &= x\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - x = x(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 = -1$$

(Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$)

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1) = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - x = -\infty$$

c. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} + 2x\sqrt{x}$

$$\text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}_+^*); x - \sqrt{x} + 2x\sqrt{x} = x\sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 2 \right)$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 2 = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} = +\infty$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 2 \right) = +\infty$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} + 2x\sqrt{x} = +\infty$

2 a. Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{16x^2 + 1} + 4x$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sqrt{16x^2 + 1} + 4x &= \frac{16x^2 + 1 - (4x)^2}{\sqrt{16x^2 + 1} - 4x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{16x^2 + 1} - 4x} \end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{16x^2 + 1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4x = +\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{16x^2 + 1} - 4x = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{16x^2 + 1} - 4x} = 0$

D'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{16x^2 + 1} + 4x = 0$

b. Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

Soit $x > 0$

On a : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ (on utilise le conjugué)

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$

c. Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x + 1})$

Soit x de $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{On a : } x - \sqrt{x^2 + x + 1} &= \frac{(x - \sqrt{x^2 + x + 1})(x + \sqrt{x^2 + x + 1})}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= \frac{x^2 - x^2 - x - 1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{-x - 1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= \frac{x(-1 - \frac{1}{x})}{x + \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}} = \frac{x(-1 - \frac{1}{x})}{x + |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \end{aligned}$$

Puisque : $|x| = x$ (car $x > 0$)

$$\text{alors : } x - \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{x(-1 - \frac{1}{x})}{x(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}})} = \frac{-1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 8

1 a. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + 2}$:

$$\text{Soit } x \text{ un réel strictement positif, on a : } \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + 2} = \frac{x(\sqrt{x} + \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = +\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + 2} = +\infty$$

b. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$:

Méthode 1 :

$$\text{Soit } x \text{ un réel de }]0; +\infty[, \text{ on a : } \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = \frac{\sqrt{x^2(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{x}) = 1$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = 0$$

Méthode 2 :

$$x > 0 ; \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+1}} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{(x + \frac{2}{x})\sqrt{x+1}}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\left(x + \frac{2}{x}\right)\sqrt{x+1}} = 0$; d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = 0$

Méthode 3 :

$$x > 0 ; \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = \frac{\sqrt{x+1}}{(x+2)^2} = \sqrt{\frac{x+1}{(x+2)^2}}$$

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{(x+2)^2}} = 0$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = 0$$

c. Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$:

Soit x un réel l'intervalle $]-\infty ; -\sqrt{3}[$

$$\text{On a : } \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2(1-\frac{3}{x^2})}} = \frac{x}{|x| \sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$$

$$\text{d'où : } \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{x}{-x \sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} \quad (\text{car } x < 0)$$

$$\text{D'où : } = \frac{1}{-\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-\frac{3}{x^2}} = 1 ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} = -1$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} = -1$$

2 a. Calculons $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \left(1 - \frac{5}{x^2-4}\right)$:

$$\text{On a : } (x-2) \left(1 - \frac{5}{x^2-4}\right) = x-2 - \frac{5(x-2)}{(x^2-2)(x+2)} = x-2 - \frac{5}{x+2}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \left(1 - \frac{5}{x^2-4}\right) &= \lim_{x \rightarrow 2} x-2 - \frac{5}{x+2} \\ &= 2-2 - \frac{5}{2+2} = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \left(1 - \frac{5}{x^2-4}\right) = -\frac{5}{4}$

b. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}} \left(x + \frac{1}{x}\right)$:

Méthode 1 :

Soit x un réel de $]0; +\infty[$, on a :
$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{x\sqrt{x+2}}$$
$$= \sqrt{\frac{x^2}{x+2}} + \frac{1}{x\sqrt{x+2}}$$

car : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \frac{x}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x+2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x+2}}$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x+2} = +\infty$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+2}} = 0$ (1)

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x+2}} = +\infty$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x+2}} + \frac{1}{x\sqrt{x+2}} = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$

Méthode 2 :

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[); \frac{1}{\sqrt{x+2}} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x\sqrt{x+2}} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}$
$$= \frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}} \right)$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = 1$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}} = +\infty$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$

c. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(3x^2 + x + \frac{1}{x} \right)$:

Soit x un réel $]0; +\infty[$, on a : $\frac{1}{x\sqrt{x}} \left(-3x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = -3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(-3x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3\sqrt{x} = -\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = -\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(-3x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = -\infty$

Exercice 9

1 a. Étudions la limite de la fonction f en 0 où : $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}$

Soit x un réel non nul.

Si $x > 0$ alors : $f(x) = \frac{x^2 + x}{x} = x + 1$ et si $x < 0$ alors : $f(x) = \frac{x^2 - x}{x} = x - 1$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = -1$

D'où : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$

Donc f n'admet pas de limite en 0.

b. Étudions la limite de f en 1; où : $\begin{cases} f(x) = -x + 1 & ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} & ; x > 1 \end{cases}$

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -x + 1 = 0$

et on a : $(\forall x \in]1; +\infty[); \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x - 2)}{x - 1} = x^2 + x - 2$

(En utilisant la division euclidienne de $x^3 - 3x + 2$ par $x - 1$)

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x - 2 = 0$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$

et par suite f admet une limite en 1: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

2 Déterminons b tel que f admette une limite finie en 1.

$$\text{On a : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} -3x + b = -3 + b$$

$$\text{et on a : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} 2x + 5 = 7$$

Pour que f admette une limite en 1, il faut que: $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

C'est-à-dire : $7 = -3 + b$ donc : $b = 10$

Exercice 10

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$:

$$\text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{1}{3} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2, \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 6x}$:

Soit x un réel tel que $\tan 2x$ est définie et $\sin 6x \neq 0$

$$\text{On a : } \frac{\tan 2x}{\sin 6x} = \frac{\frac{\tan 2x}{x}}{\frac{\sin 6x}{x}}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x} = 6 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = 2$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 2x}{x}}{\frac{\sin 6x}{x}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 6x} = \frac{1}{3}$$

3 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x^2}$:

$$\text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{1 - \cos x}{4x^2} = \frac{1}{4} \frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ et on sait que : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x^2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x^2} = \frac{1}{8}$$

4 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2 + 2x}$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \text{ un réel non nul, on a : } \frac{\sin 2x}{x^2 + 2x} &= \frac{\sin 2x}{x} \times \frac{x}{x^2 + 2x} \\ &= \frac{\sin 2x}{x} \times \frac{1}{x + 2} \end{aligned}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2 + 2x} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2 + 2x} = 1$

5 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3}$:

$$\text{Soit } x \text{ un réel non nul, on a : } \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3} \\ = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3} = \frac{1}{2}$$

6 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin x}$:

Soit x un réel non nul tel que $x > -1$

$$\text{On a : } \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin x} = \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} + 1)\sin x} \\ = \frac{x}{(\sqrt{x+1} + 1)\sin x} \\ = \frac{x}{\sin x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ (car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{)}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2} \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin x} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercice 11

Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{3}{x}$

Soit x un réel strictement positif ($x \in \mathbb{R}^{**}$)

$$\text{On a : } f(x) = \frac{2 + \sin x}{x} \text{ Puisque : } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ et } x > 0$$

$$\text{alors : } \frac{2-1}{x} \leq \frac{2+\cos x}{x} \leq \frac{2+1}{x}$$

$$\text{donc : } \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{3}{x}$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{3}{x} \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Exercice 12

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin \sqrt{x}}{x^2 + 1} - \sqrt{2} \right]$:

Soit x de $\mathbb{R}_+$

On a : $-1 \leq \sin \sqrt{x} \leq 1$ et $x^2 + 1 > 0$ donc : $\frac{-1}{x^2 + 1} < \frac{\sin \sqrt{x}}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2 + 1}$

d'où : $\frac{-1}{x^2 + 1} - \sqrt{2} \leq \frac{\sin \sqrt{x}}{x^2 + 1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{x^2 + 1} - \sqrt{2}$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2 + 1} - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x^2 + 1} - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$ (d'après la propriété des limites et ordre)

► Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \cos x)$:

Soit x un réel

On a : $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc : $-1 \leq -\cos x \leq 1$

d'où : $x - 1 \leq x - \cos x \leq x + 1$ donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x - \cos x \geq x - 1$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos x) = +\infty$

On a d'après ce qui précède : $(x \in \mathbb{R}) ; x - \cos x \leq x + 1$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \cos x) = -\infty$ (d'après la propriété des limites et ordre)

2 Montrons que : $(\forall x \in]-\infty ; 0[) ; \frac{2-x}{x} \leq \frac{\cos(x) - x + 1}{x} \leq -1$

Soit x un réel strictement négatif

On a : $-1 \leq \cos x \leq 1$ d'où : $-1 - x + 1 \leq \cos(x) - x + 1 \leq 1 - x + 1$

c'est-à-dire : $-x \leq \cos(x) - x + 1 \leq 2 - x$

Puisque : $x \in]-\infty ; 0[$ alors : $\frac{2-x}{x} \leq \frac{\cos(x) - x + 1}{x} \leq \frac{-x}{x}$

c'est-à-dire : $\frac{2-x}{x} \leq \frac{\cos(x) - x + 1}{x} \leq -1$

Déduisons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x) - x + 1}{x}$:

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 = -1$

et $(\forall x \in \mathbb{R}^-) ; \frac{2-x}{x} \leq \frac{\cos(x) - x + 1}{x} \leq -1$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x) - x + 1}{x} = -1. \text{ (d'après la propriété des limites et ordre)}$$

Exercice 13

Soit x un réel strictement positif ($x > 0$)

On a : $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc : $-x \leq x \sin x \leq x$ (*)

$$(*) \Rightarrow -x \leq -x \sin x \leq x$$

$$\Rightarrow -1 - x \leq \cos x - x \sin x \leq 1 + x$$

$$\Rightarrow 6x^2 - x - 1 \leq 6x^2 + \cos x - x \sin x \leq 6x^2 + x + 1$$

Puisque : $3x^2 + 1 > 0$

$$\text{alors : } \frac{6x^2 - x - 1}{3x^2 + 1} \leq \frac{6x^2 + \cos x - x \sin x}{3x^2 + 1} \leq \frac{6x^2 + x + 1}{3x^2 + 1}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + x + 1}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - x - 1}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + \cos x - x \sin x}{3x^2 + 1} = 2$$

Exercice 14

► Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$:

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[); x^3 - 3x^2 < h(x) < x^3 + x^2$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 + x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - 3x^2 = 0$ donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$:

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[); h(x) > x^3 - 3x^2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{h(x)}{x^3} \right]$:

Soit x un réel strictement positif

On a : $x^3 - 3x^2 < h(x) < x^3 + x^2$ Donc : $1 - \frac{3}{x} < \frac{h(x)}{x^3} < 1 + \frac{1}{x}$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x} = 1$ donc d'après les propriétés des

limites et l'ordre, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{h(x)}{x^3} \right) = 1$

1 Continuité d'une fonction en un point

Définitions:

► Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a - \alpha; a + \alpha[$ où $\alpha > 0$.

$$(f \text{ est continue en } a) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

► Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a; a + \alpha[$ où $\alpha > 0$.

$$(f \text{ est continue à droite en } a) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$$

► Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a - \alpha; a]$ où $\alpha > 0$.

$$(f \text{ est continue à gauche en } a) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$$

Propriété:

Soit f la fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a - \alpha; a + \alpha[$ où $\alpha > 0$.

$$(f \text{ est continue en } a) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue à droite en } a \\ \text{et} \\ f \text{ est continue à gauche en } a \end{cases}$$

Exercices

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} ; x \neq 3 \\ f(3) = 6 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 3.

Exercice 2

Soit f une fonction numérique définie par:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - x}{x - 2} ; x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 2.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f à droite en 1.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^3 + \sqrt{x} - 2 ; x \geq 0 \\ f(x) = 1 - 3x ; x < 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 8x + 12} & ; x > -2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x+2} & ; -6 \leq x < -2 \\ f(-2) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = -2$.

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2} & ; x \neq -2 \text{ et } x \neq 1 \\ f(1) = a & ; \text{avec } a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que la fonction f soit continue en 1.

Exercice 7

Soit f une fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + bx + 1 ; x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x-1} + 2 ; x \geq 1 \end{cases}$$

avec $b \in \mathbb{R}$

Déterminer la valeur de b pour que la fonction f soit continue en 1.

Solutions

Exercice 1

On a : $f(3) = 6$

Calculons $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6 = f(3)$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$; alors f est continue en 3.

Exercice 2

On a : $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - x}{x-2}$ si $x \neq 2$ et $f(2) = -\frac{3}{4}$

Calculons $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Soit x de $[-2; 2[\cup]2; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) &= \frac{\sqrt{x+2} - x}{x-2} \\ &= \frac{x+2 - x^2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + x)} = \frac{(x-2)(-x-1)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + x)} \\ &= \frac{-x-1}{\sqrt{x+2} + x} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x-1}{\sqrt{x+2} + x} = \frac{-3}{4} = f(2)$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ alors f est continue en 2.

infos

$$\sqrt{\frac{1}{A}} = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Exercice 3

On a : $f(1) = 0$, $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x-1}$ et $x \geq 0$ et $x \neq 0$

Calculons $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Puisque : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \neq f(1)$,

Alors f n'est pas continue à droite en 1.

Exercice 4

On a : $f(0) = -2$ (On remplace dans l'expression où on a $x \geq 0$)

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 + \sqrt{x} - 2 = -2 = f(0)$$

$$\text{et on a : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 1 - 3x = 1 \text{ c'est-à-dire : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \neq f(0)$$

Donc f est continue à droite en zéro et non continue à gauche en zéro.

D'où f n'est pas continue en zéro.

Exercice 5

On a : $f(-2) = \frac{1}{4}$

Calculons $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x)$

On a : $(\forall x \in]-2; +\infty[) ; f(x) = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+6)} = \frac{x+3}{x+6}$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x+3}{x+6} = \frac{1}{4} = f(-2)$

C'est-à-dire : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = f(-2)$

D'où f est continue à droite en -2 (1)

On a : $(\forall x \in]-6; -2[) ; f(x) = \frac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$

$$= \frac{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}{(x+2)(\sqrt{x+6}+2)}$$

$$= \frac{(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x+6}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+6}+2}$$

Alors : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{1}{\sqrt{x+6}+2} = \frac{1}{4}$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = f(-2)$

Par suite f est continue à gauche de -2 (2)

De (1) et (2) on déduit que f est continue en -2 .

Exercice 6

Rappelons que f est continue en 1 si et seulement si : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

pour : $x \neq -2 ; x \neq 1$ on a : $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$

$$= \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$

et on a : $f(1) = a$

Donc : f est continue en 1 si et seulement si $a = \frac{1}{3}$.

Exercice 7

f est continue en 1 si et seulement si : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

▶ On a : $f(1) = 2$ (on a remplacé dans la deuxième expression : $x \geq 1$)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{x-1} + 2 = 2 = f(1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} 3x^2 + bx + 1 = 4 + b$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } (f \text{ est continue en } 1) &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \\ &\Leftrightarrow 4 + b = 2 \\ &\Leftrightarrow b = -2 \end{aligned}$$

Par suite f est continue en 1 si et seulement si $b = -2$

2 Continuité sur un intervalle

Définition:

- ▶ f est continue sur $]a; b[\Leftrightarrow f$ est continue en tout point de $]a; b[$
- ▶ f est continue sur l'intervalle $[a; b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a; b[\\ f \text{ est continue à droite en } a \\ f \text{ est continue à gauche en } b \end{cases}$

Propriétés:

- Opérations sur les fonctions continues.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un nombre réel.

- ▶ Les fonctions $f + g$ et $f \times g$ et kf sont continues sur I .
- ▶ Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors : $\frac{f}{g}$ est continue sur I .
- ▶ Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- ▶ La fonction $\sin$ et la fonction $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- ▶ Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- ▶ La fonction $\tan$ est continue sur chaque intervalle de la forme :

$$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

► La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Propriétés de la composée:

► Si f est une fonction continue sur un intervalle I et g est une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .

► Si f est une fonction continue sur l'intervalle I et positive sur I , alors la fonction: $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est continue sur I .

Exercices

Exercice 8

Étudier la continuité de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants:

1 $f: x \mapsto -3x^4 + 5x^2 - x + 2$; $I = [-1; +\infty[$

2 $f: x \mapsto \frac{5x^2 - x + 1}{x + 3}$; $I =]-\infty; -4]$ 4 $f: x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$; $I =]0; 5]$

3 $f: x \mapsto \frac{\cos x}{x^2 + 1}$; $I = \mathbb{R}$

5 $f: x \mapsto \sqrt{x} \sin x$; $I = [1; +\infty[$

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}; x < -1 \\ f(x) = 5x^2 + x - 2; x \geq -1 \end{cases}$$

1 Déterminer D l'ensemble de définition f .

2 Étudier la continuité de f sur D .

Exercice 10

Soit f la fonction numérique définie par:

$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x-1} + x + 3 & ; x > 1 \\ f(x) = -\frac{x^2 + x + 2}{x - 2} & ; x < 1 \\ f(1) = 4 \end{cases}$$

1 Déterminer D l'ensemble de définition f .

2 Étudier la continuité de f sur D .

Solutions

Exercice 8

1 $f: x \mapsto -3x^4 + 5x^2 - x + 2$

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$.

2 $f: x \mapsto \frac{5x^2 - x + 1}{x + 3}$

La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est continue en tout point de : $\mathbb{R} - \{-3\}$; et en particulier sur l'intervalle $I =]-\infty; -4]$.

3 $f: x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

La fonction f est continue sur l'intervalle $I =]0; 5]$ car c'est la somme de deux fonctions continues qui sont u et v tel que:

► $u: x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (fonction usuelle) et en particulier sur l'intervalle $]0; 5]$.

► $v: x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition ($\mathbb{R}^*$ car c'est une fonction rationnelle) et en particulier sur $]0; 5]$.

4 $f: x \mapsto \frac{\cos x}{x^2 + 1}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est le quotient de deux fonctions continues u et v sur $\mathbb{R}$ ($f = \frac{u}{v}$) qui sont :

► $u: x \mapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

► $v: x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

5 $f: x \mapsto \sqrt{x} \sin x$

La fonction f est continue sur $[1; +\infty[$ car c'est le produit de deux fonctions continues u et v ($f = uv$) qui sont:

► $u: x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et en particulier sur $[1; +\infty[$ (fonction usuelle).

► $v: x \mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[1; +\infty[$.

Exercice 9

1 Déterminons D

Soit x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \text{On a : } x \in D &\Leftrightarrow (x^2 - 1 \neq 0 \text{ et } x < -1) \text{ ou } (x \geq -1) \\ &\Leftrightarrow (x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x < -1) \text{ ou } (x \geq -1) \\ &\Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup [-1; +\infty[\end{aligned}$$

Donc : $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

2 Étudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$:

► Sur l'intervalle $]-\infty; -1[$, f est continue, car c'est la restriction d'une fonction rationnelle qui est continue en tout point de $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

► Sur l'intervalle $[-1; +\infty[$, f est continue car, c'est la restriction d'une fonction polynôme qui est continue sur $\mathbb{R}$.

► Étudions la continuité de f à gauche en -1 :

- On a : $f(-1) = 2$ (On a remplacé dans la deuxième expression : $x \geq -1$)

- Calculons $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \text{ de }]-\infty; -1[; \text{ On a : } f(x) &= \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} \\ &= \frac{(x+1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x-1}{x-1} \end{aligned}$$

$$\text{Alors : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{3x-1}{x-1} = 2 = f(-1)$$

Donc f est continue à gauche en -1 .

On a : f est continue sur $]-\infty; -1[$ et sur $[-1; +\infty[$ et continue à gauche en

-1 : Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

1 Déterminons D :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} x \in D &\Leftrightarrow (\underbrace{x-1 \geq 0 \text{ et } x > 1}_{x=1 \text{ ou } x < 1 \text{ ou } x > 1}) \text{ ou } (\underbrace{x-2 \neq 0 \text{ et } x < 1}_{x \in]1; +\infty[\cup]-\infty; 1[\cup \{1\}}) \\ &\Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\cup]-\infty; 1[\cup \{1\} \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty; +\infty[\end{aligned}$$

Donc : $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

2 Étudions la continuité de f sur D :

► Sur l'intervalle $]1; +\infty[$: $f(x) = 2\sqrt{x-1} + x + 3$

- La fonction : $x \mapsto x-1$ est continue et positive sur $]1; +\infty[$

Donc la fonction $u: x \mapsto \sqrt{x-1}$ est continue sur $]1; +\infty[$.

- La fonction : $v: x \mapsto x+3$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction affine) et en particulier sur $]1; +\infty[$.

Donc : $f = 2u + v$ est continue sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

► Sur l'intervalle $]-\infty; 1[$: $f(x) = -\frac{x^2+x+2}{x-2}$

f est continue sur l'intervalle $]-\infty; 1[$ (restriction d'une fonction rationnelle)

► Étudions la continuité de f en 1.

On a : $f(1) = 4$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} 2\sqrt{x-1} + x + 3 \\ &= 4 \\ &= f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x^2+x+2}{x-2} \\ &= 4 \\ &= f(1) \end{aligned}$$

Donc f est continue à droite en 1.

Donc f est continue à gauche en 1.

Par suite f est continue en 1.

Et puisque f est continue sur $]1; +\infty[$ et sur $]-\infty; 1[$

alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

info:

► Si f est continue sur I et positive sur I , alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .

3 Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriétés:

► L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

► L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

■ Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

► Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [m, M]$ où m est la valeur minimale de f et M est la valeur maximale de f sur $[a, b]$

► Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors le tableau suivant permet de déterminer la forme de l'intervalle $f(I)$.

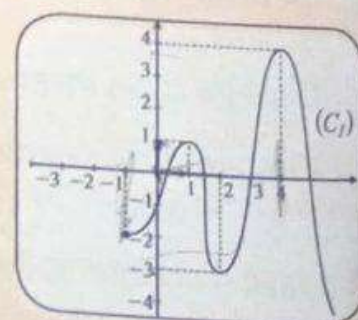
L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$]a; b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a; b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$[a; +\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$]a; +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$] -\infty; b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$] -\infty; b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$] -\infty; +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$

Exercices

Exercice 11

(Lecture graphique)

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique f



1 Déterminer D l'ensemble de définition de f .

Est-ce que f est continue sur D ?

2 Déterminer l'image par la fonction f de chacun des intervalles suivants:
 $] -1; 4 [$; $] 0; 4 [$; $] -1; 3 [$; $] -1; 1 [$ et $] -1; +\infty [$

Exercice 12 Lecture graphique

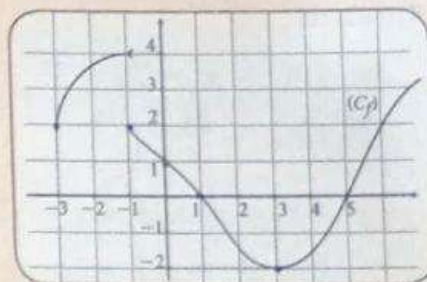
La courbe ci-contre est celle d'une fonction f numérique.

1 Déterminer D l'ensemble de définition f

2 f est-elle continue sur D ?

3 Déterminer $f([-3; -1[)$; $f] - 3; -1]$

$f([-1; 5])$ et $f([-3; 3])$ et $f([-3; +\infty[)$



Exercice 13 Lecture d'un tableau de variations.

Le tableau de variations suivant est celui d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
f	5		0	
		↘	↗	↘
			-4	-2

Déterminer : $f([3; +\infty[)$; $f([-2; 3])$; $f] - \infty; 3]$; $f] - \infty; -2[)$; $f(\mathbb{R})$

Exercice 14

Soit f une fonction continue sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$,

et son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	-4	0	1	2	3	5	$+\infty$
f			2		$+\infty$			$+\infty$
		↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗
		-2			-1		0	
	-3			-∞		-2		

1 Déterminer: $f([0; 1[)$; $f] - \infty; 0]$; $f]1; +\infty[)$; $f] - \infty; 1[)$ et $f]1; 3]$

2 Encadrer $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

a. $-4 \leq x \leq 0$

b. $x \in [2; 3[$

c. $2 < x \leq 5$

Déterminer l'image de l'intervalle I_k par la fonction f dans chacun des cas suivants :

- 1 $f(x) = x^2 - 2x + 3$; $I_1 = [1; +\infty[$; $I_2 =]-\infty; 1]$
- 2 $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$; $I_1 = [0; 3]$; $I_2 =]-1; +\infty[$; $I_3 =]-\infty; -2]$
- 3 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$; $I_1 =]-\infty; -2]$; $I_2 =]-2; 1]$
 $I_3 =]1; +\infty[$; $I_4 = [-2; +\infty[$; $I_5 =]-\infty; 1[$; $I_6 = \mathbb{R}$
- 4 $f(x) = x\sqrt{x+1}$; $I_1 = [0; +\infty[$; $I_2 = [-1; \frac{2}{3}]$

Solutions

Exercice 11

- 1 $D = [-1; +\infty[$
la fonction f est continue sur $[-1; +\infty[$ (sa courbe est une ligne continue)
- 2 $f([-1; 1]) = [-2; 1]$; $f([-1; 3]) = [-3; 1]$
 $f([0; 4]) = [-3; 4]$; $f(]-1; 4]) = [-3; 4]$
 $f([-1; +\infty]) =]-\infty; 4]$

Exercice 12

- 1 $D = [-3; +\infty[$
- 2 f n'est pas continue sur D , car n'est pas continue en -1 . (car f est continue à droite en -1 et n'est pas continue à gauche -1).
- 3 $f([-3; -1]) = [2; 4]$; $f(]-3; -1]) = [2; 4]$
 $f([-1; 5]) = [-2; 2]$; $f([-3; 3]) = [-2; 4]$
 $f(]-3; +\infty]) = [-2; +\infty[$

Exercice 13

On a f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-2, 3]$

Donc : $f([-2; 3]) = [f(-2), f(3)]$; d'où : $f([-2; 3]) = [-4, 0]$

On a : f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[3; +\infty[$

Donc : $f([3; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(3)]$; d'où : $f([3; +\infty[) =]-2; 0]$

de même $f(]-\infty; -2]) =]-4; 5]$;

$f(]-\infty; 3]) = [-4; 5[$;

et $f(\mathbb{R}) = [-4; 5[$

-4 est la valeur minimale de f sur $]-\infty, 3]$.

Exercice 14

1 ▶ $f(-\infty; 0]) =]-3; 2]$

▶ $f(1; 3]) = [-2; +\infty[$

▶ $f(1; +\infty[) = [-2; +\infty[$

▶ $f(0; 1[) =]-\infty; 2]$

▶ $f(-\infty; 1[) =]-\infty; 2]$

2 a. $-4 \leq x \leq 0 \Rightarrow f(-4) \leq f(x) \leq f(0)$ (car f est croissante sur $[-4; 0]$)
 $\Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$

b. $x \in [2; 3[\Rightarrow 2 \leq x < 3$ (car f est strictement décroissante sur $[2; 3]$)
 $\Rightarrow f(2) \geq f(x) > f(3)$
 $\Rightarrow -1 \geq f(x) > -2$
 $\Rightarrow -2 < f(x) \leq -1$

c. Sur l'intervalle $]2; 5]$; on a : f est continue mais non monotone.

On a : $f(]2; 5]) = [-2; 0]$

(-2 est la valeur minimale de f sur $]2; 5]$ et 0 est la valeur maximale de f sur l'intervalle $]2; 5]$)

Donc : $x \in]2; 5] \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 0$

Exercice 15

1 $f(x) = x^2 - 2x + 3$

- Continuité:

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme;

- variations:

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	2	$+\infty$

▶ Détermination de $f(1; +\infty[)$

Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante

Donc : $f(1; +\infty[) = [f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$
 $= [2; +\infty[$

► Détermination de $f(]-\infty; 1])$

Sur l'intervalle $] -\infty; 1]$, on a f est continue et strictement décroissante.

$$\text{Donc : } f(]-\infty; 1]) = [f(1); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[\\ = [2; +\infty[$$

Remarque : On peut lire $f([1; +\infty[)$ et $f(]-\infty; 1])$ directement à partir du tableau des variations (voir exercices 2 et 4).

2 $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$

- Continuité:

La fonction f est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty]$.

- Variation :

$$\text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; +\infty]$.

► Détermination des images des intervalles; on a : $f([0; 3]) = [f(3); f(0)] \\ = [\frac{9}{4}; 3]$

(car f est continue et strictement décroissante sur $[0; 3]$)

$$\text{On a : } f(]-1; +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)[$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{et : } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} 2x+3 &= 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x+1 &= 0^+ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$$

$$\text{Donc : } f(]-1; +\infty[) =]2; +\infty[$$

$$\text{On a : } f(]-\infty; -2]) = [f(-2); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [1; 2[$$

$$\left(\begin{aligned} \text{car : } f(-2) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 2 \end{aligned} \right)$$

3 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Continuité:

La fonction f est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition $\mathbb{R}$ (f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme).

Variation :

et : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$		$\frac{10}{3}$		$-\frac{7}{6}$	$+\infty$

Image des intervalles :

► $f(]-\infty; -2]) =]-\infty; \frac{10}{3}]$

► $f([-2; 1]) = [-\frac{7}{6}; \frac{10}{3}]$

► $f([1; +\infty[) = [-\frac{7}{6}; +\infty[$

► $f([-2; +\infty[) = [-\frac{7}{6}; +\infty[$

► $f(]-\infty; 1]) =]-\infty; \frac{10}{3}]$

► $f(\mathbb{R}) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

4 $f(x) = x\sqrt{x+1}$

Continuité:

► La fonction $x \mapsto x+1$ est continue et positive sur $[-1; +\infty[$; donc la fonction $u: x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

► La fonction $v: x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-1; +\infty[$.

Donc : la fonction $f = uv$ est continue sur $[-1; +\infty[$.

et on a : $(\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) = \sqrt{x+1} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$= \frac{2(\sqrt{x+1})^2 + x}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

La ligne de $f'(x)$ est celui de $3x+2$.

(car : $(\forall x \in]-1; +\infty[); 2\sqrt{x+1} > 0$)

de plus ► $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x+2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

► $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x+2 > 0$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$$

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f	0	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	0	$+\infty$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{2}{3} + 1} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Image des intervalles :

- ▶ $f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0; +\infty[$ (car f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$)
- ▶ $f\left(\left[-1; -\frac{2}{3}\right]\right) = \left[f\left(-\frac{2}{3}\right); f(-1)\right] = \left[-\frac{2\sqrt{3}}{9}; 0\right]$ (car f est continue et strictement décroissante sur $\left[-1; -\frac{2}{3}\right]$)

4 Théorème des valeurs intermédiaires

Propriétés:

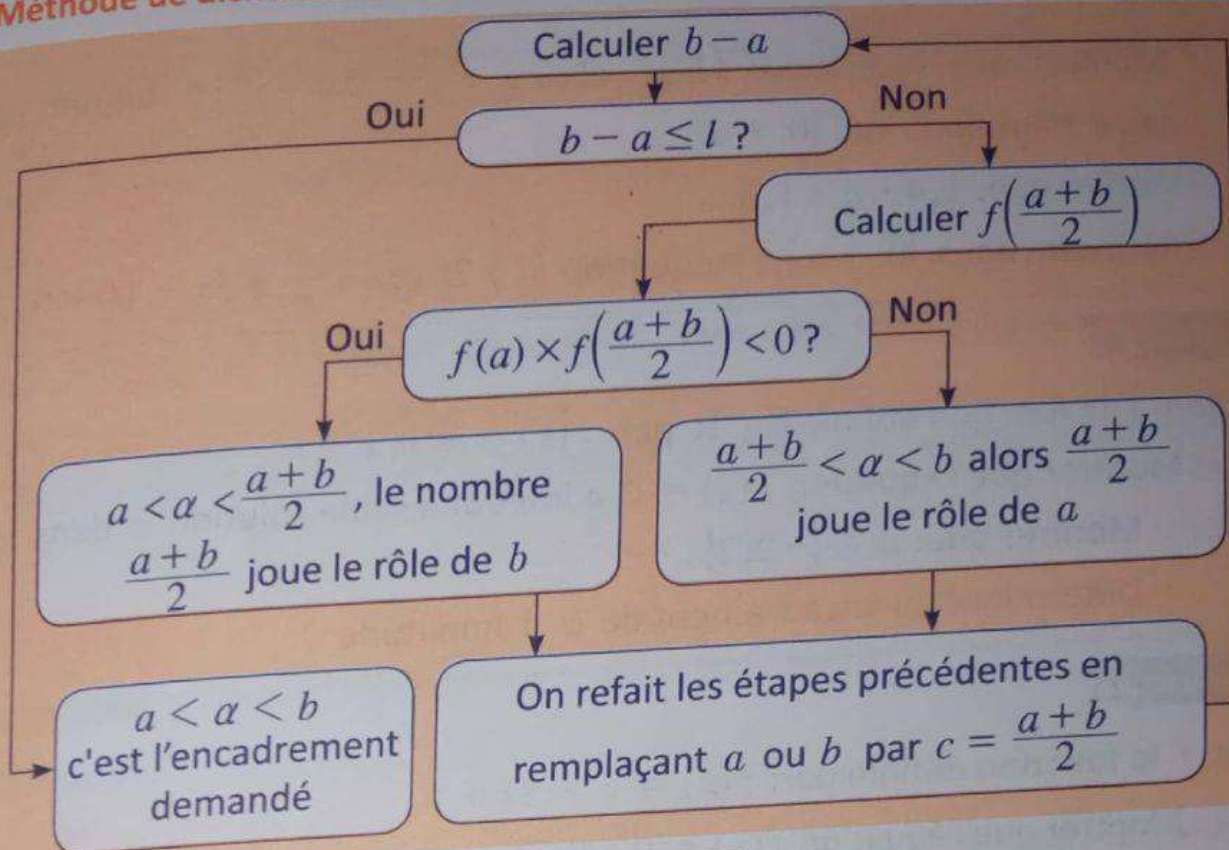
- ▶ Si f est une fonction continue sur $[a; b]$; alors pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel α de $[a; b]$ telle que : $f(\alpha) = \beta$
- ▶ Si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]a; b[$.
- ▶ Si f est continue sur $[a; b]$ et strictement monotone sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]a; b[$.
- ▶ Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I , alors pour tout k de $f(I)$ il existe un réel unique α de I telle que: $f(\alpha) = k$

5 Dichotomie

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors il existe un unique réel α de $]a; b[$ solution de l'équation: $f(x) = 0$.

- ▶ On détermine un encadrement de α d'amplitude ℓ , on utilise la méthode de dichotomie.

Méthode de dichotomie



Exercices

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x + 1$

- 1 Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[0; 1]$.
- 2 Montrer que l'équation $f(x) = -7$ admet au moins une solution sur $[-1; 0]$.
- 3 Montrer que la courbe de f coupe l'axe des abscisses au moins en un point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[-1; 0]$.

Exercice 17

- 1 Montrer que l'équation: $(E_1): 2x\sqrt{x+3} - x^2 - 3x + 5 = 0$ admet au moins une solution sur $[3; 4]$.
- 2 Montrer que l'équation: $(E_2): 3|x+1| + \sqrt{x+2} - x^3 = 4$ admet au moins une solution sur $[1; 2]$.
- 3 Montrer que l'équation: $(E_3): \sqrt{x^2+1} - 2x^3 = x$ admet au moins une solution sur $[0; 1]$.

Exercice 18

- 1 Montrer que l'équation: $x^5 + 4x^3 + 5x - 7 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que: $0 < \alpha < 1$.
- 2 Vérifier que: $0,840 < \alpha < 0,841$

Exercices 19

- 1 Montrer que l'équation: $(E): -2x\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5x = -10$ admet une seule solution a sur $]0; +\infty[$.
- 2 Vérifier que: $1,4 < a < 1,5$.
- 3 Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation $(I): 2x\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 5x - 10 < 0$.

Exercices 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 + x + 1$

- 1 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.
- 2 a. Montrer que: $\alpha \in]-2; 2[$.
- b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 2.

Exercices 21

Soit f la fonction définie par: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

- 1 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $] -1; 1[$.
- 2 Déterminer un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2} .

Solutions

Solution 16

1 Montrons que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0; 1]$.

► La continuité: $f: x \mapsto 3x^3 - 5x^2 + 4x + 1$

f est une fonction polynôme définie et continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0; 1]$.

► Calcul de $f(0)$ et $f(1)$.

On a: $f(0) = 1$ et $f(1) = 3 - 5 + 4 + 1 = 3$.

Alors: $f(0) \leq 2 \leq f(1)$; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[0; 1]$.

2 Montrer que l'équation $f(x) = -7$ admet au moins une solution sur $[-1; 0]$.

- La fonction f est continue sur $[-1; 0]$ (car c'est une fonction polynôme).

- et on a: $f(0) = 1$ et $f(-1) = -11$.

Alors: $f(-1) \leq -7 \leq f(0)$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = -7$ admet

au moins une solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.

3 Montrons que la courbe de f coupe l'axe (Ox) au moins une fois sur l'intervalle $[-1; 0]$.

- La fonction f est continue sur $[-1; 0]$.

- et : $f(0) = 1$; $f(-1) = -11$

Donc : $f(-1) < 0 < f(0)$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[-1; 0]$.

Donc la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses au moins une fois sur $[-1; 0]$.

Exercice 17

1 On pose: $f(x) = 2x\sqrt{x+3} - x^2 - 3x + 5$; $x \geq -3$

l'équation (E_1) devient: $f(x) = 0$

► La continuité:

La fonction: $x \mapsto x + 3$ est continue et positive sur $[-3; +\infty[$, donc la fonction $u: x \mapsto \sqrt{x+3}$ est continue sur $[-3; +\infty[$, et en particulier $[3; 4]$.

Les deux fonctions: $v: x \mapsto 2x$ et $w: x \mapsto -x^2 - 3x + 5$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $[3; 4]$ (fonctions polynômes).

Donc la fonction $f = uv + w$ est continue sur $[3; 4]$.

- Calcul de $f(3)$ et $f(4)$.

On a : $f(3) = 6\sqrt{6} - 9 - 9 + 5$

$$= -13 + 6\sqrt{6} \simeq 1,7$$

et $f(4) = 8\sqrt{7} - 16 - 12 + 5$

$$= -23 + 8\sqrt{7} \simeq -1,8$$

On a : $f(3) > 0$ et $f(4) < 0$.

Donc : $f(3) \times f(4) < 0$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation, $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[3; 4]$.

2 On pose: $g(x) = 3|x+1| + \sqrt{x+2} - x^3$; $x \geq -2$

On a : l'équation (E_2) équivaut à $g(x) = 4$.

► Continuité:

- La fonction $x \mapsto x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme), donc la fonction $u: x \mapsto |x + 1|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[1; 2]$.

- La fonction $x \mapsto x + 2$ est continue et positive sur $[-2; +\infty[$; donc $v: x \mapsto \sqrt{x+2}$ est continue sur $[-2; +\infty[$ et en particulier sur $[1; 2]$.
- La fonction $w: x \mapsto -x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme), en particulier sur l'intervalle $[1; 2]$.

Donc la fonction: $g = 3u + v + w$ est continue sur l'intervalle $[1; 2]$.

► Calcul de $g(1)$ et $g(2)$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } g(1) &= 3|2| + \sqrt{3} - 1 \\ &= 5 + \sqrt{3} \simeq 6,7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et : } g(2) &= 3|3| + \sqrt{5} - 8 \\ &= 1 + \sqrt{5} \simeq 3,2 \end{aligned}$$

Donc: $g(2) < 4 < g(1)$ (4 est compris entre $g(2)$ et $g(1)$).

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 4$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[1; 2]$.

Remarque :

$$\text{Si on pose : } g(x) = 3|x+1| + \sqrt{x+2} - x^3 - 4$$

$$\text{On aura : } (E_2) \Leftrightarrow g(x) = 0$$

$$\text{3 On a : } \sqrt{x^2+1} - 2x^3 = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 2x^3 - x = 0$$

$$\text{On pose : } h(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x^3 - x ; x \in \mathbb{R}$$

$$\text{On a : } h(x) = 0 \Leftrightarrow (E_3)$$

► **Continuité:**

- La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $u: x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $[0; 1]$.

- La fonction: $v: x \mapsto -2x^3 - x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $[0; 1]$.

Donc la fonction: $h = u + v$ est continue sur $[0; 1]$.

► **Calcul de $h(0)$ et $h(1)$:**

$$\text{On a : } h(0) = 1 \text{ et } h(1) = \sqrt{2} - 3 \simeq -1,6$$

$$\text{Donc : } h(1) < 0 < h(0); \text{ c'est-à-dire } h(0) \times h(1) < 0$$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0; 1]$.

Donc l'équation: $\sqrt{x^2 + 1} - 2x^3 = x$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 18

1 On pose : $f(x) = x^5 + 4x^3 + 5x - 7$

► La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme).

► On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 5$

puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 \geq 0$ et $x^4 \geq 0$, alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 5x^4 + 12x^2 + 5 > 0$

c'est-à-dire : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$

donc : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

► L'image de $\mathbb{R}$ par f :

On a : f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

donc : $f(\mathbb{R}) = f(-\infty; +\infty) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$
 $=]-\infty; +\infty[$

$$\left(\begin{array}{l} \text{car: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty \end{array} \right)$$

On a : $0 \in f(\mathbb{R})$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

2 Vérifions que : $0,840 < \alpha < 0,841$

On a : $f(0,840) \simeq -0,01$

$f(0,841) \simeq 0,005$

donc : $f(0,840) < 0 < f(0,841)$

c'est-à-dire : $f(0,840) < f(\alpha) < f(0,841)$

Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc : $0,840 < \alpha < 0,841$.

Exercice 19

1 On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = -2x\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5x + 10 ; x > 0$$

On a : $(E) \Leftrightarrow f(x) = 0$.

► La continuité:

- La fonction: $u: x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et en particulier sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- La fonction: $v: x \mapsto -2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0; +\infty[$.

- La fonction: $w: x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$ (car w est une fonction rationnelle de définition $\mathbb{R}^*$ et $]0; +\infty[\subset \mathbb{R}^*$).

- La fonction: $t: x \mapsto -5x + 10$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $]0; +\infty[$ (fonction polynôme).

Donc la fonction $f = uv + w + t$ est continue sur $]0; +\infty[$.

► **Variations:**

$$\begin{aligned} \text{On a : } (\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) &= -2\sqrt{x} - 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 5 \\ &= -2\sqrt{x} - \sqrt{x} - 5 \\ &= -3\sqrt{x} - 5 \end{aligned}$$

Puisque : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) < 0$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

► **Déterminons l'image de $]0; +\infty[$ par f :**

On a : f est une fonction continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Alors: } f(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \right[$$

$$\text{Or } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x\sqrt{x} - 5x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 10 &= 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{et } \left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} &= +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-2x\sqrt{x} - 5x + 10) &= 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

donc : $f(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$

puisque: $0 \in f(]0; +\infty[)$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution a sur $]0; +\infty[$.

D'où l'équation: $-2x\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5x = 10$ admet une seule solution a sur $]0; +\infty[$.

2 **Vérifions que : $1,4 < a < 1,5$**

On a : $f(1,4) \simeq 0,4$ et $f(1,5) \simeq -0,58$

donc : $f(1,5) < 0 < f(1,4)$

c'est-à-dire : $f(1,5) < f(a) < f(1,4)$

donc : $1,4 < a < 1,5$ (car f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$).

2 Résolvons dans $]0; +\infty[$ l'inéquation (I): $2x\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 5x - 10 < 0$

Soit x un réel de $]0; +\infty[$,

$$\text{On a : } 2x\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 5x - 10 < 0 \Leftrightarrow -2x\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5x + 10 > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) > f(a) \quad (\text{car: } f(a) = 0)$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < a$$

(car f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$)

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est: $S =]0; a[$

Exercice 20

1 Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

Comme la fonction f est une fonction polynôme, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus : $f'(x) = 3x^2 + 1$ pour tout réel x .

On a f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (car: $3x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x)

et on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; donc : $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

donc 0 admet un seul antécédent dans $\mathbb{R}$ par f .

l'équation $f(x) = 0$ admet donc une seule solution dans $\mathbb{R}$.

2 a. Montrons que : $\alpha \in]-2; 2[$

$$\text{On a : } f(2) = 11 \text{ et } f(-2) = -9$$

donc : $f(2) \times f(-2) < 0$ donc d'après théorème des valeurs intermédiaires:

$$\alpha \in]-2; 2[$$

b. Déterminons un encadrement de α d'amplitude 2.

- Le centre de l'intervalle $[-2; 2]$ est $\frac{-2+2}{2} = 0$; $f(0) = 1$ et $f(-2) = -9$.

donc : $\alpha \in [-2; 0]$ (car $f(0) > 0$ et $f(-2) < 0$)

D'où l'encadrement $-2 \leq \alpha \leq 0$ pour d'amplitude 2.

Exercice 21

1 Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle

$]-1; 1[$ avec $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

► la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) en particulier sur $[-1; 1]$.

► $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$ donc : $f(1) \times f(-1) < 0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel α de $] -1; 1[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

C'est-à-dire l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α sur $] -1; 1[$.

► Unicité de α sur $] -1; 1[$.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

Dans l'intervalle $[-1; 1]$ on a : $f'(x) \leq 0$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Donc f est strictement décroissante sur $[-1; 1]$ d'où α est unique.

2 Déterminons un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2} .

On utilise la méthode de Dichotomie:

- Le centre de l'intervalle $[-1; 1]$ est $\frac{-1+1}{2} = 0$; $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$.

Donc : $\alpha \in [0; 1]$ (car $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$).

l'amplitude de l'encadrement $0 \leq \alpha \leq 1$ est 1. ($1 > 25 \times 10^{-2}$).

- Le centre de l'intervalle $[0; 1]$ est $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$; $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$ et $f(0) = 1$

Donc : $\alpha \in [0; \frac{1}{2}]$ (car $f(\frac{1}{2}) < 0$ et $f(0) > 0$).

L'amplitude de l'encadrement $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ est $\frac{1}{2} - 0 = 0,5$. ($0,5 > 25 \times 10^{-2}$)

- Le centre de l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$ est $\frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$; $f(\frac{1}{4}) = \frac{17}{64}$ et $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

Donc : $\alpha \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$ (car $f(\frac{1}{4}) > 0$ et $f(\frac{1}{2}) < 0$).

L'amplitude de l'encadrement $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ est 0,25 c'est-à-dire : 25×10^{-2}

Donc : $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.

6 Fonction réciproque

Propriété 1:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$,

$$\text{et on a : } \begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases}$$

Propriété 2:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors sa fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et vraie dans le même sens que f sur I .

Propriété 3:

Les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.

Exercices

Exercice 22

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Dans chacun des cas suivants:

a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

1 $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$ et $I =]0; +\infty[$

2 $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $I = [-1; +\infty[$

3 $f(x) = \frac{3x+7}{x+2}$ et $I =]-2; +\infty[$

4 $f(x) = -2(x-1)^2 + 5$ et $I = [1; +\infty[$

Exercice 23

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Dans chacun des cas suivants:

a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

1 $f(x) = -3x^2 + 3x + 1$ et $I =]-\infty; 0[$ ✓

2 $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ et $I =]-\infty; -1]$

3 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ et $I = [2; +\infty[$ ✓

4 $f(x) = x + \sqrt{-x} - 1$ et $I = [-\frac{1}{4}; 0]$ ✓

Exercice 24

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Dans chacun des cas suivants:

a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

1 $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$ et $I =]-1; +\infty[$

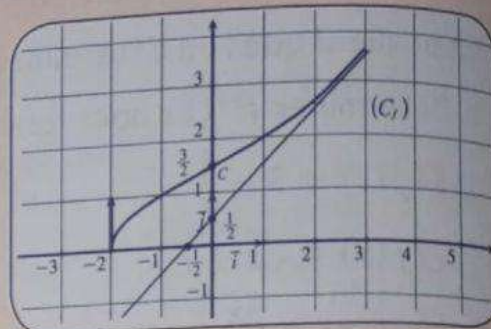
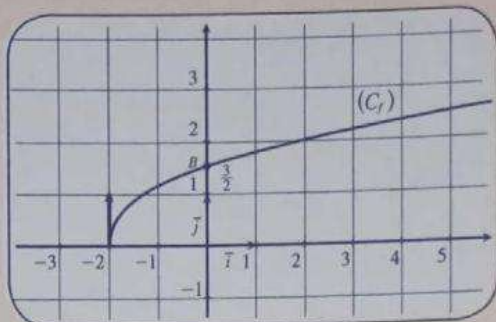
2 $f(x) = x - 2 + 2\sqrt{x+1}$ et $I =]-1; +\infty]$

3 $f(x) = \sqrt{x-2} + x + 1$ et $I = [2; +\infty[$

4 $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 3}$ et $I =]-\infty; 0]$

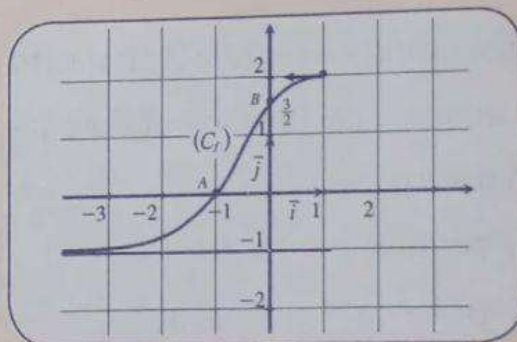
Exercice 25

Construire dans le même repère orthonormé la courbe représentative de la fonction réciproque de la fonction f , dans chacun des cas suivants:



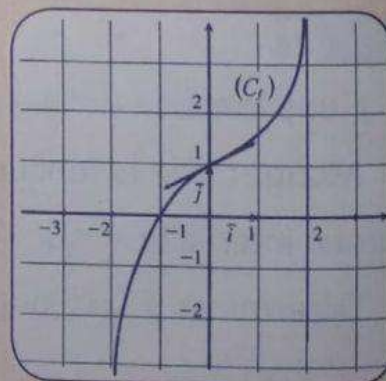
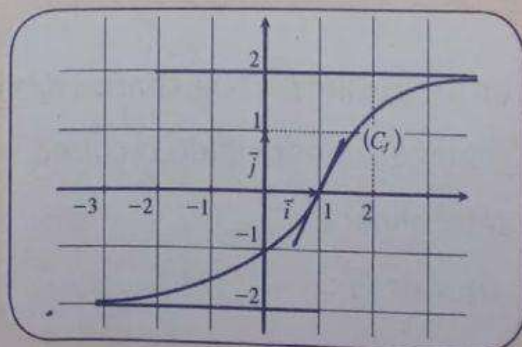
Exercice 26

Construire dans le même repère orthonormé la courbe de la fonction f^{-1} .



Exercice 27

Construire dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f^{-1} pour chacune des deux courbes suivantes:



Solutions

Exercice 22

1 a. On a : $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$; $I =]0; +\infty[$

La continuité :

La fonction f est continue $]0; +\infty[$

(car c'est la restriction la

fonction rationnelle : $x \mapsto \frac{3x-1}{x}$)

La monotonie :

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{1}{x^2}$ Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) > 0$

D'où f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I

Alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J avec :

$$J = f(I)$$

$$\text{et on a : } J =]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty; 3[$$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

Soit x un élément $]-\infty; 3[$ et y un élément de $]0; +\infty[$; tel que : $y = f^{-1}(x)$

$$\text{On a : } f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{1}{y} = x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x - 3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3-x}$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in]-\infty; 3[) ; f^{-1}(x) = \frac{1}{3-x}$$

2 $f(x) = \sqrt{x+1}$; $I = [-1; +\infty[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

La continuité :

La fonction : $x \mapsto x+1$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ donc

infos :

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue et} \\ \text{strictement} \\ \text{monotone sur} \\ \text{intervalle } I : \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ admet une fonction} \\ \text{réciproque } f^{-1} \text{ définie} \\ \text{sur un intervalle } J \\ \text{avec : } J = f(I) \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(y) = x \\ y \in I \end{array} \right.$$

f est continue sur $[-1; +\infty[$.

► la monotonie de f :

$$\text{On a : } (\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\text{alors : } (\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) > 0$$

donc f est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$.

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle

$$J = f([-1; +\infty[).$$

$$J = f([-1; +\infty[) = [f(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0; +\infty[$$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J = [0; +\infty[$ et y un élément de $I = [-1; +\infty[$ tel que: $f^{-1}(x) = y$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y+1} = x \\ &\Leftrightarrow y+1 = x^2 \\ &\Leftrightarrow y = x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in [0; +\infty[); f^{-1}(x) = x^2 - 1$$

$$\text{3 } I = f(x) = \frac{3x+7}{x+2};]-2; +\infty[$$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque:

► La continuité :

La fonction f est continue sur $]-2; +\infty[$ car c'est la restriction d'une fonction rationnelle.

► la monotonie :

$$\text{On a : } (\forall x \in]-2; +\infty[); f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

alors: $(\forall x \in]-2; +\infty[); f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]-2; +\infty[$.

puisque f est continue et strictement décroissante sur $] -2; +\infty[$.

alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J avec:
 $J = f(I)$.

$$\text{et on a : } J = f(I) = f(]-2; +\infty[) \\ =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)[=]3; +\infty[\quad \text{Donc : } J =]3; +\infty[$$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J =]3; +\infty[$; y un élément de $I =]-2; +\infty[$ telle que: $f^{-1}(x) = y$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \frac{3y+7}{y+2} = x \\ &\Leftrightarrow 3y+7 = x(y+2) \\ &\Leftrightarrow 3y - xy = -7 + 2x \\ &\Leftrightarrow (3-x)y = -7 + 2x \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-7+2x}{3-x} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in]3; +\infty[) ; f^{-1}(x) = \frac{-7+2x}{3-x}$$

4 $f(x) = -2(x-1)^2 + 5$; $I = [1; +\infty[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

► **Continuité :**

La fonction f est continue sur l'intervalle $[1; +\infty[$ car c'est la restriction la fonction polynôme : $x \mapsto -2x^2 + 4x + 3$

► **La monotonie :**

$$\text{On a : } (\forall x \in [1; +\infty[) ; f'(x) = -4(x-1)$$

$$\text{et on a : } x \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0$$

$$\Rightarrow -4(x-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \leq 0$$

$$\text{alors : } (\forall x \in [1; +\infty[) ; f'(x) \leq 0 \text{ et } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

c'est-à-dire f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

Donc la fonction f est continue et strictement décroissante sur $I = [1; +\infty[$

d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J avec $J = f(I)$.

$$\begin{aligned} \text{et on a : } J &= f(I) = f([1; +\infty[) \\ &=]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(1)[=]-\infty; 5] \end{aligned}$$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J =]-\infty; 5]$. et y un élément de $I = [1; +\infty[$ avec : $f^{-1}(x) = y$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow -2(y-1)^2 + 5 = x \\ &\Leftrightarrow (y-1)^2 = \frac{5-x}{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(y-1)^2} = \sqrt{\frac{5-x}{2}} \\ &\Leftrightarrow |y-1| = \sqrt{\frac{5-x}{2}} \\ &\Leftrightarrow y-1 = \sqrt{\frac{5-x}{2}} \\ &\Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{\frac{5-x}{2}} \end{aligned} \quad ; \left(\begin{array}{l} \text{on a : } y \geq 1 \\ \text{donc : } |y-1| = y-1 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in]-\infty; 5]) ; f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{\frac{5-x}{2}}$$

Exercice 23

1 $f(x) = -3x^2 + 3x + 1 ; =]-\infty; 0[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

► **Continuité :**

La fonction f est continue sur $]-\infty; 0]$ car c'est la restriction d'une fonction polynôme.

► **Monotonie :**

► on a : $(\forall x \in]-\infty; 0]) ; f'(x) = -6x + 3$

on a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x = -3$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \notin]-\infty; 0]$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-6x + 3$		$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	X		

on a : $(\forall x \in]-\infty; 0]) ; f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur $I =]-\infty; 0]$, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J avec : $J = f(I)$.

On a : $J = f(I) = f(]-\infty; 0]) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(0)] =]-\infty; 1]$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J =]-\infty; 1]$ et y un élément de $I =]-\infty; 0]$; avec:

$$f^{-1}(x) = y$$

$$\begin{aligned} \text{on a : } f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow -3y^2 + 3y + 1 = x \end{aligned}$$

Méthode 1: (utilisation de la forme canonique)

$$\begin{aligned} \text{On a : } f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow -3y^2 + 3y = x - 1 \\ &\Leftrightarrow -3(y^2 - y) = x - 1 \\ &\Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1-x}{3} \quad \left(y \leq 0 \Rightarrow y - \frac{1}{2} \leq 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7-4x}{12} \quad \Rightarrow \left| y - \frac{1}{2} \right| = -\left(y - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow \left| y - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{\frac{7-4x}{12}} \\ &\Leftrightarrow -\left(y - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{7-4x}{12}} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7-4x}{12}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7-4x}{12}} \text{ pour tout } x \leq 1.$$

Méthode 2: (On calcule le discriminant Δ)

$$\text{On a : } f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow -3y^2 + 3y + 1 - x = 0$$

$$\text{On a : } c = 1 - x \text{ et } b = 3 \text{ et } a = -3$$

$$\begin{aligned}\text{alors : } \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 9 - 4(-3)(1-x) \\ &= 9 + 12 - 12x \\ &= 21 - 12x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{On a : } \Delta > 0 \text{ car : } x \leq 1 &\Rightarrow -12x \geq -12 \\ &\Rightarrow 21 - 12x \geq 9 \\ &\Rightarrow \Delta > 0\end{aligned}$$

Donc l'équation admet deux solutions :

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{21 - 12x}}{-6} = \frac{3 - \sqrt{21 - 12x}}{6}$$

$$\text{et } y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{21 - 12x}}{6}$$

$$\text{donc : } f^{-1}(x) = y_1 \text{ ou } f^{-1}(x) = y_2$$

Recherche de l'expression adéquate :

$$\text{On a : } f(0) = 1 \text{ donc : } f^{-1}(1) = 0$$

On remplace x par 1 dans l'expression de y_1 : on obtient :

$$y_1 = \frac{3 - \sqrt{21 - 12}}{6} = \frac{3 - \sqrt{9}}{6} = 0$$

On remplace x par 1 dans l'expression de y_2 : on obtient :

$$y_2 = \frac{3 + \sqrt{21 - 12}}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

or $1 \neq 0$ donc y_2 n'est pas la bonne solution.

$$\text{donc : } f^{-1}(x) = y_1$$

$$\text{d'où : } \forall x \in]-\infty; 0]; f^{-1}(x) = \frac{3 - \sqrt{21 - 12x}}{6}$$

$$\text{vérifier que : } f^{-1}(x) \text{ s'écrit aussi : } f^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7 - 4x}{12}}$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}; I =]-\infty; -1]$$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

► **Continuité :**

On a f est continue sur l'intervalle $]-\infty; -1]$ car c'est la restriction d'une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$.

► **Variations de f :**

$$\begin{aligned}\text{On a : } (\forall x \in]-\infty; -1]); f'(x) &= \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2(x - 1)(x + 1)}{(x^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

Le tableau de signes de f' est le suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$-2x^2 + 2$	$-$	0	$+$	$-$
$f'(x)$	$-$			

On a : $(\forall x \in]-\infty; -1]) ; f'(x) \leq 0 ; (f' \text{ s'annule uniquement en } -1)$

alors f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -1]$

donc la fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$, par conséquent elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J

avec : $J = f(I)$

On a : $J = f(]-\infty; -1])$

$$= [f(-1); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [-1; 0[$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{car : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{array} \right)$$

Donc : $J = [-1; 0[$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ avec x de J :

Soit x un élément de $J = [-1; 0[$ et y un élément de $I =]-\infty; -1]$ avec :

$$f^{-1}(x) = y$$

$$\text{On a : } f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y}{y^2 + 1} = x$$

$$\Leftrightarrow xy^2 + x = 2y$$

$$\Leftrightarrow xy^2 - 2y + x = 0$$

On calcule Δ le discriminant du trinôme précédent d'inconnue le réel y (car $x \neq 0$)

$$\text{On a : } \begin{cases} a = x \\ b = -2 \\ c = x \end{cases} \quad \text{alors : } \begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4 - 4x^2 \\ &= 4(1 - x^2) \end{aligned}$$

(On a : $(\forall x \in [-1; 0]) ; \Delta \geq 0$)

$$\text{Donc : } y_1 = \frac{2 - \sqrt{4(1 - x^2)}}{2x} = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$\text{ou } y_2 = \frac{2 + \sqrt{4(1 - x^2)}}{2x} = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

donc : $f^{-1}(x) = y_1$ ou $f^{-1}(x) = y_2$

Déterminons l'expression adéquate :

On a : $f^{-1}(-1) = -1$ n'est pas un bon contre exemple car avec cette valeur : y_1 et y_2 donnent le même résultat.

On choisit dans ce cas une autre valeur sur I .

Par exemple : $f(-2) = \frac{-4}{5} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{-4}{5}\right) = -2$

On peut aussi calculer la limite en 0^- . on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f^{-1}(x) = -\infty$

$$\begin{aligned} \text{On a : } y_1 &= \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ &= \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x(1+\sqrt{1-x^2})} \\ &= \frac{x^2}{x(1+\sqrt{1-x^2})} \\ &= \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} y_1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} y_1 \neq -\infty$; donc : $f^{-1}(x) \neq y_1$ (y_1 n'est pas la solution adéquate)

D'où : $f^{-1}(x) = y_2$

Donc : $(\forall x \in [-1; 0]) ; f^{-1}(x) = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

B $(\forall x \in [2; +\infty]) ; f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

► **Continuité:**

On a : f est continue sur $[2; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues sur $[2; +\infty[$ à savoir : $u: x \mapsto x$ et $v: x \mapsto \sqrt{x-1}$: $f = \frac{u}{v}$
(car la fonction $x \mapsto x-1$ est continue et strictement positive sur $[2; +\infty[$).

► **Variations de f :**

$$\begin{aligned} \text{On a : } (\forall x \in [2; +\infty]) ; f'(x) &= \frac{\sqrt{x-1} - \frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} \\ &= \frac{2(x-1) - x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{x-2}{2x\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \text{ et } 2x\sqrt{x-1} > 0 \\ \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

donc f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$ alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J , avec : $J = f(I)$

$$\begin{aligned} \text{On a : } J &= f(I) \\ &= f([2; +\infty[) \\ &= [f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[\\ &= [2; +\infty[\quad ; (\text{car } f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x-1}} = \sqrt{\frac{x}{1-\frac{1}{x}}}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } J = I = [2; +\infty[$$

b) Déterminons $f^{-1}(x)$; avec x de J :

Soit x un élément de $J = [2; +\infty[$ et y un élément de $I = [2; +\infty[$ avec : $f^{-1}(x) = y$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y-1}} = x \\ &\Leftrightarrow y = x\sqrt{y-1} \\ &\Leftrightarrow y^2 = x^2(y-1) \\ &\Leftrightarrow y^2 - x^2y + x^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{On a : } c = x^2 \text{ et } b = -x^2 \text{ et } a = 1$$

$$\begin{aligned} \text{On calcul le discriminant : } \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= x^2(x^2 - 4) \\ \Delta &= x^2(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

$$\text{On a } \Delta \geq 0 \text{ (car : } x \geq 2) \text{ et : } \sqrt{x^2} = |x| = x \text{ (car : } x \geq 2)$$

$$\text{donc : } y_1 = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2 - 4}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

$$\text{D'où : } f^{-1}(x) = y_1 \text{ ou } f^{-1}(x) = y_2$$

► Déterminons l'expression adéquate de $f^{-1}(x)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$$

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} y_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2 - 4}}{2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} y_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } f^{-1}(x) = y_1 = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in [2; +\infty[); f^{-1}(x) = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

$$\text{4 } f(x) = x + \sqrt{-x} - 1; I = \left[-\frac{1}{4}; 0\right]$$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque :

► **Continuité:**

La fonction f est continue sur I car c'est la somme de deux fonctions u et v continues sur I .

$u: x \mapsto x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur I .

et $x \mapsto -x$ est continue et positive sur I . d'où : $v: x \mapsto \sqrt{-x}$ est continue sur I .

► **Variation de f :**

$$\text{on a : } \left(\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right]\right); f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{-x}} = \frac{2\sqrt{-x} - 1}{2\sqrt{-x}}$$

Le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur $2\sqrt{-x} - 1$

$$\text{car : } \left(\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right]\right); 2\sqrt{-x} > 0$$

Méthode 1: (résolution de l'équation et l'inéquation)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{-x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{-x} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x} > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x > \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{4}$$

$$\text{or : } -\frac{1}{4} \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right]$$

$$\text{donc : } \left(\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right]\right); f'(x) \leq 0$$

Méthode 2: (Encadrement)

$$\begin{aligned}
 x \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right] &\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x < 0 \\
 &\Rightarrow 0 < -x \leq \frac{1}{4} \\
 &\Rightarrow 0 < \sqrt{-x} \leq \sqrt{\frac{1}{4}} \\
 &\Rightarrow 0 < 2\sqrt{-x} \leq 1 \\
 &\Rightarrow -1 < 2\sqrt{-x} - 1 \leq 0 \\
 &\Rightarrow f'(x) \leq 0
 \end{aligned}$$

Donc f est strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$.

Puisque la fonction f est continue et strictement décroissante sur $I = \left[-\frac{1}{4}; 0\right]$ alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J avec: $J = f(I)$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } J &= f(I) \\
 &= f\left(\left[-\frac{1}{4}; 0\right]\right) \\
 &= \left[f(0); f\left(-\frac{1}{4}\right)\right] \quad (\text{car } f \text{ est décroissante}) \\
 &= \left[-1; -\frac{3}{4}\right]
 \end{aligned}$$

b. Déterminons l'expression $f^{-1}(x)$ avec x de J :

Soit x un élément de $J = \left[-1; -\frac{3}{4}\right]$ et y un élément de $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$ tel que:

$$y = f^{-1}(x)$$

$$\text{on a : } f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow y + \sqrt{-y} - 1 = x \\
 &\Leftrightarrow -(\sqrt{-y})^2 + \sqrt{-y} - 1 = x \\
 &\Leftrightarrow -[(\sqrt{-y})^2 - \sqrt{-y}] = x + 1 \\
 &\Leftrightarrow -\left[\left(\sqrt{-y} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = x + 1 \\
 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{-y} - \frac{1}{2}\right)^2 = -x - 1 + \frac{1}{4} \\
 &\Leftrightarrow \left|\sqrt{-y} - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{-x - \frac{3}{4}} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{-y} - \frac{1}{2} = -\sqrt{-x - \frac{3}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{car: } -\frac{1}{4} \leq y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -y \leq \frac{1}{4} \\ \Rightarrow 0 \leq \sqrt{-y} \leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{-y} - \frac{1}{2} \leq 0 \\ \Rightarrow \left| \sqrt{-y} - \frac{1}{2} \right| = -\left(\sqrt{-y} - \frac{1}{2} \right) \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc: } f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow \sqrt{-y} = \frac{1}{2} - \sqrt{-x - \frac{3}{4}} \\ &\Leftrightarrow -y = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{-x - \frac{3}{4}} \right)^2 \\ &\Leftrightarrow y = -\left(\frac{1}{2} - \sqrt{-x - \frac{3}{4}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où: } \left(\forall x \in \left[-1; -\frac{3}{4} \right] \right); f^{-1}(x) = -\left(\frac{1}{2} - \sqrt{-x - \frac{3}{4}} \right)^2$$

Remarque: on peut calculer le discriminant Δ en posant $Y = \sqrt{-y}$ et l'équation devient : $Y^2 - Y - x - 1 = 0$

Exercice 24

1 $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1; I =]-1; +\infty[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

► Continuité:

La fonction f est continue sur l'intervalle I , comme somme et produit des fonctions continues sur I à savoir:

$u: x \mapsto x+1$ est continue et positive sur l'intervalle I .

donc la fonction: $v: x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur I .

La fonction: $w: x \mapsto -1$ est continue sur I (fonction constante).

Donc: $f = uv + w$ est continue sur I .

► Variations de f :

$$\begin{aligned} \text{On a: } (\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) &= \sqrt{x+1} + (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}\sqrt{x+1} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

Donc: $(\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) > 0$

infos:

$$A > 0; \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$$

d'où f est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur $I = [-1; +\infty[$ alors f admet une fonction numérique f^{-1} définie sur l'intervalle J , avec: $J = f(I)$

$$\begin{aligned} \text{On a : } J &= f(I) \\ &= f([-1; +\infty[) \\ &= [f(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[\\ &= [-1; +\infty[= I \end{aligned}$$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J = [-1; +\infty[$ et y un élément de $I = [-1; +\infty[$ avec: $f^{-1}(x) = y$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow (y+1)\sqrt{y+1} - 1 = x \\ &\Leftrightarrow (y+1)\sqrt{y+1} = x+1 \\ &\Leftrightarrow (y+1)^2(y+1) = (x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow (y+1)^3 = (x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow y+1 = \sqrt[3]{(x+1)^2} \\ &\Leftrightarrow y = -1 + \sqrt[3]{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{On a : } x \in [1; +\infty[\\ \text{et } y \in [-1; +\infty[\\ \text{d'où : } y+1 \geq 0 \\ \text{et } x+1 \geq 0 \end{array} \right)$$

Donc : $(\forall x \in [-1; +\infty[); f^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{(x+1)^2}$

2 $f(x) = x - 2 + 2\sqrt{x+1}$; $I = [-1; +\infty[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque :

► **Continuité:** la fonction f est continue sur I comme somme de deux fonctions continues sur I qui sont:

- $u: x \mapsto x - 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur I (fonction affine).
- $v: x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur I car $x \mapsto x+1$ est continue et positive sur I .

et on a : $f = u + 2v$

► **Variations:**

$$\text{On a : } (\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) = 1 + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) > 0$$

donc f est strictement croissante sur $I = [-1; +\infty[$.

Puisque f est continue strictement croissante sur l'intervalle I , alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

On a : $J = f(I) = f([-1; +\infty[) = [f(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-3; +\infty[$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J = [-3; +\infty[$ et y un élément de $I = [-1; +\infty[$

avec : $f^{-1}(x) = y$

on a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow y - 2 + 2\sqrt{y+1} = x$$

$$\Leftrightarrow y + 1 + 2\sqrt{y+1} = x + 3$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y+1})^2 + 2\sqrt{y+1} + 1 = x + 4$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y+1} + 1)^2 = x + 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y+1} + 1 = \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y+1} = -1 + \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow y + 1 = (-1 + \sqrt{x+4})^2$$

$$\Leftrightarrow y = -1 + (-1 + \sqrt{x+4})^2$$

Donc : $(\forall x \in [-3; +\infty[) ; f^{-1}(x) = -1 + (-1 + \sqrt{x+4})^2$

3 $f(x) = \sqrt{x-2} + x + 1 ; I = [2; +\infty[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

Continuité :

La fonction f est continue sur $I = [2; +\infty[$ comme somme de deux fonctions continues sur I qui sont :

► $u: x \mapsto x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur I (fonction affine).

► $v: x \mapsto \sqrt{x-2}$ est continue sur I (car $x \mapsto x-2$ est continue et positive sur I).

Variation :

On a : $(\forall x \in]2; +\infty[) ; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} + 1$

alors : $(\forall x \in]2; +\infty[) ; f'(x) > 0$

d'où f est strictement croissante sur $I = [2; +\infty[$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur I ; alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$.

$J = f(I) = f([2; +\infty[) = [f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [3; +\infty[$ (car f est décroissante)

b. Expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J = [3; +\infty[$ et y un élément de $I = [2; +\infty[$ telle que : $f^{-1}(x) = y$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{y-2} + y + 1 = x \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{y-2} + y - 2 = x - 3 \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{y-2})^2 + \sqrt{y-2} = x - 3 \\
 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = x - 3 \\
 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-2} + \frac{1}{2}\right)^2 = x - \frac{11}{4} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{y-2} + \frac{1}{2} = \sqrt{x - \frac{11}{4}} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{y-2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{11}{4}} \\
 &\Leftrightarrow y - 2 = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{11}{4}}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow y = 2 + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{11}{4}}\right)^2
 \end{aligned}$$

infos:

$$X^2 + aX = \left(X + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$X^2 - aX = \left(X - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Donc: $(\forall x \in [3; +\infty[); f^{-1}(x) = 2 + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{11}{4}}\right)^2$

Remarque:

On peut utiliser le discriminant Δ au lieu de la forme canonique.

On pose: $Y = \sqrt{y-2}$, on aura: $Y^2 + Y + 3 - x = 0$

$a = 1$ et $b = 1$ et $c = 3 - x \dots$

4 $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 3}; I =]-\infty; 0]$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque :

Continuité: la fonction f est continue sur I car c'est la restriction d'une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$.

Variation: on a: $(\forall x \in]-\infty; 0]); f'(x) = \frac{2x(x^2 + 3) - 2x(x^2 - 2)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{10x}{(x^2 + 3)^2}$

donc: $(\forall x \in]-\infty; 0]); f'(x) \leq 0$ et on a: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

donc f est strictement décroissante sur I .

Puisque la fonction f est continue et strictement décroissante sur I , alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J avec: $J = f(I)$

On a: $J = f(I) = f(]-\infty; 0])$

$= [f(0); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$ (car f est décrois

$= \left[-\frac{2}{3}; 1[$ sante)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de l'intervalle $J = \left[-\frac{2}{3}; 1\right]$ et y un élément de l'intervalle $I =]-\infty; 0]$ tel que : $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

$$\iff \frac{y^2 - 2}{y^2 + 3} = x$$

$$\iff y^2 - 2 = xy^2 + 3x$$

$$\iff y^2 - xy^2 = 2 + 3x$$

$$\iff (1 - x)y^2 = 2 + 3x$$

$$\iff y^2 = \frac{2 + 3x}{1 - x}$$

$$\iff \sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{2 + 3x}{1 - x}}$$

$$\iff |y| = \sqrt{\frac{2 + 3x}{1 - x}}$$

$$\iff y = -\sqrt{\frac{2 + 3x}{1 - x}} \quad (\text{car: } y \leq 0 \Rightarrow |y| = -y)$$

Donc : $\left(\forall x \in \left[-\frac{2}{3}; 1\right]\right); f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{2 + 3x}{1 - x}}$

Exercice 25

La courbe de f^{-1} est le symétrique de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

1 On a : $f([-2; +\infty[) = [0; +\infty[$

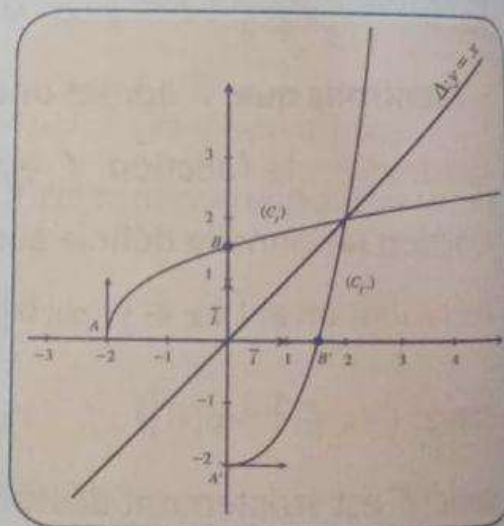
Donc : $D_{f^{-1}} = [0; +\infty[$

- On a : (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

Donc la courbe f^{-1} admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

► On a : $f(0) = \frac{3}{2}$ d'où : $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

► On a : (C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(-2; 0)$, donc la courbe de f^{-1} admet une demi-tangente horizontale au point $A'(0; -2)$.



2 - On a : $f([-2; +\infty]) = [0; +\infty[$
donc : $D_{f^{-1}} = [0; +\infty[$

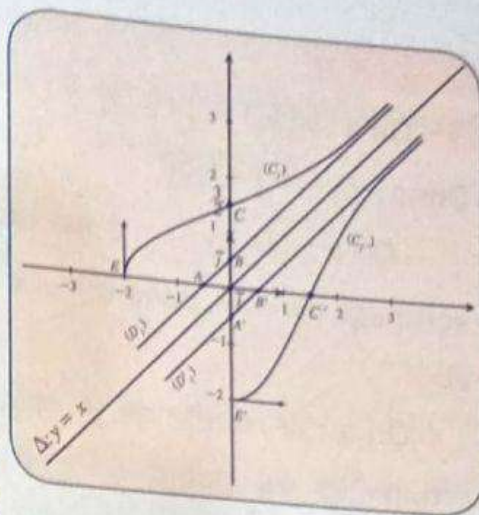
- On a : (C_f) admet une asymptote oblique (D_1) au voisinage de $+\infty$ passant par les deux points $A(-\frac{1}{2}; 0)$ et $B(0; \frac{1}{2})$ (son équation est : $y = x + \frac{1}{2}$).

Donc la courbe de f^{-1} admet une asymptote oblique (D'_1) au voisinage de $+\infty$ passant

par les deux points $A'(0; -\frac{1}{2})$ et $B'(\frac{1}{2}; 0)$ (son équation $y = x - \frac{1}{2}$)

- La courbe de f coupe l'axe des ordonnées au point $C(0; \frac{3}{2})$ donc la courbe de f^{-1} coupe l'axe des abscisses au point $C'(\frac{3}{2}; 0)$

- La courbe f admet une demi-tangente verticale au point $E(-2; 0)$ donc la courbe de f^{-1} admet une demi-tangente horizontale au point $E'(0; -2)$.



Exercice 26

► On a : $f(]-\infty; 1]) =]-1; 2]$

Donc : $D_{f^{-1}} =]-1; 2]$

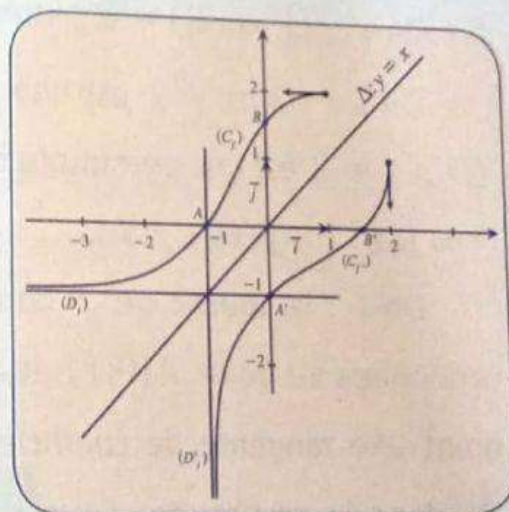
► On a : la courbe de f admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ d'équation $y = -1$.

Donc la courbe de f^{-1} admet une asymptote verticale (D'_1) d'équation $x = -1$.

► On a : la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point $A(-1; 0)$, donc la courbe de f^{-1} coupe l'axe des ordonnées au point $A'(0; -1)$.

► On a : la courbe de (C_f) coupe l'axe des ordonnées au point $B(0; \frac{3}{2})$ donc la courbe de f^{-1} coupe l'axe des abscisses au point $B'(\frac{3}{2}; 0)$.

► On a : la courbe de (C_f) admet une demi-tangente horizontale au point $C(1; 2)$ donc la courbe de f^{-1} admet une demi-tangente verticale au point $C'(2; 1)$.



Exercice 27

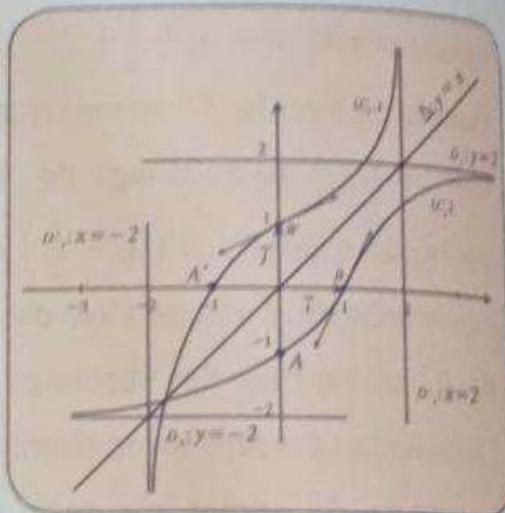
1 ▶ On a : $f(\mathbb{R}) =]-2; 2[$

Donc : $D_{f^{-1}} =]-2; 2[$

- On a : $(D_1): y = -2$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$, donc $(D'_1): x = -2$ est une asymptote verticale à la courbe de f^{-1} .

▶ On a : la courbe de f coupe l'axe des ordonnées au point $A(0; -1)$ donc la courbe f^{-1} coupe l'axe au point $A'(-1; 0)$.

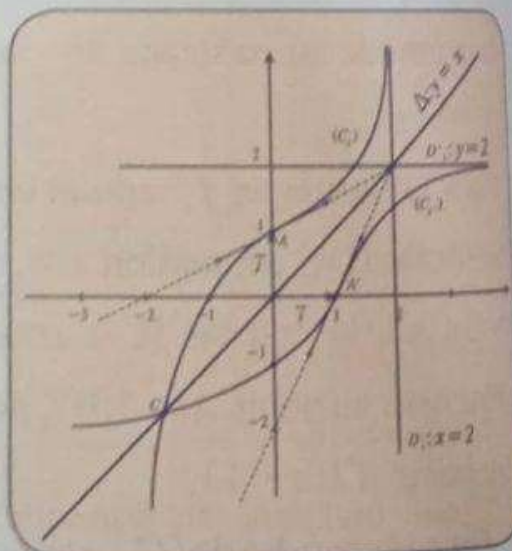
- On a : la courbe de f coupe l'axe des abscisses au point $B(1; 0)$, et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{2}{1} = 2$, donc la courbe de f^{-1} coupe l'axe des ordonnées au point $B'(0; 1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ (voir figure).



2 ▶ On a : $f(]-\infty; 2[) = \mathbb{R}$, donc : $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

▶ On a : $(D_1): x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe de f , donc $(D'_1): y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe de f^{-1} au voisinage de $+\infty$ (car: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$).

▶ On a : la courbe de f coupe l'axe des ordonnées au point $A(0; 1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ donc la courbe de f^{-1} coupe l'axe des abscisses au point $A'(1; 0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 2.



▶ On a : la courbe de f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$ donc $(C_{f^{-1}})$ admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $-\infty$ (car: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$).

▶ On a : la courbe de f coupe l'axe des abscisses au point $B(-1; 0)$ donc la

courbe de f^{-1} coupe l'axe des ordonnées au point $B'(0; -1)$.

► On a : la courbe de f coupe l'axe de symétrie (Δ) au point C donc la courbe de f^{-1} coupe aussi l'axe de symétrie au point C . (voir figure)

7 Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Définitions :

La fonction $x \mapsto x^n$ (tel que $n \in \mathbb{N}^*$) est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$, sa fonction réciproque f^{-1} est définie sur $[0; +\infty[$ par $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

$$\text{On a : } \begin{cases} y = x^n \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[n]{y} \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Propriétés :

Soient x et y de $\mathbb{R}^+$.

$$1 \quad \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$3 \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$5 \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

$$7 \quad \text{Si } y \neq 0 \text{ donc } \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$2 \quad (\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$4 \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$$

$$6 \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x^m}$$

$$8 \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$$

Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif.

► Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et x un réel strictement positif.

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*.$$

Exercices

Exercice 28

1 Écrire dans l'ordre croissant les nombres suivants: $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{2}$ et $\sqrt[5]{2}$.

2 Écrire dans l'ordre décroissant les nombres suivants: $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt{5}$.

3 Simplifier les nombres: $A = \frac{10\sqrt{2^5} \times 12\sqrt{8^8}}{\sqrt[4]{4^3} \times \sqrt[4]{16} \times \sqrt[6]{2^{15}}}$, et

$$B = \sqrt{2}(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} - \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}})$$

4 Montrer que: $(a+b)^{\frac{5}{2}} = (a^5 + ba^4)^{\frac{1}{2}} + 2(a^3b^2 + a^2b^3)^{\frac{1}{2}} + (ab^4 + b^5)^{\frac{1}{2}}$
avec $a > 0$ et $b > 0$.

Exercice 29

1 Déterminer les nombres a et b tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); x^3 - 3x - 18 = (x - 3)(x^2 + ax + b)$$

2 Soit t le réel défini par: $t = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$

a. Montrer que t est une solution de l'équation: $x^3 - 3x - 18 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

b. En déduire que : $t = 3$.

Exercice 30

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes:

a. $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$

b. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$

2 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$

Exercice 31

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x}$

2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$

3 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt[3]{3x+2} - 2}$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{2x-1}$

5 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x - \sqrt[3]{1-x})$

6 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x+4} - 2}$

7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - x$

8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - 2x$

Exercice 32

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 3x + 1}$

2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{4 - 3x}$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} - 2x$

4 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{-3x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

Exercice 33

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}$

2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 3x}{2 + \sqrt[3]{x}}$

4 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x+4} - 2}{x - 2}$

Exercice 34

Calculer les deux limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[3]{x}}$

Exercice 35

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

a. Montrer dans chacun des deux cas que f admet une fonction réciproque f^{-1} .

b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

1 $f(x) = x^3 + 1$

et $I = \mathbb{R}$

2 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

et $I = \mathbb{R}$

Exercice 28

1 Ordonnons les nombres: $\sqrt[4]{2}$ et $\sqrt{2}$ et $\sqrt[5]{2}$:

On pose : $a = \sqrt[4]{2}$ et $b = \sqrt{2}$ et $c = \sqrt[5]{2}$.

Les nombres a ; b et c sont positifs, pour les ranger, il suffit de «se débarrasser» des notations $\sqrt[4]{}$ et $\sqrt{}$ et $\sqrt[5]{}$ pour cela, il suffit d'ordonner a^{20} et b^{20} et c^{20} (car 20 est le plus petit multiple commun de 4, 2 et 5).

On a : $a^{20} = (\sqrt[4]{2})^{20} = (2^{1/4})^{20} = 2^5$

$b^{20} = (\sqrt{2})^{20} = (2^{1/2})^{20} = 2^{10}$

$c^{20} = (\sqrt[5]{2})^{20} = (2^{1/5})^{20} = 2^4$

infos:

$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ avec $x \geq 0$
et n et p de $\mathbb{N}^*$.

puisque: $c^{20} < a^{20} < b^{20}$, donc: $c < a < b$, d'où: $\sqrt[5]{2} < \sqrt[4]{2} < \sqrt{2}$ (car la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$).

2 Ordonnons les nombres: $\sqrt[4]{3}$ et $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt{5}$:

On a le plus petit multiple commun de 4; 3 et 2 est 12.

On pose: $a = \sqrt[4]{3}$; $b = \sqrt[3]{2}$ et $c = \sqrt{5}$.

Pour comparer les nombres a ; b et c ; on va utiliser une méthode différente de celle de la 1^{ère} question:

On a: $a = \sqrt[4]{3} = 4 \times 3 \sqrt[3]{3^3} = 12\sqrt[12]{27}$

$b = \sqrt[3]{2} = 3 \times 4 \sqrt[4]{2^4} = 12\sqrt[16]{16}$

$c = \sqrt{5} = 2 \times 6 \sqrt[6]{5^6} = 12\sqrt[15625]{5}$

infos:

$\sqrt[n]{x^p} = x^{p/n}$ avec $x > 0$
et n et p de $\mathbb{N}^*$.

On a: $15625 > 27 > 16$, et la fonction $x \mapsto \sqrt[12]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$,

alors : ${}^{12}\sqrt{15625} > {}^{12}\sqrt{16} > {}^{12}\sqrt{16}$, c'est-à-dire: $c > a > b$, donc: $\sqrt{5} > \sqrt{3} > \sqrt{2}$.

3 Simplifions les expressions A et B:

► Pour l'expression A, on a :

$$A = \frac{{}^{10}\sqrt{2^3} \times {}^{12}\sqrt{8^8}}{\sqrt[4]{4^3} \times \sqrt{\sqrt{16}} \times \sqrt[6]{2^{15}}} = \frac{2^{\frac{3}{10}} \times 8^{\frac{8}{12}}}{4^{\frac{3}{4}} \times (16^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{15}{6}}} = \frac{2^{\frac{3}{10}} \times (2^3)^{\frac{2}{3}}}{(2^2)^{\frac{3}{4}} \times (2^4)^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{3}{10}} \times 2^2}{2^{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}} = \frac{2^2}{2^{4}} = 2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

► Pour l'expression B, on a:

$$B = \sqrt{2}({}^4\sqrt{7+2 \times 2\sqrt{3}} - {}^4\sqrt{7-2 \times 2\sqrt{3}}) = \sqrt{2}({}^4\sqrt{4+3+2 \times 2\sqrt{3}} - {}^4\sqrt{4+3-2 \times 2\sqrt{3}})$$

$$= \sqrt{2}({}^4\sqrt{(2+\sqrt{3})^2} - {}^4\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}) = \sqrt{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})$$

car: $2 - \sqrt{3} > 0$ et $2 + \sqrt{3} > 0$ et $\sqrt{X^2} = \sqrt{X}$ pour tout $X \geq 0$.

$$\text{d'où: } B = \sqrt{2(2+\sqrt{3})} - \sqrt{2(2-\sqrt{3})} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}+1| - |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}+1 - \sqrt{3}+1 = 2$$

Donc: $B = 2$

4 Montrons que: $(a+b)^{\frac{5}{2}} = (a^5 + ba^4)^{\frac{1}{2}} + 2(a^3b^2 + a^2b^3)^{\frac{1}{2}} + (ab^4 + b^5)^{\frac{1}{2}}$ pour a et b de $\mathbb{R}^{++}$:

Soient a et b des réels strictement positifs, on a :

$$(a^5 + ba^4)^{\frac{1}{2}} + 2(a^3b^2 + a^2b^3)^{\frac{1}{2}} + (ab^4 + b^5)^{\frac{1}{2}} = [a^4(a+b)]^{\frac{1}{2}} + 2[a^2b^2(a+b)]^{\frac{1}{2}} + [b^4(a+b)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= a^2(a+b)^{\frac{1}{2}} + 2ab(a+b)^{\frac{1}{2}} + b^2(a+b)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (a+b)^{\frac{1}{2}}(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= (a+b)^{\frac{1}{2}}(a+b)^2 = (a+b)^{\frac{1}{2}+2} = (a+b)^{\frac{5}{2}}$$

Exercice 29

1 Déterminons a et b pour que: $(\forall x \in \mathbb{R}); x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + ax + b)$

Soit x de $\mathbb{R}$;

$$\text{On a: } (x-3)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a-3)x^2 + (b-3a)x - 3b$$

$$\text{donc: } x^3 + (a-3)x^2 + (b-3a)x - 3b = x^3 - 3x - 18 \text{ pour tout réel } x.$$

$$\text{si et seulement si: } -3b = 18; b-3a = -3 \text{ et } a-3 = 0$$

$$\text{si et seulement si: } b = 6 \text{ et } a = 3$$

$$\text{Donc: } (\forall x \in \mathbb{R}); x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + 3x + 6)$$

a. Montrons que t est une solution de l'équation: $x^3 - 3x - 18 = 0$

On a :

$$\begin{aligned} t^3 &= (\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}})^3 \\ &= (\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}})^3 + 3(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}})^2 \cdot (\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}) + 3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} \cdot (\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}})^2 + (\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}})^3 \\ &= 9+4\sqrt{5} + 9-4\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} (\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}) \\ &= 18 + 3\sqrt[3]{81-80} \times (t) \\ &= 18 + 3t \end{aligned}$$

d'où : $t^3 - 3t - 18 = 0$; ainsi t est solution de l'équation $x^3 - 3x - 18 = 0$.

b. Montrons que : $t = 3$

$$\begin{aligned} \text{On a : } t^3 - 3t - 18 &= 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2+3t+6) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 3 \text{ ou } t^2+3t+6 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 3 \end{aligned}$$

(car le discriminant Δ de l'équation $t^2 + 3t + 6 = 0$ est négatif), donc:

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 3$$

Exercice 30

a. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation: $(E_1): \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$

► L'ensemble de définition de l'équation (E_1) est: $D = [0; +\infty[$

Soit x un élément de $[0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} &= 12 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x^3} + \sqrt[6]{x^2} = 12 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^2 - 12 = 0 \end{aligned}$$

posons: $t = \sqrt[6]{x}$, avec $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} &= 12 \Leftrightarrow (\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^2 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^3 + t^2 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^3 - 8 + t^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+4) + (t-2)(t+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-2)(t^2+3t+6) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 2 \text{ ou } t^2+3t+6 = 0 \end{aligned}$$

Puisque le discriminant du trinôme $t^2 + 3t + 6$ est $\Delta = -15$, alors :

$t^2 + 3t + 6 \neq 0$ pour t de $\mathbb{R}$,

$$\text{d'où : } \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 2^6 = 64$$

Donc : $S = \{64\}$.

b. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation: $(E_2): \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$

Soit D l'ensemble de définition de l'équation (E_2) ; on a :

$$x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } 2x+11 \geq 0 \text{ et } x+6 \geq 0 \text{ et } x+5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq -\frac{11}{2} \text{ et } x \geq -6 \text{ et } x \geq -5$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq -5$$

$$\text{donc : } D = [-5; +\infty[$$

Soit x un élément de $[-5; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} &= \sqrt[3]{2x+11} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6})^3 = (\sqrt[3]{2x+11})^3 \\ &\Leftrightarrow x+5 + x+6 + 3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}) = 2x+11 \\ &\Leftrightarrow 2x+11 + 3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}) = 2x+11 \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5} = 0 \text{ ou } \sqrt[3]{x+6} = 0 \text{ ou } \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = 0 \end{aligned}$$

puisque: $x \geq -5$, alors: $\sqrt[3]{x+5} \geq 0$, et $\sqrt[3]{x+6} \geq 1$, d'où:

$$\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} \geq 1 \text{ c'est-à-dire : } \sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{x+5} \neq 0$$

$$\text{ainsi : } \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11} = 0 \Leftrightarrow x = -5 \text{ ou } x = -6$$

or : $-6 \notin D$ et $-5 \in D$, donc : $S = \{-5\}$.

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $(E_3): \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$

Soit D l'ensemble de définition de l'inéquation (E_3) :

$$\text{Soit : } x \in \mathbb{R}; x \in D \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \text{ et } x-2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1 \text{ et } x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{Donc : } D = [2; +\infty[$$

Soit x un élément de D , posons: $X = \sqrt[3]{x-2}$ avec : $X \geq 0$

$$\text{On a : } X = \sqrt[3]{x-2} \Leftrightarrow X^3 = x-2$$

$$\Leftrightarrow X^3 + 1 = x-1$$

$$\text{d'où : } \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{X^3+1} - X > 1 \text{ et } X \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{X^3+1} > X+1 \text{ et } X \geq 0$$

$$\Leftrightarrow X^3+1 \geq (X+1)^2 > 0 \text{ et } X \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (X+1)(X^2-X+1) - (X+1)^2 > 0 \text{ et } X \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (X+1)(X^2 - X + 1 - X - 1) > 0 \text{ et } X \geq 0 \\ &\Leftrightarrow X(X+1)(X-2) > 0 \text{ et } X \geq 0 \\ &\Leftrightarrow X > 2 \end{aligned}$$

et on a :

$$X > 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 2$$

$$\Leftrightarrow x - 2 > 8$$

$$\Leftrightarrow x > 10$$

$$\Leftrightarrow x \in]10; +\infty[$$

$$\text{Donc : } \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1 \Leftrightarrow x \in]10; +\infty[, \text{ d'où : } S =]10; +\infty[$$

Exercice 31

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x}$:

Soit x de $]0; +\infty[$, on a : $\frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{x}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = 1 - \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \right) = 1$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x} = 1$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$:

Soit x de $]-\infty; 0[$, on a : $x = -(-x) = -(\sqrt[3]{(-x)^3})$

d'où : $\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{-\sqrt[3]{(-x)^3}} = -\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{-x^3}}$

Or : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^3}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$, donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = -1$

3 Calculons $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt[3]{3x+2} - 2}$

Infos :

Soient a et b de $\mathbb{R}^{**}$ on a :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} ; \quad a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

Soit x de $[0; 4]$, on a :

et on a : $\sqrt{x+2} - 2 = \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{x+2-4}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{x-2}{\sqrt{x+2} + 2}$

$$\sqrt[3]{3x+2} - 2 = \frac{(\sqrt[3]{3x+2})^3 - (2)^3}{(\sqrt[3]{3x+2})^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + (2)^2}$$

$$= \frac{3x-6}{(\sqrt[3]{3x+2})^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4}$$

$$= \frac{3(x-2)}{(\sqrt[3]{3x+2})^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt[3]{3x+2} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2} + 2} \times \frac{(\sqrt[3]{3x+2})^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4}{3(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{3x+2})^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4}{3(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{4 + 4 + 4}{12} = 1\end{aligned}$$

4 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt[3]{2x-1})$:

Soit x de $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$,

$$\text{On a : } x - \sqrt[3]{2x-1} = x \left(1 - \frac{\sqrt[3]{2x-1}}{x}\right) = x \left(1 - \sqrt[3]{\frac{2x-1}{x^3}}\right) = x \left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}\right)$$

$$\text{puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}\right) = 1$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{2x-1} = +\infty$$

5 Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x - \sqrt[3]{1-x})$:

Soit x de $]-\infty; 0[$,

$$\begin{aligned}\text{On a : } x^2 - 3x - \sqrt[3]{1-x} &= x^2 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{\sqrt[3]{1-x}}{x^2}\right) \\ &= x^2 \left(1 - \frac{3}{x} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{x^6}}\right) \quad (\text{car : } \sqrt[3]{x^6} = x^2) \\ &= x^2 \left(1 - \frac{3}{x} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^5}}\right)\end{aligned}$$

$$\text{puisque : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^5}\right) = 0 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^5}} = 0$$

$$\text{et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right) = 1 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x - \sqrt[3]{1-x}) = +\infty$$

6 Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$:

Soit x de $[0; 2]$, on a :

$$\text{on a : } \sqrt[3]{x} - 1 = \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (1)^3}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{x-1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}$$

donc :

$$\sqrt[3]{4x+4} - 2 = \frac{(\sqrt[3]{4x+4})^3 - (2)^3}{(\sqrt[3]{4x+4})^2 + 2\sqrt[3]{4x+4} + (2)^2} = \frac{4(x-1)}{(\sqrt[3]{4x+4})^2 + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4}$$

$$\begin{aligned}\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} \times \frac{(\sqrt[3]{4x+4})^2 + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4}{4(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{4x+4})^2 + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4}{4((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{12}{12} = 1\end{aligned}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{4x + 4} - 2} = 1$

7 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - x$:

Soit x de $]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \text{on a : } \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - x &= \frac{(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2})^3 - x^3}{(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2})^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} + x^2} \\ &= \frac{x^2 + 2}{\left(\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)}\right)^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)} + x^2} \\ &= \frac{x^2 + 2}{\left(x \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}\right)^2 + x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} + x^2} \\ &= \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left[\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} + 1\right]} \end{aligned}$$

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x^2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = 1$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} = 1$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\left[\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} + 1\right]} = \frac{1}{3}$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - x) = \frac{1}{3}$

8 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - 2x$:

Soit x de $]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \text{on a : } \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - 2x &= \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)} - 2x \\ &= x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} - 2\right) \end{aligned}$$

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} = 1$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} - 2\right) = -\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - 2x = -\infty$

Exercice 32

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 3x + 1}$:

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 3x + 1} = +\infty$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{4 - 3x}$:

on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - 3x = +\infty$, Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{4 - 3x} = +\infty$

3 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} - 2x$:

Méthode 1:

Soit : $x > 0$; $\sqrt[3]{x} - 2x = \sqrt[3]{x} - 2(\sqrt[3]{x})^3$
 $= \sqrt[3]{x}(1 - 2(\sqrt[3]{x})^2)$

donc : $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2(\sqrt[3]{x})^2 = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} - 2x = -\infty$

Méthode 2:

Soit : $x > 0$

on a : $\sqrt[3]{x} - 2x = x \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} - 2 \right)$
 $= x \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} - 2 \right)$
 $= x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2 \right)$

donc : $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} - 2x = -\infty$

4 Calculons $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{-3x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

on a : $\left(\begin{array}{l} x > 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} > 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} - 1 > 0 \end{array} \right)$

donc : $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} -3x^2 + x + 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{x} - 1 = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{-3x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = -\infty$

Exercice 33

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}$:

Méthode 1:

Soit : $x > 0$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x} &= \sqrt[3]{x} \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right) \\ &= \sqrt[3]{x} \left(\frac{\sqrt[12]{x^3}}{\sqrt[12]{x^4}} - 1 \right) \\ &= \sqrt[3]{x} \left(\sqrt[12]{\frac{x^3}{x^4}} - 1 \right) \\ &= \sqrt[3]{x} \left(\sqrt[12]{\frac{1}{x}} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[12]{\frac{1}{x}} - 1 &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x} = -\infty$$

Méthode 2:

Soit : $x > 0$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x} &= x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{\frac{1}{4}} \left[1 - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}} \right] \\ &= x^{\frac{1}{4}} \left[1 - x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \right] \\ &= x^{\frac{1}{4}} \left[1 - x^{\frac{1}{12}} \right] \end{aligned}$$

$$\text{on a : } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{4}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x^{\frac{1}{12}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt[12]{x}) = -\infty \end{aligned} \right\} , \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x} = -\infty$$

Méthode 3: (avec un changement de variable)

$$\begin{aligned} \text{Soient } x > 0, \text{ on a : } \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x} &= \sqrt[12]{x^3} - \sqrt[12]{x^4} \\ &= (\sqrt[12]{x})^3 - (\sqrt[12]{x})^4 \end{aligned}$$

On pose : $X = \sqrt[12]{x}$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} X = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[12]{x} = +\infty, \text{ donc : } (x \rightarrow +\infty \Rightarrow X \rightarrow +\infty)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x} &= \lim_{X \rightarrow +\infty} X^3 - X^4 \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} -X^4 = -\infty \quad (\text{fonction polynôme}) \end{aligned}$$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$:

On pose : $a = \sqrt[3]{x}$ et $b = 1$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} &= \frac{a - b}{a^3 - b^3} \\ &= \frac{a - b}{(a - b)(a^2 + ab + b^2)} \\ &= \frac{1}{a^2 + ab + b^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} \end{aligned}$$

Infos:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3} ; \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{3}$$

3 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 3x}{2 + \sqrt[3]{x}}$:

on pose : $X = \sqrt[3]{x}$ alors : $x = X^3$

on a : $\lim_{X \rightarrow +\infty} X = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$ (donc : $x \rightarrow +\infty \Rightarrow X \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 3x}{2 + \sqrt[3]{x}} &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X - 3X^3}{2 + X} \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{3X^3}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -3X^2 = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 3x}{2 + \sqrt[3]{x}} = -\infty$$

4 Calculons $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x+4} - 2}{x - 2}$:

$$\begin{aligned} \text{on a : } \sqrt[3]{2x+4} - 2 &= \frac{(\sqrt[3]{2x+4})^3 - 2^3}{\sqrt[3]{(2x+4)^2} + 2\sqrt[3]{2x+4} + 2^2} \\ &= \frac{2x+4-8}{\sqrt[3]{(2x+4)^2} + 2\sqrt[3]{2x+4} + 4} \\ &= \frac{2(x-2)}{\sqrt[3]{(2x+4)^2} + 2\sqrt[3]{2x+4} + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \frac{\sqrt[3]{2x+4} - 2}{x - 2} &= \frac{2(x-2)}{\sqrt[3]{(2x+4)^2} + 2\sqrt[3]{2x+4} + 4} \\ &= \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+4)^2} + 2\sqrt[3]{2x+4} + 4} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x+4} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+4)^2} + 2\sqrt[3]{2x+4} + 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x+4} - 2}{x-2} = \frac{1}{6}$$

Solution 34

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x-1}$:

$$\begin{aligned} \text{Soit : } x > 0 ; x-1 &= (\sqrt[4]{x})^4 - 1^4 \\ &= ((\sqrt[4]{x})^2 + 1)(\sqrt[4]{x} - 1)(\sqrt[4]{x} + 1) \\ &= (\sqrt{x} + 1)(\sqrt[4]{x} - 1)(\sqrt[4]{x} + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{alors : } \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x-1} &= \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[4]{x} - 1)(\sqrt[4]{x} + 1)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[4]{x} + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[4]{x} + 1)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x-1} = \frac{1}{4}$$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[3]{x}}$:

Méthode 1:

$$\begin{aligned} \text{Soit : } x > 0 ; \text{ on a : } \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[3]{x}} &= \frac{\sqrt[3]{x} \left(1 - 2\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} \right)}{\sqrt[3]{x} \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} - 5 \right)} = \frac{1 - 2\frac{12\sqrt[12]{x^3}}{12\sqrt[12]{x^4}}}{\frac{12\sqrt[12]{x^3}}{12\sqrt[12]{x^4}} - 5} \\ &= \frac{1 - 2\frac{1}{12\sqrt[12]{x}}}{\frac{1}{12\sqrt[12]{x}} - 5} \end{aligned}$$

$$\text{puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{12\sqrt[12]{x}} \right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{12\sqrt[12]{x}} - 5 = -5$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[3]{x}} = -\frac{1}{5}$$

infos:

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 + b^2)(a - b)(a + b) \end{aligned}$$

Méthode 2:

Soit : $x > 0$

on a :

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[3]{x}} = \frac{12\sqrt{x^4} - 2^{12}\sqrt{x^3}}{12\sqrt{x^3} - 5^{12}\sqrt{x^4}}$$

$$= \frac{(\sqrt[12]{x})^4 - 2(\sqrt[12]{x})^3}{(\sqrt[12]{x})^3 - 5(\sqrt[12]{x})^4}$$

posons : $X = \sqrt[12]{x}$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow X \rightarrow +\infty$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[3]{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^4 - 2X^3}{X^3 - 5X^4}$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^4}{-5X^4}$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{5}$$

$$= -\frac{1}{5}$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[3]{x}} = -\frac{1}{5}$$

infos:

$$n \in \mathbb{N}^*$$

$$p \in \mathbb{N}^* ; \sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times p]{x^p}$$

Exercice 35

1 $f(x) = x^3 + 1$; $I = \mathbb{R}$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

Continuité: la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

Variation: on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 3x^2$ d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) \geq 0$

donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ($f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$)

puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(\mathbb{R})$.

On a : $J = f(\mathbb{R})$

$$= f(]-\infty ; +\infty[)$$

$$=]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

$$=]-\infty ; +\infty[$$

$$= \mathbb{R}$$

b. Déterminons l'expression $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J = \mathbb{R}$.

et y un élément de $I = \mathbb{R}$ avec $f^{-1}(x) = y$

on a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$
 $\Leftrightarrow y^3 + 1 = x$
 $\Leftrightarrow y^3 = x - 1$



puisque 3 est impaire, alors: $x - 1$ et y ont le même signe :

► Si : $x \leq 1$ alors : $x - 1 \leq 0$ et $y \leq 0$

► Si : $x > 1$ alors : $x - 1 > 0$ et $y > 0$

Donc :

► Si : $x > 1$ alors : $x - 1 > 0$ et $y > 0$

d'où : $y^3 = x - 1 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x - 1}$

► Si : $x \leq 1$ alors : $x - 1 \leq 0$ et $y \leq 0$

D'où : $y^3 = x - 1 \Leftrightarrow -y^3 = -(x - 1)$

$$\Leftrightarrow (-y)^3 = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow -y = \sqrt[3]{1 - x}$$

$$\Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{1 - x}$$

Conclusion :
$$\begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{1 - x} & ; x \leq 1 \\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1} & ; x > 1 \end{cases}$$

2 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1 ; I = \mathbb{R}$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

Continuité:

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

Variation:

f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$
 $= 3(x^2 + 2x + 1)$
 $= 3(x + 1)^2$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) \geq 0$ (f' s'annule uniquement en -1)

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(\mathbb{R})$

On a : $J = f(\mathbb{R})$

$= f(-\infty; +\infty[)$

$$\begin{aligned}
 &=]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[\\
 &=]-\infty; +\infty[\\
 &= \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

b. Exprimons $f^{-1}(x)$ pour tout x de $J = \mathbb{R}$:

Soit x un élément de J (on a : $I = J = \mathbb{R}$)

et y un élément de I avec $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 3y - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = x + 2$$

$$\Leftrightarrow (y + 1)^3 = x + 2$$

La puissance est impaire donc $y + 1$ et $x + 2$ ont le même signe :

► Si : $x + 2 > 0$ alors $x > -2$ d'où : $y + 1 > 0$

$$\begin{aligned}
 \text{ainsi : } (y + 1)^3 = x + 2 &\Leftrightarrow y + 1 = \sqrt[3]{x + 2} \\
 &\Leftrightarrow y = -1 + \sqrt[3]{x + 2}
 \end{aligned}$$

► Si : $x + 2 \leq 0$ alors $x \leq -2$ et $y + 1 \leq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où : } (y + 1)^3 = x + 2 &\Leftrightarrow -(y + 1)^3 = -x - 2 \\
 &\Leftrightarrow (-y - 1)^3 = -x - 2 \\
 &\Leftrightarrow -y - 1 = \sqrt[3]{-x - 2} \\
 &\Leftrightarrow y = -1 - \sqrt[3]{-x - 2}
 \end{aligned}$$

Conclusion :
$$\begin{cases} f^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{x + 2}; x > -2 \\ f^{-1}(x) = -1 - \sqrt[3]{-x - 2}; x \leq -2 \end{cases}$$

1 Dérivabilité

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de type $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$, où $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

On dit que f est dérivable au point x_0 (ou en x_0), si et seulement si : il existe un réel ℓ tel que : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ ou $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Le nombre ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f en x_0 , et on écrit $\ell = f'(x_0)$

On a : dans ce cas : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

propriété:

► Si f est dérivable en x_0 , alors: f est continue en x_0 . (la réciproque est fausse)

2 Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche en point

Définition 1:

► Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de type $[x_0, x_0 + \alpha[$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si et seulement si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$

et on écrit : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$

Remarque :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Le nombre $f'_d(x_0)$ est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_0 .

Définition 2:

► Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de type $]x_0 - \alpha; x_0]$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si et seulement si:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}, \text{ et on écrit : } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$$

$$\text{et on a dans ce cas : } \lim_{\substack{h \rightarrow x_0 \\ h < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_g(x_0)$$

Le nombre $f'_g(x_0)$ est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_0 .

Propriété:

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} \text{► } f \text{ est dérivable à droite en } x_0 \\ \text{► } f \text{ est dérivable à gauche en } x_0 \\ \text{► } f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$$

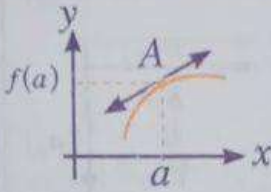
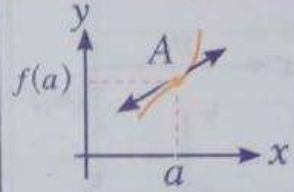
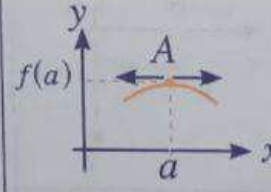
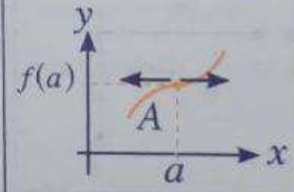
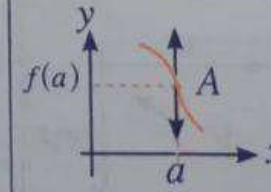
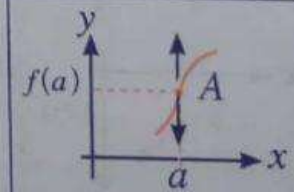
3 Interprétation géométrique de la dérivabilité en un point

Propriété:

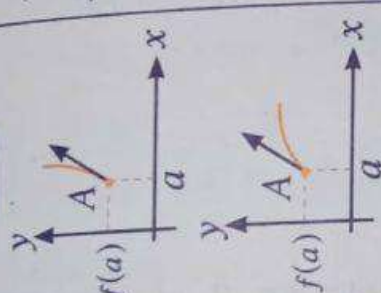
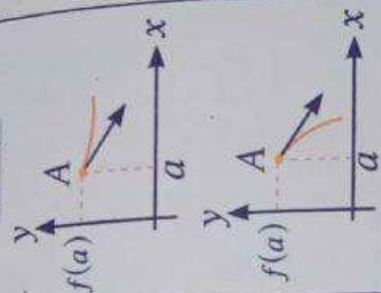
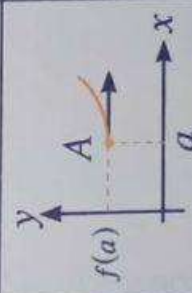
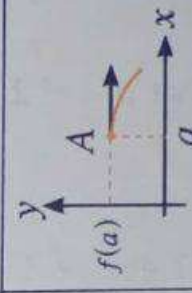
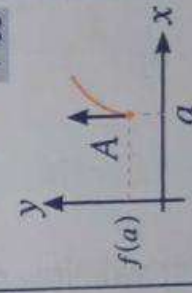
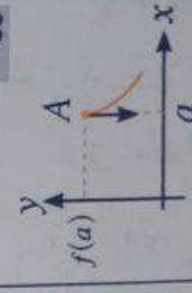
► Si f est dérivable en x_0 , alors $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 .

► L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

		Dérivabilité de f	Interprétation géométrique	Figure (suivant la position de la courbe par rapport à sa tangente)		Equation de la tangente (ou demi-tangente)
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	f est dérivable en a	(C_f) admet une tangente de coefficient directeur ℓ au point $A(a; f(a))$			$y = \ell(x - a) + f(a)$
	0	f est dérivable en a	(C_f) admet une tangente horizontale au point $A(a; f(a))$			$y = f(a)$
	$\mp \infty$	f n'est pas dérivable en a	(C_f) admet une tangente verticale au point $A(a; f(a))$			$x = a$

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$						
$\ell \in \mathbb{R}^*$	f est dérivable à gauche en a	(C_f) admet une demi-tangente de coefficient directeur ℓ au point $A(a; f(a))$	$\ell > 0$ $\ell < 0$	$\begin{cases} y = \ell(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$		
0	f est dérivable à gauche en a	(C_f) admet une demi-tangente horizontale au point $A(a; f(a))$		$\begin{cases} y = f(a) \\ x \leq a \end{cases}$		
$\mp \infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	(C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(a; f(a))$	$+\infty$ $-\infty$	$\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$	$\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$	

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$						
$\ell \in \mathbb{R}^*$	f est dérivable à droite en a	(C_f) admet une demi-tangente de coefficient directeur ℓ au point $A(a; f(a))$	$\ell > 0$ 	$\ell < 0$ 		$\begin{cases} y = \ell(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$
	f est dérivable à droite en a	(C_f) admet une demi-tangente horizontale au point $A(a; f(a))$				$\begin{cases} y = f(a) \\ x \geq a \end{cases}$
$\mp \infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	(C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(a; f(a))$	$+\infty$ 	$-\infty$ 	$+\infty$ $\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$	$-\infty$ $\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$

Exercices

Exercice 1

Étudier (en utilisant la définition) la dérivabilité de f en a dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $a = -1$

2 $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$ et $a = 0$

3 $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+2} ; x \neq -2 \text{ et } a = -2 \\ f(-2) = -3 \end{cases}$

4 $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} ; x \geq 0, x \neq 1 \text{ et } a = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 2

Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat où : $f(x) = x\sqrt{x}$

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{2-x}$

Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 2, puis interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x - 1 ; x < 0 \\ f(x) = x\sqrt{x} + x - 1 ; x \geq 0 \end{cases}$

1 Étudier la continuité de la fonction f en 0.

2 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en -1 et interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = -x + 1 + \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2 Étudier la continuité de la fonction f sur D_f .
- 3 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en -1 , et interpréter géométriquement le résultat.

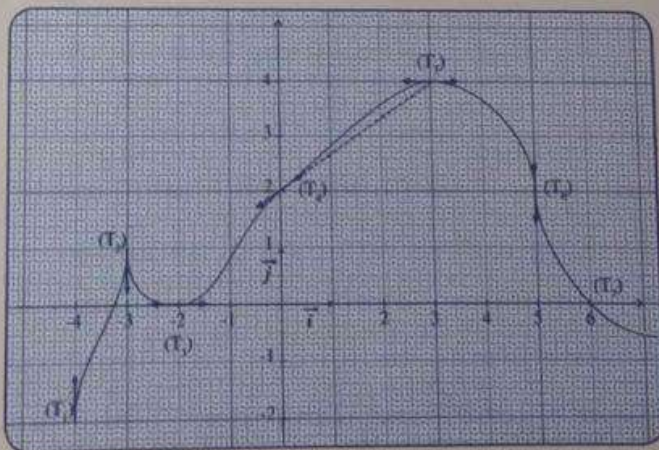
Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
- 2 Étudier la continuité de la fonction f sur D_f .
- 3 Étudier la dérivabilité de f à gauche en -4 , et interpréter géométriquement le résultat.
- 4 Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 , et interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 7

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction f à partir de cette courbe :



- 1 Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2 Déterminer $f'(-2)$ et $f'(0)$ et $f'(3)$.
- 3 Déterminer l'équation de chacune des tangentes suivantes : (T_3) , (T_4) et (T_5) .
- 4 Est-ce que f est dérivable en -3 ? en 5 ? à droite en -4 ?
- 5 Déterminer les limites suivantes :
 - a. $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x) - 1}{x + 3}$ et $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x) - 1}{x + 3}$
 - b. $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(x) - 2}{x - 5}$ et $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(x) - 2}{x - 5}$

Exercice 1

1 Étudions la dérivabilité de la fonction f en -1 ; où : $f(x) = x^2 - 3x + 2$

on a : $f(-1) = 6$

$$\begin{aligned} \text{soit } x \neq -1; \text{ on a : } \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \frac{x^2 - 3x + 2 - 6}{x + 1} \\ &= \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} \\ &= \frac{(x + 1)(x - 4)}{x + 1} \\ &= x - 4 \end{aligned}$$

donc : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x - 4 = -5$

D'où f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -5$

2 Étudions la dérivabilité de la fonction f en zéro; où : $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$

On a : $f(0) = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \neq 0 \text{ et } x \neq -3; \text{ on a : } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{2-x}{x+3} - \frac{2}{3}}{x} \\ &= \frac{\frac{3(2-x) - 2(x+3)}{3(x+3)}}{x} \\ &= \frac{-5x}{3x(x+3)} \\ &= \frac{-5}{3x+9} \end{aligned}$$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5}{3x+9} = -\frac{5}{9}$

D'où : f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{5}{9}$.

3 Étudions la dérivabilité de la fonction f en -2 :

où : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} ; x \neq -2 \\ f(-2) = -3 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \text{soit } x \neq -2; \text{ on a : } \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &= \frac{\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} + 3}{x + 2} \\
 &= \frac{\frac{x^2 + x - 2 + 3x + 6}{x + 2}}{x + 2} \\
 &= \frac{\frac{x^2 + x - 2 + 3x + 6}{x + 2}}{x + 2} \\
 &= \frac{x^2 + 4x + 4}{(x + 2)^2} \\
 &= \frac{(x + 2)^2}{(x + 2)^2} = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} 1 = 1 \text{ et } 1 \in \mathbb{R}$$

D'où : f est dérivable en -2 , et $f'(-2) = 1$.

4 Étudions la dérivabilité de la fonction f en 1:

$$\text{où : } \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} ; x \geq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } x \geq 0 \text{ et } x \neq 1, \text{ on a : } f(x) &= \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \\
 &= \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où : } \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{2}}{x - 1} \\
 &= \frac{\frac{2 - \sqrt{x} - 1}{2(\sqrt{x} + 1)}}{x - 1} \\
 &= \frac{\frac{1 - \sqrt{x}}{2(\sqrt{x} + 1)}}{x - 1} \\
 &= \frac{\frac{-(\sqrt{x} - 1)}{2(\sqrt{x} + 1)}}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\
 &= \frac{-1}{2(\sqrt{x} + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2(\sqrt{x} + 1)^2} = -\frac{1}{8}$$

Par suite f est dérivable en 1, et $f'(1) = -\frac{1}{8}$.

Exercice 2

On a : $x \geq 0$; $f(x) = x\sqrt{x}$ et $f(0) = 0$

$$\text{Soit } x > 0, \text{ on a : } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$$

$$\text{D'où : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \text{ et } 0 \in \mathbb{R}$$

donc f est dérivable à droite en 0.

$$\text{et } f'_d(0) = 0$$

Interprétation géométrique :

La courbe de la fonction f admet une demi-tangente horizontale au point $O(0;0)$.

Exercice 3

On a : $f(x) = \sqrt{2-x}$; $x \leq 2$ et $f(2) = 0$

$$\text{Soit } x < 2, \text{ on a : } \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{2-x} - 0}{x - 2} = \frac{\sqrt{2-x}}{-(2-x)} = -\frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{-1}{\sqrt{2-x}} = -\infty$$

D'où f n'est pas dérivable à gauche de 2.

Interprétation géométrique :

La courbe de f admet une demi-tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) au point $A(2;0)$ dirigée vers le haut.

infos:

$$A > 0 ; \frac{\sqrt{A}}{A} = \frac{\sqrt{A}}{(\sqrt{A})^2} = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Exercice 4

1 Étudions la continuité de la fonction f en zéro.

► On a : $f(0) = -1$ (On remplace dans la deuxième expression où $x \geq 0$).

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 - 3x - 1 = -1 = f(0)$$

et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x\sqrt{x} + x - 1) = -1 = f(0)$

Donc f est continue à droite et à gauche de 0, d'où f est continue en 0.

2 Étudions la dérivabilité de la fonction f en 0:

On a : $f(0) = 1$

► Étudions la dérivabilité de f à gauche en 0.

$$\begin{aligned} \text{Soit : } x < 0, \text{ on a : } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{x^2 - 3x - 1 + 1}{x} \\ &= \frac{x^2 - 3x}{x} \\ &= x - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - 3 = -3$$

D'où f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -3$

► Étudions la dérivabilité f à droite en 0:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x > 0, \text{ on a : } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{x\sqrt{x} + x - 1 + 1}{x} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + x}{x} \\ &= \sqrt{x} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} + 1 = 1$$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

Puisque : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique:

La courbe de f admet deux demi-tangentes au point $A(0; -1)$, l'un est (T_1) , de coefficient directeur -3, l'autre est (T_2) de coefficient directeur 1.

(Le point $A(0; -1)$ est un point anguleux de (C_f)).

On peut donner si c'est demandé les équations de (T_1) et (T_2) :

$$(T_1): \begin{cases} y = -3x \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$(T_2): \begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

infos:

L'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse a est :
 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Exercice 5

1 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f

Soit x de $\mathbb{R}$,

$$\text{on a : } x \in D_f \iff x + 1 \geq 0 \text{ et } x - 2 \neq 0$$

$$\iff x \geq -1 \text{ et } x \neq 2$$

$$\iff x \in ([-1; +\infty[- \{2\})$$

$$\text{Donc : } D_f = [-1; 2[\cup]2; +\infty[$$

2 Étudions la continuité de f sur D_f :

On a :

► La fonction : $u: x \mapsto -x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction affine), et en particulier sur chacun des intervalles $I = [-1; 2[$ et $J =]2; +\infty[$.

► La fonction $v: x \mapsto x - 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction affine), et en particulier sur I et J et ne s'annule ni sur I ni sur J .

► La fonction : $x \mapsto x + 1$ est continue et positive sur les intervalles I et J , donc la fonction : $w: x \mapsto \sqrt{x + 1}$ est continue sur I et J .

Par suite la fonction : $f = u + \frac{w}{v}$ est continue sur $[-1; 2[$ et $]2; +\infty[$.

3 Étudions la dérivabilité de la fonction f à droite en -1 :

$$\text{On a : } f(-1) = 2$$

soit $x \in D_f - \{-1\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \frac{-x + 1 + \frac{\sqrt{x+1}}{x-2} - 2}{x+1} \\ &= \frac{-x - 1 + \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}}{x+1} \\ &= \frac{-(x+1)}{x+1} + \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-2)} = -1 + \frac{1}{(x-2)\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(-1 + \frac{1}{(x-2)\sqrt{x+1}} \right) = -\infty$$

D'où f n'est pas dérivable à droite en -1 .

Interprétation géométrique :

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = -\infty$$

Donc la courbe de f admet une demi-tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) au point $A(-1; 2)$ dirigée vers le bas.

Exercice 6

1 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f :

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \text{ de } \mathbb{R}, \text{ on a : } x \in D_f &\Leftrightarrow x^2 + 4x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x(x + 4) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq -4 \text{ ou } x \geq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$x^2 + 4x$	$+$	0	$-$	$+$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$$

2 Étudions la continuité de f sur $I =]-\infty; -4]$ et $J = [0; +\infty[$:

► La fonction : $u: x \mapsto x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction affine), et en particulier sur les deux intervalles I et J .

► La fonction : $x \mapsto x^2 + 4x$ est continue et positive sur I et J , donc la fonction : $x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x}$ est continue sur I et J .

Par suite, la fonction : $f = u + v$ est continue sur I et J , donc f est continue sur D_f .

3 Étudions la dérivabilité de f à gauche en -4 :

On a : $f(-4) = -3$, et soit $x < -4$;

$$\begin{aligned} \text{on a : } \frac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)} &= \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} + 3}{x + 4} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{x(x + 4)}}{x + 4} \\ &= 1 + \frac{x(x + 4)}{(x + 4)\sqrt{x(x + 4)}} \\ &= 1 + \frac{x}{\sqrt{x(x + 4)}} \end{aligned}$$

$$\text{on a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -4} x = -4 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} \sqrt{x(x + 4)} = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} \frac{x}{\sqrt{x(x + 4)}} = -\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} \frac{f(x) - f(-4)}{x + 4} = -\infty$$

D'où f n'est pas dérivable à gauche en -4 .

Interprétation géométrique:

On a : $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{f(x) - f(-4)}{x + 4} = -\infty$

Donc la courbe de f admet une demi-tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) au point $A(-4; -3)$ dirigée vers le haut.

4 Étudions la dérivabilité de f à droite en 0:

On a : $f(0) = 1$, et soit $x > 0$;

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - 1}{x} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{x} \\ &= 1 + \frac{x(x + 4)}{x\sqrt{x(x + 4)}} \\ &= 1 + \frac{x + 4}{\sqrt{x(x + 4)}} \end{aligned}$$

on a : $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x + 4 = 4 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x(x + 4)} = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 4}{\sqrt{x(x + 4)}} = +\infty$

donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

d'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique:

on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

Donc la courbe de f admet une demi-tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) au point $B(0; 1)$ dirigée vers le haut.

Exercice 7

1 L'ensemble de définition de la fonction f est : $Df = [-4; +\infty[$

2 On a : $\triangleright f'(-2) = 0$ (tangente horizontale)

$\triangleright f'(0) = \frac{2}{3}$

$\triangleright f'(3) = 0$ (tangente horizontale)

3 L'équation de (T_3) :

On a : $(T_3): y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)$

et puisque : $f(-2) = 0$ et $f'(-2) = 0$

Alors : $(T_3): y = 0$

► Equation de (T_4) :

on a : $(T_4): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

puisque : $f(0) = 2$ et $f'(0) = \frac{2}{3}$; alors : $(T_4): y = \frac{2}{3}x + 2$

► Equation de (T_5) :

on a : $f'(3) = 0$ et $f(3) = 4$; donc : $(T_5): y = 4$

4 f n'est pas dérivable en -3 , car la courbe de f admet au point d'abscisse -3 une demi-tangente verticale.

► f n'est pas dérivable en 5 , car la courbe de f admet au point d'abscisse 5 une demi-tangente verticale.

► f n'est pas dérivable à droite de -4 , car la courbe de f admet au point d'abscisse -4 une demi-tangente verticale.

5 a. Calculons : $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3}$

Puisque (Cf) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -3 ,

alors : $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \infty$

Pour connaître le signe ($+\infty$ ou $-\infty$) on a deux façons:

Méthode 1:

On a : f est croissante sur $[-4, -3]$.

Donc : $x < -3 \Rightarrow f(x) < f(-3)$

$$\Rightarrow f(x) - f(-3) < 0 \text{ et } x + 3 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} > 0$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = -\infty$

Méthode 2:

On a : $x \rightarrow -3^-$ (à gauche)

On a la demi-tangente est dirigée vers le bas.

Donc : $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = +\infty$

► $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x) - 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = -\infty$

b. Calculons $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 2}{x - 5}$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(x) - 2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = -\infty$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(x) - 2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = +\infty$$

4 Opérations sur les fonctions dérivées

1. Fonctions dérivées de fonctions usuelles : Rappel

Fonction f	Fonction f'	f est dérivable sur l'intervalle
$x \mapsto a; (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$] -\infty; +\infty[$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$] -\infty; +\infty[$
$x \mapsto x^n; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$] -\infty; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$] 0; +\infty[$ et $] -\infty; 0[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$] -\infty; +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$] -\infty; +\infty[$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[; k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \sin(ax + b)$	$x \mapsto a \cos(ax + b)$	$] -\infty; +\infty[$
$x \mapsto \cos(ax + b)$	$x \mapsto -a \sin(ax + b)$	$] -\infty; +\infty[$

2. Opérations sur les fonctions dérivées : Rappel

Propriétés:

$\triangleright$ Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel, alors: $f + g$ et kf et $f \times g$ sont dérivables sur l'intervalle I , et on a:

$(f + g)' = f' + g'$	$(kf)' = kf'$	$(fg)' = f'g + fg'$
$(f - g)' = f' - g'$		

$\triangleright$ Si f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et g ne s'annule pas sur l'intervalle I (c'est-à-dire $(\forall x \in I); g(x) \neq 0$) alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur l'intervalle I ,

on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

5 Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriétés:

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J , tels que : $f(I) \subset J$, et x_0 un élément de I .

► Si la fonction f est dérivable en x_0 , et g est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 .

et on a : $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.

► Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et g est dérivable sur l'intervalle J , alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I ,

et on a : $(\forall x \in I); (g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x)$

Conséquences:

► Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I , alors la fonction f^n est dérivable sur I et on a : $(f^n)' = n f' f^{n-1}$; pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

► Si la fonction f est dérivable et strictement positive sur l'intervalle I , alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a : $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

6 Dérivée de la fonction réciproque

Propriété 1:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction continue et strictement monotone sur I , et x_0 un élément de I .

► Si la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$.

et on a :

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

► Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I , telle que sa fonction dérivée ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire : $(\forall x \in I); f'(x) \neq 0$)

alors la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$,

et on a :

$$(\forall y \in f(I)); (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Dérivée de la fonction : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. La fonction $u: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

et on a : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; u'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

Propriété 2:

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction : $g: x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I , et on a :

$$(\forall x \in I); g'(x) = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot u'(x) \cdot (u(x))^{\frac{1}{n}-1}$$

Exercices

Remarque : De l'exercice 8 à l'exercice 16, la recherche de l'ensemble de définition D_f de la fonction dérivée D_f n'est pas demandée.

Exercice 8

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = 3x - 7$

2 $f(x) = x + \sqrt{2}$

3 $f(x) = \frac{5x-2}{3}$

4 $f(x) = x^2 - 3x - 2$

5 $f(x) = -5x^3 + 7x^2 - 6x + 3$

6 $f(x) = -x^{2014} + x^{2015} - 1$

7 $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^5 - \sqrt{3}x^7 + \frac{3}{2}x^6 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 - \pi$

Exercice 9

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$

2 $f(x) = \frac{1}{x} - 4x^7$

3 $f(x) = \cos x + x^2$

4 $f(x) = \sin x - 3x^4$

5 $f(x) = \cos x - \sin x$

Exercice 10

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = -\frac{7}{x}$

2 $f(x) = x\sqrt{x}$

3 $f(x) = x \sin x$

4 $f(x) = (3x^2 - 5x + 1)\sqrt{x}$

5 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Exercice 11

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2 $f(x) = \frac{1}{x^5}$

3 $f(x) = \frac{1}{x^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$

4 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

5 $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

6 $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

7 $f(x) = \frac{1}{x^3 - 5x^2 + x - 3}$

8 $f(x) = \frac{-7}{x^2 + 1}$

9 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{x^4}$

10 $f(x) = \frac{1 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{x}}$

Exercice 12

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = \frac{2x + 1}{3 - 5x}$

2 $f(x) = \frac{7x}{3x + 5}$

3 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 7}$

4 $f(x) = \frac{-3x^2 + x - 2}{\sqrt{x} + 1}$

5 $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{\cos x + 2}$

6 $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + 3x - 1}{x + \sqrt{x}}$

7 $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Exercice 13

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = (5x - 2)^4$

2 $f(x) = (1 - 2x)^{2015}$

3 $f(x) = (-3x^2 + 2x - 1)^2$

4 $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^3$

5 $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3}$

6 $f(x) = \sin^7 x$

Exercice 14

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = \sqrt{3x - 1}$

2 $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

3 $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$

4 $f(x) = \sqrt{\cos x + 2}$

5 $f(x) = \sqrt{\frac{2x - 1}{3x + 5}}$

6 $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 3x - 1}{2 - x}}$

Exercice 15

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right)$

3 $f(x) = \sin(\sqrt{x^2 + 1})$

2 $f(x) = \cos(x^2 + 1)$

4 $f(x) = \sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

Exercice 16

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = \sqrt{\sqrt{1 + x^2}}$

2 $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

3 $f(x) = x^3\sqrt{x} + x^3\sqrt{x} \quad (x > 0)$

Exercice 17

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = \cos(x^2 + x + 1)$

2 $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$

3 $f(x) = \sin(\sqrt{x^2 + 3})$

Solutions

Exercice 8

1 On a : $f(x) = 3x - 7$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 3$

2 On a : $f(x) = x + \sqrt{2}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1$

3 On a : $f(x) = \frac{5x - 2}{3} = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{5}{3}$

4 On a : $f(x) = x^2 - 3x - 2$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 2x - 3$

5 On a : $f(x) = -5x^3 + 7x^2 - 6x + 3$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -15x^2 + 14x - 6$

infos:

Dans le cas général:
 $(ax + b)' = a$

6 On a : $f(x) = -x^{2014} + x^{2015} - 1$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -2014x^{2013} + 2015x^{2014}$

7 On a : $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^5 - \sqrt{3}x^7 + \frac{3}{2}x^6 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 - \pi$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 5(1 - \sqrt{2})x^4 - 7\sqrt{3}x^6 + 9x^5 - 5x^2 + 2x$

Exercice 9

1 On a : $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2 + \frac{\sqrt{x}}{2x}$

infos:

$$x > 0 ; (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2 On a : $f(x) = \frac{1}{x} - 4x^7$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 28x^6$

infos:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

3 On a : $f(x) = \cos x + x^2$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -\sin x + 2x$

4 On a : $f(x) = \sin x - 3x^4$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \cos x - 12x^3$

infos:

$$\bullet \cos'(x) = -\sin x$$

$$\bullet \sin'(x) = \cos x$$

5 On a : $f(x) = \cos x - \sin x$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -\sin x - \cos x$

Exercice 10

1 On a : $f(x) = -\frac{7}{x}$

Donc : $f'(x) = -7 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{7}{x^2}$$

2 On a : $f(x) = x\sqrt{x}$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f'(x) &= x' \sqrt{x} + x(\sqrt{x})' \\ &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

3 On a : $f(x) = x \sin x$

Donc : $f'(x) = 1 \times \sin x + x \times \cos x$
 $= \sin x + x \cos x$

4 On a : $f(x) = (3x^2 - 5x + 1)\sqrt{x}$

Donc : $f'(x) = (6x - 5)\sqrt{x} + (3x^2 - 5x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $= (6x - 5)\sqrt{x} + \frac{(3x^2 - 5x + 1)\sqrt{x}}{2x}$
 $= \left(\frac{12x^2 - 10x}{2x} + \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x} \right) \sqrt{x}$
 $= \left(\frac{15x^2 - 15x + 1}{2x} \right) \sqrt{x}$

5 On a : $f(x) = \frac{\sin x}{x} = \sin x \times \frac{1}{x}$

Donc : $f'(x) = (\cos x) \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin x$
 $= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

Exercice 11

1 On a : $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Donc : $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$

2 On a : $f(x) = \frac{1}{x^5}$

Donc : $f'(x) = \frac{-5x^4}{x^{10}}$

$f'(x) = \frac{-5}{x^6}$

3 On a : $f(x) = \frac{1}{x^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2}$

$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$

4 On a : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Donc : $f'(x) = \frac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x})^2}$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$$

5 On a : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

Donc : $f'(x) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

6 On a : $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

Donc : $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

7 On a : $f(x) = \frac{1}{x^3 - 5x^2 + x - 3}$

Donc : $f'(x) = \frac{-(3x^2 - 10x + 1)}{(x^3 - 5x^2 + x - 3)^2}$

8 On a : $f(x) = \frac{-7}{x^2 + 1}$

Donc : $f'(x) = \frac{-7(-2x)}{(x^2 + 1)^2}$

$$= \frac{14x}{(x^2 + 1)^2}$$

9 On a : $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{x^4}$

Donc : $f'(x) = \frac{\sqrt{3}(-4x^3)}{x^8} = \frac{-4\sqrt{3}}{x^5}$

10 On a : $f(x) = \frac{1 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{x}}$

Donc : $f'(x) = \frac{-(1 - \sqrt{2})\left(4x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x^4 + \sqrt{x})^2}$

$$= \frac{-(1 - \sqrt{2})(8x^3\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x}(x^4 + \sqrt{x})^2}$$

Exercice 12

1 On a : $f(x) = \frac{2x+1}{3-5x}$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } f'(x) &= \frac{2(3-5x) - (2x+1)(-5)}{(3-5x)^2} \\ &= \frac{6-10x+10x+5}{(3-5x)^2} \\ &= \frac{11}{(3-5x)^2}\end{aligned}$$

2 On a : $f(x) = \frac{7x}{3x+5}$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } f'(x) &= \frac{7(3x+5) - 7x(3)}{(3x+5)^2} \\ &= \frac{21x+35-21x}{(3x+5)^2} \\ &= \frac{35}{(3x+5)^2}\end{aligned}$$

3 On a : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+7}$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+7) - \sqrt{x}(2x)}{(x^2+7)^2} \\ &= \frac{x^2+7-2x(2x)}{2\sqrt{x}(x^2+7)^2} \\ &= \frac{-3x^2+7}{2\sqrt{x}(x^2+7)^2}\end{aligned}$$

4 On a : $f(x) = \frac{-3x^2+x-2}{\sqrt{x}+1}$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } f'(x) &= \frac{(-6x+1)(\sqrt{x}+1) - (-3x^2+x-2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(-6x\sqrt{x}-6x+\sqrt{x}+1) + 3x^2-x+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \\ &= \frac{-12x^2-12x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+3x^2-x+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \\ &= \frac{-9x^2-12x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+x+2}{(\sqrt{x}+1)^2}\end{aligned}$$

5 On a : $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{\cos x + 2}$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right)(\cos x + 2) - (\sqrt{x} - x) \times (-\sin x)}{(\cos x + 2)^2} \\ &= \frac{(1 - 2\sqrt{x})(\cos x + 2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - x)\sin x}{2\sqrt{x}(\cos x + 2)^2} \end{aligned}$$

6 On a : $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + 3x - 1}{x + \sqrt{x}}$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\right)(x + \sqrt{x}) - (2\sqrt{x} + 3x - 1)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x + \sqrt{x})^2} \\ &= \frac{(2 + 6\sqrt{x})(x + \sqrt{x}) - (2\sqrt{x} + 3x - 1)(2\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x}(x + \sqrt{x})^2} \\ &= \frac{2x + 2\sqrt{x} + 6x\sqrt{x} + 6x - 4x - 2\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - 3x + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}(x + \sqrt{x})^2} \\ &= \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}(x + \sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

Exercice 13

1 On a : $f(x) = (5x - 2)^4$

Donc : $f'(x) = 4(5x - 2)^3 \times 5 = 20(5x - 2)^3$

2 On a : $f(x) = (1 - 2x)^{2015}$

Donc : $f'(x) = 2015(1 - 2x)^{2014}(-2)$
 $= -4030(1 - 2x)^{2014}$

3 On a : $f(x) = (-3x^2 + 2x - 1)^2$

Donc : $f'(x) = 2(-3x^2 + 2x - 1) \times (-6x + 2)$
 $= (-12x + 4)(-3x^2 + 2x - 1)$

4 On a : $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^3$

Donc : $f'(x) = 3\left(\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}\right)$

infos:

$$(u^r)' = ru^{r-1} \times u'$$

où $r \in \mathbb{Q}$

5 On a : $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3} = (x^2 + x + 1)^{-3}$

Donc : $f'(x) = -3(x^2 + x + 1)^{-4} \times (2x + 1)$

$$= \frac{-6x - 3}{(x^2 + x + 1)^4}$$

6 On a : $f(x) = \sin^7 x$

Donc : $f'(x) = 7 \sin^6 x \cos x$

Exercice 14

1 On a : $f(x) = \sqrt{3x - 1}$

Donc : $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 1}}$

infos:

$$(\sqrt{ax + b})' = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$$

2 On a : $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

Donc : $f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{1 - 2x}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - 2x}}$

3 On a : $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$

Donc : $f'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 5}}$

infos:

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

4 On a : $f(x) = \sqrt{\cos x + 2}$

Donc : $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x + 2}}$

5 On a : $f(x) = \sqrt{\frac{2x - 1}{3x + 5}}$

Donc : $f'(x) = \frac{\left(\frac{2x - 1}{3x + 5}\right)'}{2\sqrt{\frac{2x - 1}{3x + 5}}}$

puisque : $\left(\frac{2x - 1}{3x + 5}\right)' = \frac{2(3x + 5) - 3(2x - 1)}{(3x + 5)^2} = \frac{13}{(3x + 5)^2}$

Autre méthode : $\left(\frac{2x - 1}{3x + 5}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{(3x + 5)^2} = \frac{13}{(3x + 5)^2}$

Alors : $f'(x) = \frac{13}{2(3x + 5)^2 \sqrt{\frac{2x - 1}{3x + 5}}}$

6 On a : $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 3x - 1}{2 - x}}$

On pose : $u(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{2 - x}$

On a : $f(x) = \sqrt{u(x)}$

Donc : $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } u'(x) &= \frac{(2x + 3)(2 - x) - (x^2 + 3x - 1)(-1)}{(2 - x)^2} \\ &= \frac{4x - 2x^2 + 6 - 3x + x^2 + 3x - 1}{(2 - x)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 4x + 5}{(2 - x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{-x^2 + 4x + 5}{2(2 - x)^2 \sqrt{\frac{x^2 + 3x - 1}{2 - x}}}$$

Exercice 15

1 Déterminons $f'(x)$ pour tout x de I :

On a : $f(x) = \tan(u(x))$ où : $(\forall x \in I) ; u(x) = \frac{1}{x}$

Donc : $f'(x) = \tan'(u(x)) \cdot u'(x)$
 $= (1 + \tan^2(u(x))) \times u'(x)$

infos:

$$(u \circ v)'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$$

puisque : $u(x) = \frac{1}{x}$ et $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

alors : $f'(x) = \left(1 + \tan^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) \times \frac{-1}{x^2}$,

donc : $(\forall x \in I) ; f'(x) = -\frac{1}{x^2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

2 Déterminons $f'(x)$ pour tout x de I :

Soit x de I , on a : $f(x) = \cos(u(x))$, avec : $u(x) = x^2 + 1$

et on a : $u'(x) = 2x$

Donc : $f'(x) = \cos'(u(x)) \cdot u'(x)$
 $= -\sin(u(x)) \cdot u'(x)$
 $= -\sin(x^2 + 1) 2x$
 $= -2x \sin(x^2 + 1)$

3 Déterminons $f'(x)$ pour tout x de I :

$$\text{Soit } x \text{ de } I, \text{ on a : } f(x) = \sin \sqrt{x^2 + 1} \\ = \sin(u(x))$$

$$\text{avec : } u(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \text{ on a : } u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{D'où : } f'(x) = \sin'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cos(\sqrt{x^2 + 1})$$

4 Déterminons $f'(x)$ pour tout x de I :

$$(\forall x \in I); f'(x) = \left(\sqrt{\tan \frac{x}{2}} \right)' \\ = \frac{\left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right)'}{2\sqrt{\tan \frac{x}{2}}}$$

$$\text{et on a : } \left(\tan \frac{x}{2} \right)' = (\tan u)' = \tan'(u(x)) \times u'(x) \\ = (1 + \tan^2(u(x))) \times u'(x) \\ = \left(1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) \cdot \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right)}{2\sqrt{\tan \frac{x}{2}}}$$

Exercice 16

Déterminons $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

1 On a : $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2}}$:

La fonction : $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable et positive sur $\mathbb{R}$.

Donc : $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Puisque la fonction : $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Alors la fonction : $x \mapsto \sqrt{\sqrt{x^2 + 1}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{et on a : } (\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \left(\sqrt{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{(\sqrt{1+x^2})'}{2\sqrt{\sqrt{1+x^2}}} \\ = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \\ = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{\sqrt{x^2 + 1}}}$$

On peut simplifier l'écriture: $f'(x) = \frac{x}{2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}((x^2+1)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{2(x^2+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}$
 $= \frac{x}{2(x^2+1)^{\frac{3}{4}}} = \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}$

2 On a : $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$

La fonction $x \mapsto x^2+x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et strictement positive sur $\mathbb{R}$.
 (Le discriminant $\Delta < 0$ et $a > 0$)

Donc : f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a : $f'(x) = \frac{(x^2+x+1)'}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}} = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$

3 Déterminons $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$.

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\begin{aligned} (\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) &= x' \sqrt[3]{x} + x(\sqrt[3]{x})' + (x^3)' \sqrt{x} + x^3(\sqrt{x})' \\ &= \sqrt[3]{x} + x \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2 \sqrt{x} + x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3(\sqrt[3]{x})^3 + x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2 \times 3x^2(\sqrt{x})^2 + x^3}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x+x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6x^3+x^3}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7x^3}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7}{2} \frac{x \sqrt{x^2}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} + \frac{7}{2} x^2 \sqrt{x} \end{aligned}$$

Autre méthode:

$$\begin{aligned} (\forall x > 0); f(x) &= x \sqrt[3]{x} + x^3 \sqrt{x} = x(x)^{\frac{1}{3}} + x^3(x)^{\frac{1}{2}} \\ &= x^{1+\frac{1}{3}} + x^{3+\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}-1} + \frac{7}{2} x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} + \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} + \frac{7}{2} \sqrt{x^5} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} + \frac{7}{2} x^2 \sqrt{x} \end{aligned}$$

Exercice 17

Déterminons $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = \cos(x^2+x+1)$, on pose : $u(x) = x^2+x+1$

On a : $f(x) = \cos(u(x))$ donc : $f'(x) = \cos'(u(x)) \cdot u'(x)$

et on a : $u'(x) = 2x + 1$

D'où : $f'(x) = -(2x + 1)\sin(x^2 + x + 1)$

2 On a : $f(x) = \sin(\sqrt{x^2 + 3})$

On pose : $u(x) = \sqrt{x^2 + 3}$, on a : $u'(x) = \frac{(x^2 + 3)'}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

Donc : $f'(x) = \sin'(u(x)) \times u'(x)$

$$= \cos(\sqrt{x^2 + 3}) \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$= \frac{x \cos(\sqrt{x^2 + 3})}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

3 On a : $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$

On pose : $u(x) = \frac{\pi}{x}$, donc : $u'(x) = \pi \times \frac{-1}{x^2} = \frac{-\pi}{x^2}$

D'où : $f'(x) = \tan'(u(x)) \cdot u'(x)$

$$= (1 + \tan^2(u(x))) \cdot u'(x)$$

$$= \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \cdot \frac{-\pi}{x^2}$$

$$= \frac{-\pi}{x^2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

7 Applications de la fonction dérivée

- ▶ Calculer des limites.
- ▶ Étudier les variations d'une fonction numérique.
- ▶ Prouver des inégalités.

Exercices

Exercice 18

En utilisant la dérivée, calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2015} - 1}{x - 1}$

2 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x + 1)^{2017} + 1}{x + 1}$

Exercice 19

En utilisant la dérivée, calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$

2 $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 1}{4x + \pi}$

Exercice 20

Dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = x^2 - 3x + 2$

2 $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Étudier la dérivabilité de la fonction f , et calculer $f'(x)$.
- Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 21

Dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = 2x - \sqrt{x}$

2 $f(x) = 3x - 1 - \frac{2\sqrt{x+1}}{x}$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Étudier la dérivabilité de la fonction f , et calculer $f'(x)$.
- Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 22

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; x^n - 1 \geq n(x - 1)$

2 Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$

Exercice 23

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{x-2} + x + 1$

- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- Étudier la continuité et la monotonie de la fonction f^{-1} sur J .
- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 5, et calculer $(f^{-1})'(5)$ (calculer premièrement $f(3)$).
- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]3; +\infty[$.
- Résoudre dans l'intervalle J l'inéquation : $f^{-1}(2x-7) > f^{-1}(x)$

Exercice 24

En utilisant la dérivée, comparer A et B :

$$A = \frac{(2,0123456789)^2 + 1}{2,0123456789}$$

et

$$B = \frac{(2,0123456788)^2 + 1}{2,0123456788}$$

Solutions

Exercice 18

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2015} - 1}{x - 1}$:

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x^{2015}$

On a : $f(1) = 1$ et f est dérivable en 1, car c'est un monôme.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 2015x^{2014}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2015} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2015$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+1)^{2017} + 1}{x+1}$:

On pose : $f(x) = (2x+1)^{2017}$; $x \in \mathbb{R}$

La fonction f est dérivable en -1 (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$).

et on a : $f(-1) = (-1)^{2017} = -1$

et : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 2 \times 2017(2x+1)^{2016}$
 $= 4034(2x+1)^{2016}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+1)^{2017} + 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = f'(-1) = 4034$

Exercice 19

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$:

On pose : $f(x) = \sin x$

La fonction $\sin$ est dérivable en $\frac{\pi}{6}$, car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $f'(x) = \cos x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}} \\ &= f'(\frac{\pi}{6}) \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - 1}{4x + \pi}$:

$$\text{On a : } \frac{2 \cos^2 x - 1}{4x + \pi} = \frac{1}{4} \frac{2 \cos^2 x - 1}{(x + \frac{\pi}{4})}$$

On considère la fonction f définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = 2 \cos^2 x$

$$\text{On a : } f(-\frac{\pi}{4}) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1$$

► f est dérivable en $-\frac{\pi}{4}$, car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -4 \cos x \sin x = -2 \sin(2x)$$

$$\text{D'où : } f'(-\frac{\pi}{4}) = -2 \sin(-\frac{\pi}{2}) = 2$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - 1}{4x + \pi} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

Exercice 20

1 $f(x) = x^3 - 3x + 2$

a. On a : ► $D_f = \mathbb{R}$, car f est une fonction polynôme.

b. ► f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

c. Calculons les limites aux bornes de D_f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Tableau de variations de $f : f(1) = 0$ et $f(-1) = 4$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	

2 $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$

a. On a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$=]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

b. La fonction f est dérivable sur tout intervalle inclus dans D_f , car c'est une fonction rationnelle.

$$\begin{aligned} (\forall x \in D_f); f'(x) &= \frac{(2x+1)(x^2-1) - (x^2+x+1) \times 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x + x^2 - 1 - 2x^3 - 2x^2 - 2x}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 1}{(x^2-1)^2}$$

c. Calculons les limites aux bornes de D_f :

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Le tableau de signes de $x^2 - 1$ est le suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 1 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 1 = 0^- \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$$

On a :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0^+ \end{cases}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

d. Dressons le tableau de variations de la fonction f :

Le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x^2 - 4x - 1$.

car : $(\forall x \in \mathbb{D}_f) ; (x^2 - 1)^2 > 0$

Le discriminant du trinôme $-x^2 - 4x - 1$ est $\Delta = 16 - 4 = 12$.

ses racines sont : $x_1 = \frac{4 + \sqrt{12}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{12}}{-2} = -2 + \sqrt{3}$$

D'où le tableau de signes de $-x^2 - 4x - 1$:

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3}$	$+\infty$	
$-x^2-4x-1$	$-$	0	$+$	0	$-$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{3}$	-1	$-2 + \sqrt{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-
f	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

$$\begin{aligned} f(-2 + \sqrt{3}) &= \frac{(-2 + \sqrt{3})^2 + (-2 + \sqrt{3}) + 1}{(-2 + \sqrt{3})^2 - 1} \\ &= \frac{4 - 4\sqrt{3} + 3 - 1 + \sqrt{3}}{4 - 4\sqrt{3} + 3 - 1} = \frac{-3\sqrt{3} + 6}{-4\sqrt{3} + 6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$f(-2 - \sqrt{3}) = \frac{4 + 4\sqrt{3} + 3 - 1 - \sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} + 6}{4\sqrt{3} + 6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 21

1 $f(x) = 2x - \sqrt{x}$

a. On a : $D_f = \mathbb{R}^+ = [0 ; +\infty[$

b. f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, car c'est la somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle qui sont :

$u: x \mapsto 2x$ fonction polynôme (fonction linéaire) dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier $]0 ; +\infty[$.

et $v: x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ (fonction usuelle).

Étudions la dérivabilité de f à droite en 0.

$$\text{On a : } x > 0 ; \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x - \sqrt{x}}{x} = 2 - \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$= 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = -\infty$$

D'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

► $(\forall x \in]0 ; +\infty[) ; f'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$

c. Calculons les limites aux bornes D_f :

► $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (2\sqrt{x} - 1) = +\infty$

► $f(0) = 0$

d. Dressons le tableau de variations de f :

Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $4\sqrt{x} - 1$.

car : $(\forall x \in \mathbb{R}^{++}) ; 2\sqrt{x} > 0$

► $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$$

► $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{16}$$

Le tableau de variations de f :

x	0	$\frac{1}{16}$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
f	0	$-\frac{1}{8}$	$+\infty$	

$$f\left(\frac{1}{16}\right) = 2 \times \frac{1}{16} - \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

2 $f(x) = 3x - 1 - 2\frac{\sqrt{x+1}}{x}$

On a : $x \in D_f \iff x + 1 \geq 0$ et $x \neq 0$

$$\iff x \geq -1 \text{ et } x \neq 0$$

$$\iff x \in ([-1; +\infty[- \{0\})$$

$$D_f = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$$

b. La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $I =]-1; 0[$ et $J =]0; +\infty[$, car c'est la somme et quotient de fonctions dérivables sur ces intervalles : ($f = u + \frac{v}{w}$)

$u: x \mapsto 3x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme), et en particulier sur I et J .

$v: x \mapsto -2\sqrt{x+1}$ est dérivable sur I et J .

car la fonction : $x \mapsto x + 1$ est dérivable et strictement positive sur I et J .

$w: x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et ne s'annule pas sur I et J .

► Étudions les dérivabilité de f à droite en -1:

On a : $f(-1) = -4$

Soit $x > -1$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \frac{3x - 1 - \frac{2\sqrt{x+1}}{x} + 4}{x + 1} \\ &= \frac{3(x+1)}{x+1} - \frac{2\sqrt{x+1}}{x(x+1)} \\ &= 3 - \frac{2}{x\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x\sqrt{x+1} = 0^- \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{-2}{x\sqrt{x+1}} = +\infty$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(3 - \frac{2}{x\sqrt{x+1}} \right) = +\infty$

D'où f n'est pas dérivable à droite en -1 .

$$\begin{aligned} (\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[); \text{ on a : } f'(x) &= 3 - 2 \left(\frac{\frac{x}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{x^2} \right) \\ &= 3 - 2 \frac{x - 2(x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}} \\ &= 3 - 2 \left(\frac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}} \right) \\ &= 3 + \frac{x+2}{x^2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

c. Calculons les limites aux bornes de D_f :

► On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x - 1 - 2\frac{\sqrt{x+1}}{x}) = +\infty$

(car : $\lim_{x \rightarrow 0^-} -2\sqrt{x+1} = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^-$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2\sqrt{x+1}}{x} = +\infty$)

et on a : $\lim_{x \rightarrow 0} (3x - 1) = -1$

► $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

On a : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0 \end{cases}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

d. Tableau de variations de la fonction f :

On a : $f'(x) = 3 + \frac{x+2}{x^2\sqrt{x+1}}$; $(\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[)$

et : $x > -1 \Rightarrow x+2 > 1$

$$\Rightarrow 3 + \frac{x+2}{x^2\sqrt{x+1}} > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$

Donc f est strictement croissante sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

► Tableau de variations de f :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
f	-4	$+\infty$	$+\infty$

Exercice 22

1 Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; x^n - 1 \geq n(x - 1)$

On a : $x^n - 1 \geq n(x - 1) \Leftrightarrow x^n - 1 - n(x - 1) \geq 0$

L'inégalité est vérifiée pour : $n = 1$, car : $x^1 - 1 = x - 1$ et $1(x - 1) = x - 1$

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x^n - 1 - n(x - 1)$

avec : $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et $x \in [0; +\infty[$

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$

$$\begin{aligned} \text{► } 0 \leq x < 1 &\Rightarrow x^{n-1} < 1^{n-1} \\ &\Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0 ; n \neq 1 \\ &\Rightarrow f'(x) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{► } x > 1 &\Rightarrow x^{n-1} > 1^{n-1} \\ &\Rightarrow x^{n-1} - 1 > 0 \\ &\Rightarrow f'(x) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{► } f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^{n-1} = 1 \text{ (car } x \geq 0 \text{)} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
f		0	

0 est le minimum absolu de la fonction f .

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; f(x) \geq 0$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (\forall x \in [0; +\infty[) ; x^n - 1 \geq n(x - 1)$

Remarque :

Cette inégalité s'appelle inégalité de **Bernoulli** connue sous la forme :

$$(x + 1)^n \geq 1 + nx$$

Il suffit de faire un changement de variable en remplaçant x par $x - 1$.

2 Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$

Soit x de $\mathbb{R}$,

$$\text{On a : } 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \leq 0$$

On considère la fonction f définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$

Il suffit de montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) \leq 0$

$$\text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = -x + \sin x$$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on étudie les variations de f' :

$$\text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = -x + \sin x$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}) : f''(x) = -1 + \cos x$$

$$\text{puisque : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\text{alors : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; -1 + \cos x \leq 0$$

$$\text{d'où : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) \leq 0$$

Par suite : f' est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarquer que : $f''(0) = -1 + \cos(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		+	
f'		0	
$f'(x)$	+	0	-
f		0	

On peut justifier le signe de $f'(x)$:

► Sur l'intervalle $] -\infty ; 0[$: $x < 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0)$ (car f' est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$).

C'est-à-dire : $f'(x) > 0$

► Sur l'intervalle $]0; +\infty[$: $x > 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0)$ (car f' est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$)

C'est-à-dire : $f'(x) < 0$

D'où le tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

Puisque 0 est la valeur maximale de f , alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) \leq 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \leq 0$

Exercice 23

$$f(x) = \sqrt{x-2} + x + 1$$

1 Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} .

La continuité :

La fonction f est continue sur l'intervalle $D_f = [2; +\infty[$, car c'est la somme de deux fonctions continues sur cet intervalle qui sont : $u : x \mapsto x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car fonction affine), et en particulier sur $[2; +\infty[$.

et $v : x \mapsto \sqrt{x-2}$ est continue sur $I = [2; +\infty[$, car la fonction $x \mapsto x - 2$ est continue et positive sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

La monotonie :

$$\text{On a : } (\forall x \in]2; +\infty[) : f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} + 1$$

$$\text{donc : } (\forall x \in]2; +\infty[) ; f'(x) > 0$$

d'où f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

Par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$

tel que : $J = f([2; +\infty[)$

$$= [f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

$$= [3; +\infty[$$

2 Étudions la continuité et la monotonie de f^{-1} sur J :

► On a : f est continue sur l'intervalle $I = [2; +\infty[$.

Donc : f^{-1} est continue sur l'intervalle $J = f(I)$.

► On a : f est strictement croissante sur $I = [2; +\infty[$.

Donc : f^{-1} est strictement croissante sur $J = f(I)$.

3 Montrons que f^{-1} est dérivable en 5 et calculons $(f^{-1})'(5)$:

On a : $3 \in I$ et $f(3) = 5$

Donc : $f^{-1}(5) = 3$

La fonction f est dérivable en 3 et $f'(3) \neq 0$ (car $f'(3) = \frac{3}{2}$)

Donc la fonction f^{-1} est dérivable en 5.

On a : $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{2}{3}$

4 Montrons que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]3; +\infty[$:

On a : f est dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

et $(\forall x \in]2; +\infty[) ; f'(x) \neq 0$

Donc la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(]2; +\infty[) =]3; +\infty[$.

5 Résolvons dans l'intervalle J l'inéquation $f^{-1}(2x-7) > f^{-1}(x)$:

► Ensemble de définition :

Cette inéquation est définie si $x \in J$ et $(2x-7) \in J$.

$$x \geq 3 \text{ et } x \in J \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ et } (2x-7) \in J$$

$$\Leftrightarrow x \geq 3 \text{ et } x \geq 5$$

$$\Leftrightarrow x \geq 5$$

Cette inéquation est définie sur l'intervalle $[5; +\infty[$.

► Résolvons l'inéquation :

Soit x de $[5; +\infty[$.

On a : $f^{-1}(2x-7) > f^{-1}(x) \Leftrightarrow 2x-7 > x$ (car f^{-1} est strictement croissante)

$$\Leftrightarrow x > 7$$

Donc : $S =]7; +\infty[\cap [5; +\infty[$

$$=]7; +\infty[$$

Exercice 24

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.
Étudions les variations de f sur $]0; +\infty[$.

$$(\forall x \in]0, +\infty[), f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

On a : $(\forall x > 0) ; \frac{x+1}{x} > 0$

Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est celui de $x - 1$

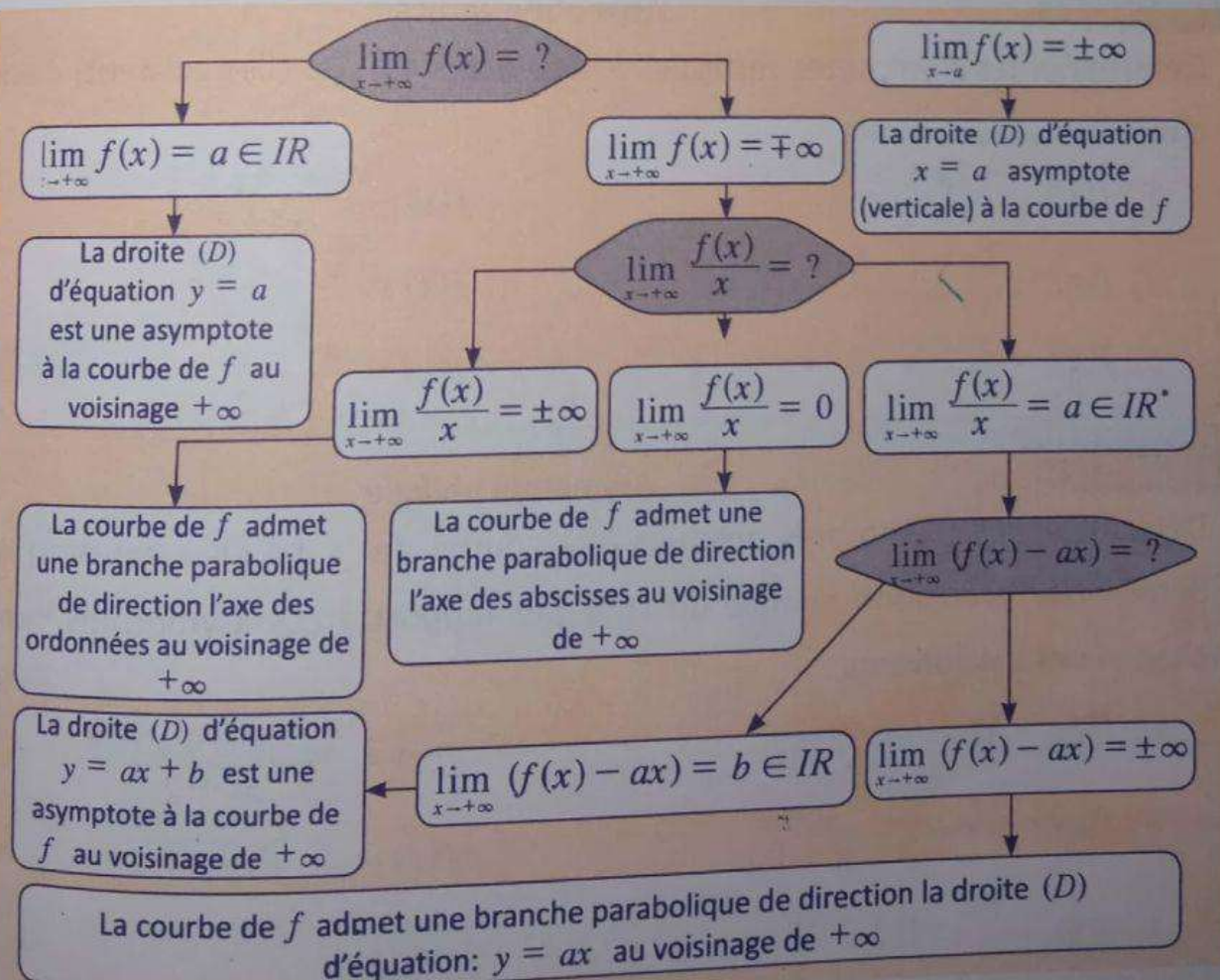
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f			

$2,0123456788 \in]1, +\infty[$ et $2,0123456789 \in]1, +\infty[$

$\underbrace{2,0123456788}_{x_1} < \underbrace{2,0123456789}_{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, (car f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$).

$$\Rightarrow B < A$$

8 Branches infinies



Propriété:

- ▶ Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ alors la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
- ▶ On obtient les mêmes résultats en remplaçant x tend vers $+\infty$ par x tend vers $-\infty$.

Exercices

Exercice 25

Asymptote horizontale

Déterminer les asymptotes horizontales de la courbe de f (si elles existent) puis déterminer la position relative de (C_f) par rapport à ces asymptotes dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$

3 $f(x) = \frac{2x+3}{x^4+5}$

5 $f(x) = x^3 - 5x + 2$

7 $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2$

2 $f(x) = \frac{3-2x^2}{x^2+3}$

4 $f(x) = \frac{|x+1| - x + 5}{2+3x}$

6 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Exercice 26

Asymptote verticale

Déterminer les asymptotes verticales à la courbe de f (si elles existent) dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = \frac{-2x+5}{x+3}$

3 $f(x) = \frac{3x-7}{x^2-1}$

5 $f(x) = \sqrt{x} - x + 1$

2 $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 + 1}$

4 $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

6 $f(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{x}-2}$

Exercice 27

Asymptote oblique

Déterminer les asymptotes obliques à la courbe de f (si elles existent) et déterminer la position relative de (C_f) par rapport à ces asymptotes dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = 3x + 1 - \frac{5}{x^2+1}$

3 $f(x) = -x + 2 - \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

5 $f(x) = \frac{1-2x|x-3|}{x+5}$

2 $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2 + 2}$

4 $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$

Exercice 28

Branche parabolique



direction l'axe des abscisses

Est-ce que la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses dans chacun des cas suivants?

1 $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$

3 $f(x) = x^3 - 5x + 1$

5 $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

2 $f(x) = 1 - \sqrt{2 - x}$

4 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

6 $f(x) = \frac{x - \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 2}}$

Exercice 29

Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

Est-ce que la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées dans chacun des cas suivants?

1 $f(x) = -2x^3 + x^2 - 3x + 1$

3 $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

5 $f(x) = -3x^2 + 5 - \sqrt{x^2 + 1}$

2 $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$

4 $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

Exercice 30

Branche parabolique de direction la droite d'équation

$D: y = ax ; a \neq 0$

Est-ce que la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $(a \neq 0)y = ax$?

1 $f(x) = \sqrt{2x + 1} + 3x$

3 $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$

5 $f(x) = x + \frac{2x}{\sqrt{x + 3}}$

2 $f(x) = -2x - 3\sqrt{x - 4}$

4 $f(x) = 2 - \sqrt{3x + 1}$

Exercice 31

Le plan est rapporté à un repère orthogonal

Compléter le tableau suivant :

	Limites	Interprétation géométrique
1	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$	
2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	
3	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$	
4	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$	
5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$	

6	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	
7	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$	
8	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0$	
9	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x + 2)) = 3$	
10	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (3x + 1)) = 0$	
11	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = 0$	
12	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = -2$	
13	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = +\infty$	
14	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = -\infty$	
15	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -2$	
16		La droite $(D_1): y = 3$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$
17		La droite $(D_2): y = x$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$
18		(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite $(D_3): y = 2x$ au voisinage de $-\infty$.

Solutions

Exercice 25

Pour que la courbe de f admette une asymptote horizontale (parallèle à l'axe des abscisses), il faut que l'infini (∞) soit une borne de (D_f) , et la limite de f en l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) soit finie (un nombre réel).

► Si: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, alors la droite d'équation $y = a$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

► Si: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

1 $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$

On a : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$

Donc la droite $(D) : y = \frac{3}{2}$ admet une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

► Étudions la position de (C_f) par-rapport à l'asymptote (D) .

On étudie le signe de : $f(x) - \frac{3}{2}$

Soit x de (D_f) , on a : $f(x) - \frac{3}{2} = \frac{3x-1}{1+2x} - \frac{3}{2}$
 $= \frac{6x-2-3-6x}{2(1+2x)}$
 $= \frac{-5}{4x+2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x+2$	-		+
$f(x) - \frac{3}{2} = \frac{-5}{4x+2}$	+		-
La position relative de (C_f) et de la droite: $(D): y = \frac{3}{2}$	(C_f) est au dessus de (D)		(C_f) est au dessous de (D)

2 $f(x) = \frac{3-2x^2}{x^2+3}$

On a : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2 = -2$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

Donc la droite : $(D): y = -2$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage $+\infty$ et $-\infty$.

► Étudions la position de (C_f) par rapport à $(D): y = -2$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \text{ de } \mathbb{R}, \text{ on a : } f(x) - (-2) &= \frac{3-2x^2}{x^2+3} + 2 \\ &= \frac{3-2x^2+2x^2+6}{x^2+3} \\ &= \frac{9}{x^2+3} \end{aligned}$$

On a : $\frac{9}{x^2+3} > 0$ donc : $f(x) - (-2) > 0$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) > -2$

et par suite (C_f) est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

3 $f(x) = \frac{2x+3}{x^4+5}$

On a : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = 0$$

Donc la droite $(D): y = 0$ (axe des abscisses) est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

► Étudions la position de (C_f) par rapport à l'asymptote (D) .

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) - 0 = \frac{2x+3}{x^4+5}$

Le signe de $f(x)$ est celui de $2x+3$, car : $(\forall x \in \mathbb{R}); x^4+5 > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$2x+3$	-	0	+
$f(x)$	-	0	+
La position de (C_f) par rapport à l'axe des abscisses	(C_f) est au dessous de l'axe des abscisses		(C_f) est au dessus de l'axe des abscisses

$$f(x) = \frac{|x+1| - x + 5}{2+3x}$$

$$\text{On a : } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{2}{3} \right\} =]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]-\frac{2}{3}; +\infty[$$

x	$+\infty$	-1	$-\infty$
$ x+1 $	$-x-1$	0	$x+1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1-x+5}{2+3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x+5}{2+3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{2+3x} = 0$$

Donc : - La droite $(D_1) : y = -\frac{2}{3}$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

- La droite $(D_2) : y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$

► Étudions la position de (C_f) par rapport à (D_1) et (D_2) :

Pour l'asymptote $(D_1) : y = -\frac{2}{3}$ au voisinage de $-\infty$.

$$\begin{aligned} (\forall x \in]-\infty; -1]) ; f(x) - \left(-\frac{2}{3}\right) &= \frac{-2x+4}{2+3x} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{-6x+12+4+6x}{6+9x} = \frac{16}{6+9x} \end{aligned}$$

Le signe de : $f(x) + \frac{2}{3}$ est celui de $6+9x$.

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	-1	$+\infty$
$6+9x$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x) + \frac{2}{3}$	$-$		$+$	
La position de (C_f) par rapport à (D_1)	(C_f) est au dessous de $D_1 ; y = -\frac{2}{3}$		(C_f) est au dessus de $D_1 ; y = -\frac{2}{3}$	

Pour l'asymptote $(D_2): y = 0$ au voisinage de $+\infty$

On a : $(\forall x \in [-1; +\infty[- \{-\frac{2}{3}\}]); f(x) = \frac{6}{2+3x}$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$3x+2$	-		-	+
$f(x)$			-	+
position de (C_f) par rapport à (D_2)			(C_f) est au dessous de (D_2)	(C_f) est au dessus de (D_2)

5 $f(x) = x^3 - 5x + 2$

On a : $Df = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \notin \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc (C_f) n'admet pas d'asymptote horizontale ni au voisinage de $+\infty$ ni au voisinage de $-\infty$.

6 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

► Ensemble de définition de f :

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \text{ de } \mathbb{R}, \text{ on a : } x \in D_f &\Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (1-x)(1+x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	0	-

Donc : $D_f = [-1; 1]$

Puisque ∞ n'est pas une borne de D_f , alors la courbe de f n'admet pas d'asymptote horizontale..

7 $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2$

► Ensemble de définition de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \geq 0$

On a : $\Delta = 1 - 4 = -3$

Puisque : $\Delta < 0$ et $a > 0$, alors : $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - x + 1 > 0$

D'où : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

► Calculons les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$:

$\triangleright$ au voisinage de $-\infty$: $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 2) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\triangleright$ au voisinage de $+\infty$:

Soit : $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2 = \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 - (x - 2)^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + (x - 2)} \\
 &= \frac{x^2 - x + 1 - x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2} = \frac{3x - 3}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2} \\
 &= \frac{x(3 - \frac{3}{x})}{x[\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}} + 1 - \frac{2}{x}]} = \frac{3 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}} + 1 - \frac{2}{x}} \\
 \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{3}{x} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}} + 1 - \frac{2}{x} = 2 \end{array} \right\} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

On a :

$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \notin \mathbb{R}$

Donc : (C_f) n'admet pas d'asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$

Donc : (C_f) admet une asymptote horizontale (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = \frac{3}{2}$.

$\triangleright$ Étudions la position de (C_f) avec l'asymptote (D) au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned}
 f(x) - \frac{3}{2} &= \sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2 - \frac{3}{2} = \sqrt{x^2 - x + 1} - x + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 - (x - \frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + (x - \frac{1}{2})} = \frac{x^2 - x + 1 - x^2 + x - \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x - \frac{1}{2}} \\
 f(x) - \frac{3}{2} &= \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x - \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

On a : $\forall x \in [\frac{1}{2}; +\infty[; x - \frac{1}{2} \geq 0$

Donc : $\sqrt{x^2 - x + 1} + x - \frac{1}{2} > 0$, d'où : $f(x) - \frac{3}{2} > 0$

Donc : $(\forall x \in [\frac{1}{2}; +\infty[); f(x) > \frac{3}{2}$

Par suite (C_f) est au dessus de (D) : $y = \frac{3}{2}$ sur l'intervalle de $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

Exercice 26

Pour que la courbe de f admette une asymptote verticale (D) d'équation : $x = a$, il faut que :

- ▶ a soit une valeur interdite de f (annule le dénominateur).
- ▶ La limite de f en a (ou à droite ou à gauche en a) soit ∞ .

1 $f(x) = \frac{-2x + 5}{x + 3}$

▶ Ensemble de définition de f :

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{-3\} =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$

(Le dénominateur de f s'annule en -3).

▶ Calculons la limite de f en -3 :

On a :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3} -2x + 5 = 11 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} x + 3 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} x + 3 = 0^- \end{cases}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$

D'où la droite $(\Delta) : x = -3$ est une asymptote verticale de f .

2 $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 + 1}$

▶ Ensemble de définition de f :

On a : $D_f = \mathbb{R}$ (Le dénominateur de f ne s'annule pas), donc la courbe de f n'admet pas d'asymptote verticale.

3 $f(x) = \frac{3x - 7}{x^2 - 1}$

▶ Ensemble de définition de f :

$$\begin{aligned} x \in D_f &\Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \end{aligned}$$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

(Le dénominateur de f s'annule en -1 et 1)

▶ Calculons la limite de f en -1 :

On a :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} 3x - 7 = -10 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 1 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 1 = 0^- \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

D'où la droite $(D_1): x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe de f .

► Calculons la limite de f en 1:

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x - 7 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 1 = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 = 0^+ \end{cases}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

D'où la droite $(D_2): x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe de f .

4 $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

► Ensemble de définition de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{2; -2\}$

(Le dénominateur de f s'annule en -2 et 2)

► Calculons la limite de f en -2:

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 - x - 2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 - 4 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 - 4 = 0^- \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

D'où la droite $(D_1): x = -2$ est une asymptote verticale à la courbe de f .

► Limite de f en 2 :

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) &= \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} \\ &= \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{x + 1}{x + 2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq \infty$

alors la droite (D) : $x = 2$ n'est pas une asymptote verticale à la courbe de f ,

5 $f(x) = \sqrt{x} - x + 1$

► Ensemble de définition de f :

$$D_f = [0; +\infty[$$

Donc la courbe de f n'admet pas d'asymptote verticale.

6 $f(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{x}-2}$

► Ensemble de définition de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } x \neq 4$$

$$\Leftrightarrow x \in ([0; +\infty[- \{4\})$$

$$\text{Donc : } D_f = [0; 4[\cup]4; +\infty[$$

(Le dénominateur de f s'annule en 4)

Calculons la limite de f en 4 :

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4} 4x + 1 = 17 \\ \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} - 2 = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} - 2 = 0^+ \end{cases}$$

Soit : $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sqrt{x} - 2 > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \\ &\Leftrightarrow x > 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sqrt{x} - 2 < 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x < 4 \end{aligned}$$

x	0	4	$+\infty$
$\sqrt{x} - 2$		0	+

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} f(x) = +\infty$$

D'où la droite d'équation : $x = 4$ est une asymptote verticale à la courbe de f .

Exercice 27

Pour que la courbe de la fonction f admette une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Il faut que : - la fonction f soit définie au voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire $+\infty$ soit une borne de D_f) et que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty \\ \triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^* \quad \text{(ou } (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b)) = 0 \\ \triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

1 $f(x) = 3x + 1 - \frac{5}{x^2 + 1}$

► Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

► Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{x^2 + 1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x + 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x^2 + 1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

On a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - (3x + 1)) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-5}{x^2 + 1} = 0$

Donc la droite (D) d'équation $y = 3x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Cas général:

Si : $f(x) = ax + b + \varphi(x)$,

telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

Donc la droite d'équation $(D) : y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage $+\infty$.

Étudions la position de (C_f) par rapport à l'asymptote (D) :

On a : $f(x) - (3x + 1) = \frac{-5}{x^2 + 1}$

puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{-5}{x^2 + 1} < 0$

Alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) - (3x + 1) < 0$ c'est-à-dire : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) < 3x + 1$

Donc : (C_f) est au dessous de (D) sur $\mathbb{R}$.

$$2 \quad f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2 + 2}$$

► Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

Calculons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{f(x)}{x} &= \frac{\frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2 + 2}}{x} \\ &= \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^3 + 2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$:

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) - 2x &= \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2 + 2} - 2x \\ &= \frac{2x^3 - x^2 + x - 2 - 2x^3 - 4x}{x^2 + 2} \\ &= \frac{-x^2 - 3x - 2}{x^2 + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3x - 2}{x^2 + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

D'où la droite $(\Delta) : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

- En suivant les mêmes étapes, on aura le même résultat au voisinage de $-\infty$.

c'est-à-dire la droite (Δ) d'équation: $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

► Étudions la position de (C_f) par rapport à l'asymptote (D) sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in \mathbb{R} ; \text{ On a: } f(x) - (2x - 1) &= \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2 + 2} - (2x - 1) \\ &= \frac{2x^3 - x^2 + x - 2 - (2x - 1)(x^2 + 2)}{x^2 + 2} \\ &= \frac{2x^3 - x^2 + x - 2 - (2x^3 + 4x - x^2 - 2)}{x^2 + 2} \\ &= \frac{-3x}{x^2 + 2} \end{aligned}$$

Le signe de $f(x) - (2x - 1)$ est celui de $-3x$ (car: $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + 2 > 0$).

x	$+\infty$	4	$+\infty$
$-3x$	+	0	-
$f(x) - (2x - 1)$	+	0	-
Position de (C_f) par rapport à l'asymptote $(D): y = 2x - 1$	(C_f) est au dessus de (D)		(C_f) est au dessous de (D)

$$(C_f) \cap (D) = \{A(4; f(4))\}$$

3 $f(x) = -x + 2 - \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

► Ensemble de définition :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a: $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$ et $x+1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

Donc: $Df = [0; +\infty[$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 0 \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\sqrt{x}}{x+1}} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

et on a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x + 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{x}}{x+1} = 0$

Donc la droite $(\Delta): y = -x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe f au voisinage de $+\infty$.

► Étudions la position de (C_f) par rapport à l'asymptote (Δ) .

On a : $\forall x \in [0; +\infty[; f(x) - (-x + 2) = \frac{-\sqrt{x}}{x+1}$

Puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); -\frac{\sqrt{x}}{x+1} \leq 0$, alors : $(\forall x \in [0; +\infty[); f(x) \leq -x + 2$

D'où la courbe de f se trouve au dessous de l'asymptote oblique (Δ) .

4 $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$

► Ensemble de définition :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 \geq 0$

Le discriminant du trinôme $-x^2 + x + 2$ est : $\Delta = 9$

Donc les solutions de l'équation $-x^2 + x + 2 = 0$ sont : $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{-2} = -1$
 $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{-2} = 2$

Le tableau de signe de $-x^2 + x + 2$:

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$-x^2 + x + 2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc : $D_f = [-1; 2]$

Puisque l'infini n'est pas une borne de D_f , alors la courbe de la fonction f n'admet pas d'asymptote oblique.

5 $f(x) = \frac{1 - 2x|x - 3|}{x + 5}$

► Ensemble de définition :

$D_f = \mathbb{R} - \{-5\} =]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[$

► Calculons les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Ecrivons tout d'abord l'expression de f sans le symbole de la valeur absolue:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$ x - 3 $	$-x + 3$	0	$x - 3$

► Si : $x \in]-\infty; -5[\cup]-5; 3]$, alors : $|x - 3| = -x + 3$

donc : $f(x) = \frac{1 - 2x(-x + 3)}{x + 5} = \frac{2x^2 - 6x + 1}{x + 5}$

► Si : $x \in [3; +\infty[$, alors : $|x-3| = x-3$

$$\text{donc : } f(x) = \frac{1-2x(x-3)}{x+5} = \frac{-2x^2+6x+1}{x+5}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} f(x) = \frac{2x^2-6x+1}{x+5} ; x < 3 \text{ et } x \neq -5 \\ f(x) = \frac{-2x^2+6x+1}{x+5} ; x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{► } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-6x+1}{x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{► } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+6x+1}{x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x \\ &= -\infty \end{aligned}$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\text{Soit } x < -5 ; \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2-6x+1}{x^2+5x}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

► Calculons : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x)$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x < -5 ; \text{ on a : } f(x) - 2x &= \frac{2x^2-6x+1}{x+5} - 2x \\ &= \frac{2x^2-6x+1-2x^2-10x}{x+5} \\ &= \frac{-16x+1}{x+5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{16x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-16) \\ &= -16 \end{aligned}$$

D'où la droite $(D_1) : y = 2x - 16$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\text{On a : } x \geq 3; \frac{f(x)}{x} = \frac{-2x^2 + 6x + 1}{x^2 + 5x}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x)$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } x \geq 3; f(x) + 2x &= \frac{-2x^2 + 6x + 1}{x + 5} + 2x \\ &= \frac{-2x^2 + 6x + 1 + 2x^2 + 10x}{x + 5} \\ &= \frac{16x + 1}{x + 5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16x + 1}{x + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 16 \\ &= 16 \end{aligned}$$

D'où la droite $(D_2): y = -2x + 16$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

► Étudions la position de (C_f) par rapport à l'asymptote $(D_2): y = -2x + 16$ sur l'intervalle $[3; +\infty[$.

$$\begin{aligned} x \geq 3; f(x) - (-2x + 16) &= \frac{-2x^2 + 6x + 1}{x + 5} - (-2x + 16) \\ &= \frac{-2x^2 + 6x + 1 - (-2x^2 + 6x + 80)}{x + 5} \\ &= \frac{-79}{x + 5} \end{aligned}$$

$$x \in [3; +\infty[\Rightarrow x \geq 3$$

$$\Rightarrow x + 5 \geq 8 > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{79}{x + 5} < 0$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in [3; +\infty[); f(x) < -2x + 16$$

D'où la courbe de f se trouve au dessous de l'asymptote oblique $(D_2): y = -2x + 16$ sur $[3; +\infty[$

► Étudions la position de (C_f) par rapport à l'asymptote oblique

$(D_1): y = 2x - 16$ sur $[-\infty; 3[- \{-5\}$.

Soit $x \neq -5$ et $x < 3$.

$$\begin{aligned} f(x) - (2x - 16) &= \frac{2x^2 - 6x + 1}{x + 5} - (2x - 16) \\ &= \frac{2x^2 - 6x + 1 - (2x^2 - 6x - 80)}{x + 5} \\ &= \frac{81}{x + 5} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-5	3
$x + 5$	$-$	0	$+$
$f(x) - (2x - 16)$	$-$		$+$
Position (C_f) par rapport à l'asymptote (D_1)	(C_f) est au dessous de (D_1)		(C_f) est au dessus de (D_1)

Exercice 28

Pour que la courbe de f admette une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$, il faut que :

- (1) $+\infty$ soit une borne de D_f .
- (2) La limite de f en $+\infty$ soit infinie.
- (3) La limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ soit 0 : $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \right)$

(Les mêmes conditions au voisinage de $-\infty$)

1 $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$

► Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3\sqrt{x} - 2 = +\infty$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x > 0, \text{ on a : } \frac{f(x)}{x} &= \frac{3\sqrt{x} - 2}{x} \\ &= \frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \end{aligned}$$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right) = 0$

D'où la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

2 $f(x) = 1 - \sqrt{2-x}$

► **Ensemble de définition :**

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow 2-x \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \leq 2$

Donc : $D_f =]-\infty; 2]$

► **Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2-x &= +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \sqrt{2-x}) = -\infty \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

► **Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$:**

Soit $x < 0$;

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{f(x)}{x} &= \frac{1 - \sqrt{2-x}}{x} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{2-x}}{x} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{2-x}{x\sqrt{2-x}} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{\frac{2}{x} - 1}{\sqrt{2-x}} \end{aligned}$$

et on a : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\left(\frac{2}{x} - 1\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{\frac{2}{x} - 1}{\sqrt{2-x}} \right) = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

D'où la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.

3 $f(x) = x^3 - 5x + 1$

► **Ensemble de définition :** $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

► **Calculons** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

► **Calculons** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x \neq 0$

on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 5x + 1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$

Alors la courbe de f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

4 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

► **Ensemble de définition :** $x \in D_f \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (2 - x)(2 + x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [-2; 2]$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$4 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

donc : $D_f = [-2; 2]$

Puisque : $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des bornes de D_f , alors la courbe de f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

5 $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

► **Ensemble de définition :**

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \geq 0$

Le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ est: $\Delta = 1 - 4 = -3$

Puisque : $\Delta < 0$ et $a > 0$, alors : $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + x + 1 > 0$

Puisque : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

Puisque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

► Calculons : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } x \neq 0 ; \frac{f(x)}{x} &= \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} \\ &= \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -1$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$

Alors la courbe de f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

$$\text{6 } f(x) = \frac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$$

► Ensemble de définition : Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x+2} \neq 0 \text{ et } x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\text{Donc : } D_f = [1; +\infty[$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\text{Soit } x \geq 1, \text{ on a : } f(x) = \frac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x} \left[\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} \right]}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right)}$$

donc : $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}}$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$

et $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}} = +\infty$ c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

On a : $x > 0$; $\frac{f(x)}{x} = \frac{x - \sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+2x}} = \frac{x \left[1 - \frac{\sqrt{x-1}}{x} \right]}{x[\sqrt{x+2}]} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x+2}}$

$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

infos :

$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow \sqrt{x^2} = x \\ \frac{\sqrt{x-1}}{x} &= \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x-1}{x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$

Exercice 29

Pour que la courbe de la fonction f admette une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ il faut que :

- (1) $+\infty$ soit une borne de D_f .
- (2) La limite de f en $+\infty$ soit ∞ .
- (3) La limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ soit ∞ (les mêmes conditions au voisinage de $-\infty$).

1 $f(x) = -2x^3 + x^2 - 3x + 1$

► Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$$

Donc : C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x + 1}$$

► Ensemble de définition : $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$$

$$\text{De même, on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Donc la courbe de f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

$$\textcircled{3} f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$$

► Ensemble de définition :

soit x un réel, On a :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^3 + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) \geq 0 \quad (\text{car } (\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 - x + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

$$\text{Donc : } D_f = [-1; +\infty[$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 1 = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 1} = +\infty$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x > 0$ on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} = \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x^2}} = \sqrt{x + \frac{1}{x^2}}$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \frac{1}{x^2}} = +\infty$ d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Par suite la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

4 $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

► Ensemble de définition :

$$x \in D_f \iff x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 3x + 2$ est : $\Delta = 9 - 8 = 1$

Les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont :

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

Tableau de signes de $x^2 - 3x + 2$:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \iff x \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$$

$$\text{donc : } D_f =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

On a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 2 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = +\infty$

d'où : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x > 2$; on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 1$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Soit $x < 0$; on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}}{x}$
 $= \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x}$
 $= \frac{-x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x}$
 $= -\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$

Donc la courbe f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses ordonnées ni au voisinage de $+\infty$ ni au voisinage de $-\infty$.

5 $f(x) = -3x^2 + 5 - \sqrt{x^2 + 1}$

► **Ensemble de définition** : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ (car : $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + 1 > 0$)

► **Calculons** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

On a : $\begin{cases} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} -3x^2 + 5 = -\infty \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} -\sqrt{x^2 + 1} = -\infty \end{cases}$

Donc : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

► **Calculons** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x \neq 0$; on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{-3x^2 + 5 - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$
 $= -3x + \frac{5}{x} - \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$
 $= -3x + \frac{5}{x} - \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x}$

► Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3x + \frac{5}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$

(car : $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x + \frac{5}{x} = +\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-3x + \frac{5}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = -\infty$$

$$(\text{car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = -1) \text{ une } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + \frac{5}{x} = -\infty$$

Par suite la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

Exercice 30

Pour que la courbe de la fonction f admette une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$, il faut que:

(1) $+\infty$ soit une borne de l'ensemble de définition de la fonction f ;

(2) La limite de f en $+\infty$ soit ∞ ;

(3) La limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ soit un nombre a non nul;

(4) La limite de $f(x) - ax$ en $+\infty$ soit infinie.

(les mêmes conditions au voisinage de $-\infty$).

1 $f(x) = \sqrt{2x+1} + 3x$

► Ensemble de définition :

Soit x un réel, On a :

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } D_f = \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x > 0; \text{ on a : } \frac{f(x)}{x} &= \frac{\sqrt{2x+1} + 3x}{x} \\ &= \frac{\sqrt{2x+1}}{x} + 3 \\ &= \sqrt{\frac{2x+1}{x^2}} + 3 \\ &= \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3 \end{aligned}$$

infos:

$$x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2}$$

$$x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{x^2}$$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 = a$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$:

On a : $f(x) - 3x = \sqrt{2x+1}$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$; alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = +\infty$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y = 3x$ au voisinage de $+\infty$.

2 $f(x) = -2x - 3\sqrt{x-4}$

► Ensemble de définition :

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x - 4 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq 4$

Donc : $D_f = [4; +\infty[$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -3\sqrt{x-4} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x > 4; \text{ on a : } \frac{f(x)}{x} &= \frac{-2x - 3\sqrt{x-4}}{x} \\ &= -2 - \frac{3\sqrt{x-4}}{x} \\ &= -2 - 3\sqrt{\frac{x-4}{x^2}} \\ &= -2 - 3\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}} \end{aligned}$$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}} = 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x)$:

On a : $f(x) + 2x = -3\sqrt{x-4}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3\sqrt{x-4} = -\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = -\infty$

Par suite la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y = -2x$ au voisinage de $+\infty$.

3 $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$

► Ensemble de définition :

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - x + 3 \geq 0$

Le discriminant du trinôme $x^2 - x + 3$ est : $\Delta = 1 - 12 = -11$

On a : $\Delta < 0$ et $a > 0$; donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 - x + 3 > 0$,

d'où : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

On a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 - x + 3 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 3} = +\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x > 0 ; \text{ on a : } \frac{f(x)}{x} &= \frac{\sqrt{x^2 - x + 3}}{x} \\ &= \sqrt{\frac{x^2 - x + 3}{x^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x > 0 ; \text{ on a : } f(x) - x &= \sqrt{x^2 - x + 3} - x \\ &= \frac{x^2 - x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 3} + x} \\ &= \frac{-x + 3}{\sqrt{x^2 - x + 3} + x} \\ &= \frac{x(-1 + \frac{3}{x})}{x[\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1]} \end{aligned}$$

$$f(x) - x = \frac{-1 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 + \frac{3}{x}) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 = 2 \end{cases}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\frac{1}{2}$

D'où la courbe de f n'admet pas de branche parabolique au voisinage de $+\infty$ (Par contre, elle admet une asymptote oblique d'équation $y = x - \frac{1}{2}$).

► Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x < 0$, on a : $x < 0$; $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - x + 3}}{x}$

$$= \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \frac{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x}$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = -1$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$:

Soit $x < 0$, on a : $f(x) + x = \sqrt{x^2 - x + 3} + x$

$$= \frac{(x^2 - x + 3) - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 3} - x}$$

$$= \frac{-x + 3}{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - x}$$

$$= \frac{-x \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{-x \left[\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 \right]}$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1}$$

On a : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{3}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 = 2 \end{cases}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \frac{1}{2}$

Par suite la courbe de f n'admet pas de branche parabolique au voisinage de $-\infty$ (Par contre, elle admet une asymptote oblique d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$).

infos:

Si $x < 0$

alors: $\sqrt{x^2} = |x| = -x$

4 $f(x) = 2 - \sqrt{3x+1}$

► Ensemble de définition :

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow 3x+1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

Donc : $D_f = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x+1} = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x > 0, \text{ on a : } \frac{f(x)}{x} &= \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{x} \\ &= \frac{2}{x} - \frac{\sqrt{3x+1}}{x} \\ &= \frac{2}{x} - \sqrt{\frac{3x+1}{x^2}} \\ &= \frac{2}{x} - \sqrt{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Donc : (C_f) n'admet pas de branche parabolique de direction une droite d'équation $y = ax$.

où $a \neq 0$ (mais elle admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$).

5 $f(x) = x + \frac{2x}{\sqrt{x+3}}$

► Ensemble de définition :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x+3 > 0$

$$\Leftrightarrow x > -3$$

Donc : $D_f =]-3; +\infty[$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

On a : $f(x) = x + \frac{2x}{\sqrt{x+3}} = x \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x+3}}\right)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{\sqrt{x+3}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x > 0, \text{ on a : } x > 0; \frac{f(x)}{x} &= \frac{x \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x+3}} \right)}{x} \\ &= 1 + \frac{2}{\sqrt{x+3}} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x+3}} \right) = 1$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) - x &= \frac{2x}{\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{2x\sqrt{x+3}}{x+3} \\ &= \frac{2x\sqrt{x+3}}{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)} \\ &= \frac{2\sqrt{x+3}}{1 + \frac{3}{x}} \end{aligned}$$

$$\text{et on a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x+3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = +\infty$$

D'où la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $(D) : y = x$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 30

Le plan est rapporté à un repère orthogonal

Complétons le tableau :

Limites		Interprétation géométrique
1	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$	► La courbe de la fonction f admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, d'équation $y = -3$

2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	► La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
3	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$	► La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$	► La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (Axe des ordonnées)
5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$	► La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$
6	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	► La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$
7	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$	► La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$
8	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0$	► La courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 1$ au voisinage de $-\infty$
9	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x + 2)) = 3$	► La courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = -x + 5$ au voisinage de $-\infty$ (car: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x + 5)) = 0$)
10	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (3x + 1)) = 0$	► La courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = 3x + 1$ au voisinage de $+\infty$
11	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = 0$	► La courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = -2x$ au voisinage de $+\infty$ (car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-2x)) = 0$)
12	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = -2$	► La courbe de f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = -x - 2$

13	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = +\infty$	► La courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 3x$ au voisinage de $+\infty$.
14	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = -\infty$	► La courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = -x$ au voisinage de $-\infty$.
15	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -2$	La courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ au voisinage de $+\infty$.
16	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$	La droite (D) d'équation: $y = 3$ est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction f au voisinage de $+\infty$.
17	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$	La droite $(D): y = x$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
18	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \infty$	(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation: $y = 2x$ au voisinage de $-\infty$.

9 Concavité d'une courbe - Points d'inflexion d'une courbe

1. Concavité d'une courbe:

Définition:

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I et (C) sa courbe représentative.

- On dit que la courbe (C) est convexe si elle se trouve au dessus de toutes ses tangentes.
- On dit que la courbe (C) est concave si elle se trouve au dessous de toutes ses tangentes.

2. points d'inflexion

Définition:

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I .

On dit que le point $A(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C) si la courbe (C) change de concavité en A .

Proposition:

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , et x_0 un élément de I .

- ▶ Si f'' est positif sur l'intervalle I alors la courbe (C) est convexe.
- ▶ Si f'' est négative sur l'intervalle I , alors la courbe (C) est concave.
- ▶ Si f'' s'annule en x_0 et change de signe au voisinage x_0 , alors le point $A(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C) .

Définition:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , et x_0 un élément de I .

Si la fonction dérivée f' s'annule en x_0 sans changer de signe au voisinage de x_0 , alors le point $A(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C) .

9 Axe de symétrie - centre de symétrie

Proposition:

Soit f une fonction numérique définie sur D , et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé et a et b deux éléments de $\mathbb{R}$.

- ▶ La droite d'équation: $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C) si et seulement si:

Pour tout x de D , on a: $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$.

- ▶ Le point $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C) si et seulement si:

Pour tout x de D , on a: $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$

Exercices

Exercice 32

Étudier la concavité de la courbe de la fonction f , et déterminer ses points d'inflexion (s'ils existent) dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = x^2 + 3x - 1$ 2 $f(x) = x^3 + x^2$ 3 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Exercice 33

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$
Étudier la concavité de la courbe de f , et déterminer ses points d'inflexion.

Exercice 34

Étudier la concavité de la courbe de la fonction f , et déterminer ses points d'inflexion (s'ils existent) dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 2 $f(x) = (\sqrt[3]{x-1})^2$ 3 $f(x) = \cos^2 x + 2 \cos x - 1$

Exercice 35

Montrer que le point $I(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f dans chacun des cas suivants:

1 $I(-1;2)$; $f(x) = \frac{x^2+4x}{x+1}$
2 $I(1;2)$; $f(x) = x + \frac{x}{x-1}$
3 $I(0;0)$; $f(x) = \frac{\sin 4x}{\cos(2x)+4}$

Exercice 36

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

Montrer que la droite (D) d'équation : $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de f .

Exercice 32

Étudions la concavité de la courbe f dans les cas suivants:

1 f est une fonction polynôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a:

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 2x + 3$$

et on a: $(\forall x \in \mathbb{R}); f''(x) = 2$, (f' est dérivable sur $\mathbb{R}$),

puisque: $(\forall x \in \mathbb{R}); f''(x) > 0$, alors la courbe de f est convexe.

On résume ce résultat dans le tableau suivant:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x)$	+	
Concavité de la courbe de f		

2 f est une fonction polynôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a: $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 3x^2 + 2x$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f''(x) = 6x + 2$$

$$\text{et on a: } f''(x) = 0 \iff 6x + 2 = 0$$

$$\iff x = -\frac{1}{3}$$

Le tableau suivant résume la concavité de la courbe de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
Concavité de la courbe de f			

$f''(x)$ s'annule et change de signe en $-\frac{1}{3}$.

Donc le point $A\left(-\frac{1}{3}; f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ est un point d'inflexion de (C_f)

$$\left(f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{17}{9}\right)$$

3 f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

f est deux fois dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) ; f'(x) = \frac{1(x-1) - (x+1)1}{(x-1)^2}$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Autre méthode :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) ; f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{(x-1)^2} = \frac{-1-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$

Donc : $f'(x) = -2(x-1)^{-2}$

D'où : $f''(x) = (-2)(-2)(x-1)'(x-1)^{-2-1}$

$$= 4(x-1)^{-3} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) ; f'(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $x-1$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
Concavité de la courbe de f			

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$ la courbe de f est convexe et sur l'intervalle $]-\infty; 1[$ la courbe f est concave.

Exercice 33

Ensemble de définition : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$ et $\sqrt{x} - 1 \neq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq 0$ et $x \neq 1$

Donc : $D_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$

La fonction : $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ est dérivable sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$ et ne s'annule pas.

Donc : f est dérivable sur chacun de ces intervalles.

alors : $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[; f'(x) = \frac{-(\sqrt{x} - 1)'}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2}$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2}$$

On a : f' est dérivable sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

et on a : $(\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[) ; f''(x) = \frac{(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)'}{(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)^2}$

► **Calculons** $(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)'$:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)' &= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)^2 + 2\sqrt{x} \cdot 2(\sqrt{x}-1)'(\sqrt{x}-1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)^2 + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) \\ &= (\sqrt{x}-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + 2 \right) \\ &= (\sqrt{x}-1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \right) = (\sqrt{x}-1) \left(3 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Donc :
$$f''(x) = \frac{\frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)^2} = \frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}-1)}{4\sqrt{x}^3(\sqrt{x}-1)^4}$$

Par suite le signe de $f''(x)$ est celui de $(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}-1)$.

et on a :

$$(\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[) ; f''(x) = \frac{(x-1)(9x-1)}{4\sqrt{x}^3(\sqrt{x}-1)^4(\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x}+1)}$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $(x-1)(4x-1)$.

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{9}$	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
$9x-1$	-	0	+	+
$f''(x)$	+	0	-	+
Concavité de la courbe de f				

$f''(x)$ s'annule en $\frac{1}{9}$ et change de signe en $\frac{1}{9}$; donc le point $A\left(\frac{1}{9}; f\left(\frac{1}{9}\right)\right)$ est un point d'inflexion de la fonction f .

et on a : $f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}-1}} = \frac{1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$; donc : $A\left(\frac{1}{9}; -\frac{3}{2}\right)$ est le point d'inflexion de (C_f) .

Exercice 34

Étudions la concavité de la courbe de f dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

On a : $D_f = \mathbb{R}$ (car : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 + 1 \neq 0$)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a:

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) &= \frac{(x)'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

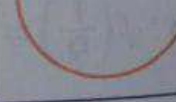
et on a : f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) &= \frac{(1 - x^2)'(x^2 + 1)^2 - (1 - x^2)((x^2 + 1)^2)'}{((x^2 + 1)^2)^2} \\ &= \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - (1 - x^2)2(2x)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2 + 1)[(x^2 + 1) + 2(1 - x^2)]}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2 + 1 + 2 - 2x^2)}{(x^2 + 1)^3} \\ &= \frac{-2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} \\ &= \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} \\ &= \frac{2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (x^2 + 1)^3 > 0$

Donc le signe de $f''(x)$ est celui de $2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$	-	-	0	+	+
$x^2 - 3$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	0	+
Concavité de la courbe de f					

La fonction f'' s'annule et change de signe en 0 , $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

Donc les points $A_1(0; f(0))$ et $A_2(\sqrt{3}; f(\sqrt{3}))$ et $A_3(-\sqrt{3}; f(-\sqrt{3}))$ sont des points d'inflexion de la courbe de f .

On a : $f(0) = 0$ et $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, et $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

Donc : $A_1(0; 0)$ et $A_2(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4})$, et $A_3(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4})$ sont les points d'inflexion de la courbe de f .

2 $f(x) = (\sqrt[3]{x-1})^2$

on a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \geq 0\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\} = [1; +\infty[$

f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et on a : $(\forall x > 1); f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$

D'où : $(\forall x > 1); f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$

On a : f' est dérivable sur $]1; +\infty[$, et on a :

$$(\forall x > 1); f''(x) = \frac{2}{3} \times \frac{-1}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}-1}$$

$$= -\frac{2}{9} \cdot 1 \cdot (x-1)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{4}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

Donc : $(\forall x > 1); f''(x) < 0$

D'où la courbe de f est concave sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

On obtient le tableau suivant:

x	1	$+\infty$
$f''(x)$		-
Concavité de la courbe de f		

3 $f(x) = \cos^2 x + 2 \cos x - 1$

$D_f = \mathbb{R}$

On a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 2(\cos x)'(\cos x)^{2-1} + 2(\cos x)'$$

$$= -2 \sin x \cos x - 2 \sin x$$

$$= -2 \sin x (\cos x + 1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \text{ ou } x = (2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}$$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$

$(\forall x \in \mathbb{R}); 0 \leq \cos x + 1$

On a f est une fonction périodique de période 2π .
alors il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π soit $[0; 2\pi]$.

x	0	π	2π
$-2\sin x$	0	0	0
$1 + \cos x$	+	0	+
$f''(x)$	0	0	0
Concavité de la courbe de f			

On a : (C_f) est concave sur tout intervalle de la forme :

$$[2k\pi; (2k+1)\pi]; (k \in \mathbb{Z})$$

et (C_f) est convexe sur tout intervalle de la forme :

$$[(2k+1)\pi; (2k+2)\pi]; (k \in \mathbb{Z})$$

$f''(x)$ s'annule et change de signe aux nombres $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc les points $A_k(2k\pi; f(2k\pi))$ et $B_k((2k+1)\pi; f((2k+1)\pi))$ sont des points d'inflexion de la courbe de f .

Exercice 35

1 Montrons que : $I(-1; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe de f , tel que: $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x+1}$.

$$\text{On a : } D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$x \in D_f \Rightarrow x < -1 \text{ ou } x > -1$$

$$\Rightarrow -x > 1 \text{ ou } -x < 1$$

$$\Rightarrow -2 - x > -1 \text{ ou } -2 - x < -1$$

$$\Rightarrow (-2 - x) \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

$$\Rightarrow (-2 - x) \in D_f$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in D_f); -2 - x \in D_f$$

$$\begin{aligned} \text{et } (\forall x \in D_f); f(-2-x) &= \frac{(-2-x)^2 + 4(-2-x)}{(-2-x)+1} = \frac{(2+x)^2 - 8 - 4x}{-1-x} \\ (1) \quad &= \frac{4 + 4x + x^2 - 8 - 4x}{-1-x} = \frac{x^2 - 4}{-x-1} = \frac{-x^2 + 4}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright 2b - f(x) &= 2 \times 2 - \frac{x^2 + 4x}{x+1} = \frac{4(x+1) - (x^2 + 4x)}{x+1} \\ &= \frac{4x + 4 - x^2 - 4x}{x+1} = \frac{-x^2 + 4}{x+1} \end{aligned}$$

$$2b - f(x) = \frac{4x + 4 - x^2 - 4x}{x + 1} = \frac{-x^2 + 4}{x + 1} \quad (2)$$

De (1) et (2) on déduit que :

$$(\forall x \in D_f) ; -2 - x \in D_f \text{ et } f(-2 - x) = 2 \times 2 - f(x)$$

Donc le point $I(-1; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe de f .

2 Montrons que le point $I(1; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe de f , tel que : $f(x) = x + \frac{x}{x-1}$.

$$\text{On a : } D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

Soit : $x \in D_f$, on a : $2a - x = 2 - x$ et

$$\begin{aligned} \blacktriangleright x \in D_f &\Leftrightarrow x < 1 \text{ ou } x > 1 \\ &\Leftrightarrow -x > -1 \text{ ou } -x < -1 \\ &\Leftrightarrow 2 - x > 1 \text{ ou } 2 - x < 1 \\ &\Leftrightarrow 2 - x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow 2 - x \in D_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et on a : } \blacktriangleright f(2 - x) &= 2 - x + \frac{(2 - x)}{(2 - x) - 1} = 2 - x + \frac{2 - x}{1 - x} \\ &= 2 - x + \frac{x - 2}{x - 1} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright 2b - f(x) &= 4 - \left(x + \frac{x}{x-1}\right) = 4 - x - \frac{x}{x-1} \\ &= 2 - x + 2 - \frac{x}{x-1} \\ &= 2 - x + \frac{2x - 2 - x}{x-1} \\ &= 2 - x + \frac{x-2}{x-1} \quad (2) \end{aligned}$$

De (1) et (2) on déduit que : $\forall x \in D_f ; 2 - x \in D_f$ et $f(2 - x) = 2 \times 2 - f(x)$

Donc la point $I(1; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe de f ,

$$\textbf{3} \quad f(x) = \frac{\sin(4x)}{\cos(2x) + 4}.$$

Déterminons D_f l'ensemble de définition de la fonction f :

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \text{ de } \mathbb{R}, \text{ on a : } x \in D_f &\Leftrightarrow \cos(2x) + 4 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) \neq -4 \end{aligned}$$

Cette condition est vérifiée pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$(\text{car : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; -1 \leq \cos(2x) \leq 1)$$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} ; -x \in \mathbb{R}$

$$\text{et } f(-x) = \frac{\sin(-4x)}{\cos(-2x)+4} = -\frac{\sin 4x}{\cos 2x+4} = -f(x)$$

c'est-à-dire : $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Donc : f est une fonction impaire.

D'où le point $O(0;0)$ est un centre de symétrie de la courbe de f .

infos:

▶ La fonction $\sin$ est impaire.

▶ La fonction $\cos$ est paire.

Exercice 35

Montrons que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de f , telle que : $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

On a : $D_f = \mathbb{R}$ car : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2+x+1 > 0$ (le discriminant $\Delta < 0$ et le coefficient x^2 est positif):

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(2a-x) &= f(-1-x) = \sqrt{(-1-x)^2+(-1-x)+1} \\ &= \sqrt{(1+x)^2-1-x+1} \\ &= \sqrt{1+2x+x^2-1-x+1} \\ &= \sqrt{x^2+x+1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} ; (-1-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-1-x) = f(x)$

Par suite la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de f .

11 Etude d'une fonction numérique - Lecture graphique

Plan d'étude d'une fonction numérique :

▶ Pour étudier une fonction numérique f , en général, on suit les étapes suivantes :

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2 Étudier la parité et la périodicité de la fonction f , puis déterminer l'ensemble d'étude D_E .
- 3 Calculer les limites aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition.
- 4 Étudier la dérivabilité de f sur D_E .
- 5 Étudier les variations de f ,

- a. Calculer la fonction dérivée f' .
- b. Étudier le signe de la fonction dérivée.
- c. Dédire les variations de f , puis dresser le tableau de variations de f .
- Pour représenter la courbe de f , en général on suit les étapes suivantes :
- 6 Étudier les branches infinies.
- 7 Étudier la position de la courbe de f par rapport aux asymptotes horizontales et obliques si elles existent.
- 8 Étudier l'intersection de la courbe de f , avec les axes du repère (si c'est possible).
- 9 Donner l'équation de la tangente à (C_f) en ces points.
- 10 Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexion de (C_f) s'ils existent en calculant la dérivée seconde de la fonction f .
- 11 **Tracé :**
 - a. Tracer un repère orthonormé (Dans la plupart des cas).
 - b. Tracer les tangentes précédentes et aussi les tangentes horizontales (là où f' s'annule).
 - c. Tracer les asymptotes.
 - d. Tracer la courbe de f , en respectant la concavité et la position relative de la courbe avec ses asymptotes.

Exercices

Exercice 37

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

- 1 Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f , et calculer les limites de f aux bornes de D .
- 2 Calculer $f'(x)$ pour tout x de D , et dresser le tableau de variations de f .
- 3 Étudier la concavité de (C_f) et déterminer ces points d'inflexion.
- 4 Étudier les branches infinies de la courbe de f .
- 5 Déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées puis déterminer l'équation de la tangente à (C_f) en ce point.
- 6 Tracer la courbe de f .

Exercice 38

Le plan est rapporté au repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f et calculer les limites de f aux bornes des intervalles de D_f .

2 a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

b. Dresser le tableau de variations de f .

3 a. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+1}$

b. Déterminer les branches infinies de la courbe de f .

c. Déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à la droite (D) d'équation : $y = x + 2$.

4 Montrer que le point $I(-1; 1)$ est un centre de symétrie de la courbe de f .

5 a. Déterminer le point d'intersection de la courbe de f avec l'axe des ordonnées.

b. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0.

6 Tracer la courbe de f .

7 a. Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation $(E_m): x^2 + (3 - m)x + 6 - m = 0$

Discuter suivant les valeurs du paramètre m .

b. Vérifier algébriquement les résultats de la question a).

Exercice 39

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \sin x \cos x - \sin x$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Montrer que f est périodique de période 2π .

2 Montrer que le point $O(0, 0)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

3 a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

- b. Factoriser $f'(x)$, puis étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$.
- c. Dresser le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.
- d. Tracer (C_f) sur l'intervalle $[0, \pi]$, puis déduire la courbe de f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Exercice 40

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f , et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b. Étudier la branche infinie de (C_f) .

2 a. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

c. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f .

3 À partir du tableau de variations de f , donner le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :

a. $f(x) = 0$

b. $f(x) = \frac{1}{2}$

c. $f(x) = 2$

4 Tracer la courbe de f .

Exercice 41

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x \frac{(\sqrt{x^2+1} + 1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

Étudier f et tracer (C_f) , la courbe de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Solutions

Exercice 37

On a : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

1 On a : $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$, car f est une fonction polynôme.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$

2 Calculons $f'(x)$ et dressons le tableau de variations de f :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme.

on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = x^2 - 2x - 3$

► $\Delta = 4 + 12 = 16$ est le discriminant de $f'(x)$.

et $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$ sont les racines de $f'(x)$.

► Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow \frac{20}{3}$	$\searrow$	-4	$\nearrow +\infty$

3 Étudions la concavité et déterminons les points d'inflexion de (C_f) :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) = x^2 - 2x - 3$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) = 2x - 2$
 $= 2(x - 1)$

D'où :

x	$+\infty$	1	$-\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
concavité de (C_f)			

Puisque $f''(x)$ s'annule en 1 et change de signe alors le point $A(1; f(1))$ est un point d'inflexion de (C_f) .

On a : $f(1) = \frac{4}{3}$, donc : $A\left(1; \frac{4}{3}\right)$

4 Étudions les branches infinies de la courbe de f :

► Au voisinage de $-\infty$:

- On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

► Au voisinage de $+\infty$:

- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

5 Déterminons le point d'intersection de (C_f) avec l'axe (Oy) :

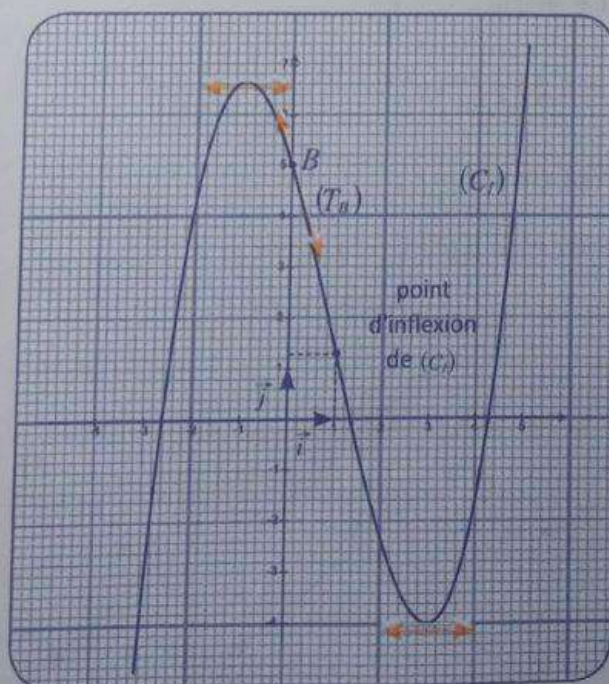
On a : $f(0) = 5$; donc : $(C_f) \cap (Oy) = \{B(0;5)\}$

- Equation de la tangente à la courbe (C_f) en B :

$$(T_B): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

On a : $f(0) = 5$ et $f'(0) = -3$, donc : $(T_B): y = -3x + 5$

6 Traçons (C_f) :



Exercice 38

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$$

1 Déterminons D_f et calculons les limites de la fonction f aux bornes de D_f :

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

On a :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 6) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0^+ \end{cases}$$

x	-1		
$x + 1$	$-$	0	$+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

2 a. Calculons $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$:

Soit x de $\mathbb{R} - \{-1\}$.

On a :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 6)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x - 6}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; f'(x) = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 1)^2}$

b. Tableau de variations de f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x - 1)(x + 3)$

(car : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; (x + 1)^2 > 0$)

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f		$\nearrow -3$	$\searrow -\infty$	$\swarrow +\infty$	$\searrow 5$	$\nearrow +\infty$

3 a. Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+1}$
 Soit x de $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$\begin{aligned} x + 2 + \frac{4}{x+1} &= \frac{(x+2)(x+1) + 4}{x+1} \\ &= \frac{x^2 + x + 2x + 2 + 4}{x+1} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 6}{x+1} = f(x) \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+1}$

b. Déterminons les branches infinies de la courbe de f :

- On a : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$; donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à la courbe de f .

- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\text{et } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+2)) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$$

Donc la droite : $(D) : y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

c. Déterminons la position relative de (C_f) avec la droite $(D) : y = x + 2$:

Soit x de $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$\text{On a : } f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+1}, \text{ alors : } f(x) - (x+2) = \frac{4}{x+1}$$

Donc le signe de $f(x) - (x+2)$ est celui de $x+1$ sur D_f :

D'où :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - (x+2)$	$-$		$+$
Position de (C_f) par rapport à l'asymptote (D)	(C_f) est au dessous de (D)		(C_f) est au dessus de (D)

4 Montrons que le point $I(-1; 1)$ est un centre de symétrie de (C_f) :

Soit x de $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$\text{On a : } -2 - x = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{Donc : } x \neq -1 \Rightarrow (-2 - x) \neq -1$$

$$\text{D'où : } x \in D_f \Rightarrow (-2 - x) \in D_f$$

$$\begin{aligned}\text{On a : } f(2a-x) &= f(-2-x) = (-2-x) + 2 + \frac{4}{(-2-x)+1} \\ &= -x - \frac{4}{x+1}\end{aligned}$$

$$2b - f(x) = 2 - \left(x + 2 + \frac{4}{x+1}\right) = -x - \frac{4}{x+1}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; f(2a-x) = 2b - f(x)$ avec : $a = -1$ et $b = 1$

D'où le point $I(-1; 1)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

5 a. Déterminons l'intersection (C_f) avec (Oy) :

On a : $f(0) = 6$; donc : $(C_f) \cap (Oy) = \{A(0; 6)\}$

b. Équation de la tangente (T) en A :

$$(T); y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

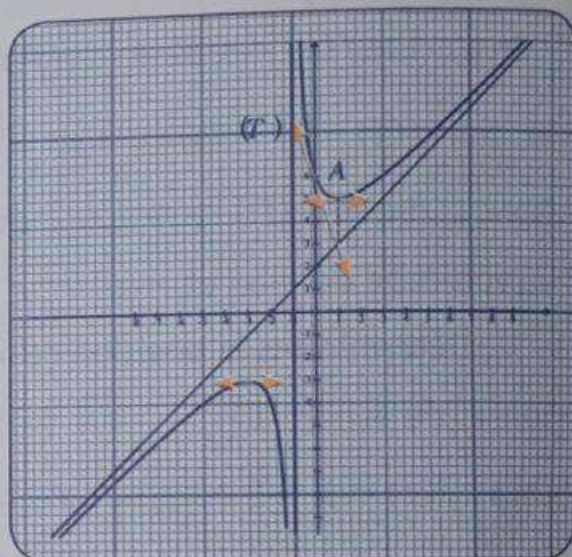
On a : $f'(0) = -3$ et $f(0) = 6$

Donc : $(T); y = -3x + 6$

6 Traçons (C_f) :

7 a.

Graphiquement, le nombre de solutions de l'équation (E_m) le nombre de points d'intersection de (C_f) avec la droite $(D_m); y = m$, où $m \in \mathbb{R}$.



Le signe des solutions est celui des abscisses de ces points :

- ▶ Si $m < -3$, alors (E_m) admet deux solutions négatives.
- ▶ Si $m = -3$, alors la solution (E_m) est -3 .
- ▶ Si $-3 < m < 5$, pas de solution.
- ▶ Si $m = 5$, alors la solution de (E_m) est 1 .
- ▶ Si $5 < m < 6$, alors (E_m) admet deux solutions positives.
- ▶ Si $m = 6$, alors (E_m) admet deux solutions l'une positive et l'autre 0 .
- ▶ Si $m > 6$, alors (E_m) admet deux solutions de signes contraire.

b. Algébriquement :

$$(E_m): x^2 + (3 - m)x + 6 - m = 0$$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \Delta &= (3 - m)^2 - 4(6 - m) \\ &= 9 - 6m + m^2 - 24 + 4m \\ &= m^2 - 2m - 15 \end{aligned}$$

$$\Delta_m = 4 + 60 = 64 = 8^2$$

$$m_2 = \frac{2 - 8}{2} = -3 \text{ et } m_1 = \frac{2 + 8}{2} = 5$$

Tableau de signe de Δ :

m	$-\infty$	-3		5	$+\infty$
$\Delta = m^2 - 2m - 15$	+	0	-	0	+

► Si : $m \in]-3; 5[$, alors : $\Delta < 0$ donc l'équation (E_m) n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

► Si : $m \in]-\infty; -3[\cup]5; +\infty[$

alors : $\Delta > 0$, donc l'équation (E_m) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 .

Le signe de x_1 et x_2 :

$$\text{On a : } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = 6 - m$$

Tableau de signe de $x_1 x_2$:

m	$-\infty$	-3		5		6	$+\infty$
$6 - m$	+		+		+	0	-

► Si : $m \in]6; +\infty[$

alors : $x_1 x_2 < 0$, donc : x_1 et x_2 sont de signes contraires (une positive et l'autre négative).

► Si : $m = 6$

$$\text{alors : } (E_m) \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$$

L'équation (E_m) admet deux solutions distinctes : 0 et 3 .

► Si : $m \in]-\infty; -3[\cup]5; 6[$

alors : $x_1 x_2 > 0$; donc : x_1 et x_2 sont de même signe (soit toutes les deux positives ou toutes les deux négatives).

Pour connaître le signe x_1 et x_2 dans ces cas, on détermine le signe de la somme: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3 + m$

m	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$m - 3$	$-$	$+$	$+$	$+$

► Si : $m \in]-\infty; -3[$

alors : $x_1 + x_2 < 0$, donc : x_1 et x_2 sont négatives (car elles ont le même signe).

► Si : $m \in]5; +\infty[$

alors : $x_1 + x_2 > 0$, donc : x_1 et x_2 sont positives.

Exercice 69

$$f(x) = \sin x \cos x - \sin x$$

1 Montrons que f est périodique de période 2π .

On a : $D_f = \mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x + 2\pi) &= \sin(x + 2\pi) \cos(x + 2\pi) - \sin(x + 2\pi) \\ &= \sin x \cos x - \sin x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Infos:

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc : f est périodique de période 2π .

2 Montrons que f est une fonction impaire:

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; -x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{et } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) &= \sin(-x) \cos(-x) - \sin(-x) \\ &= -\sin x \cos x + \sin x \\ &= -(\sin x \cos x - \sin x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Infos:

La fonction $\cos$ est paire.

La fonction $\sin$ est impaire.

Donc f est impaire d'où $O(0;0)$ est un centre de symétrie de la courbe de f .

3 a. Calculons $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) &= (\sin x \cos x)' - (\sin x)' \\ &= (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' - \cos x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x \\ &= 2\cos^2 x - \cos x - 1 \end{aligned}$$

b. Factorisons $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } f'(x) &= 2\cos^2 x - \cos x - 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}); \\ &= 2(\cos x - 1)\left(\cos x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 2(\cos x - 1)\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

car les solutions de l'équation : $2X^2 - X - 1 = 0$ sont $X_1 = 1$ et $X_2 = -\frac{1}{2}$.

La factorisation du trinôme $2X^2 - X - 1$ est :

$$\begin{aligned} 2X^2 - X - 1 &= 2(X - 1)\left(X - \frac{-1}{2}\right) \\ &= 2(X - 1)\left(X + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

► Étudions les variations de f sur l'intervalle $[0; \pi]$:

On a : $\cos x - 1 \leq 0$ pour tout x de $[0; \pi]$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in [0; \pi], \text{ on a : } \cos x - 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in [0; \pi], \text{ on a : } \cos x + \frac{1}{2} = 0 &\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

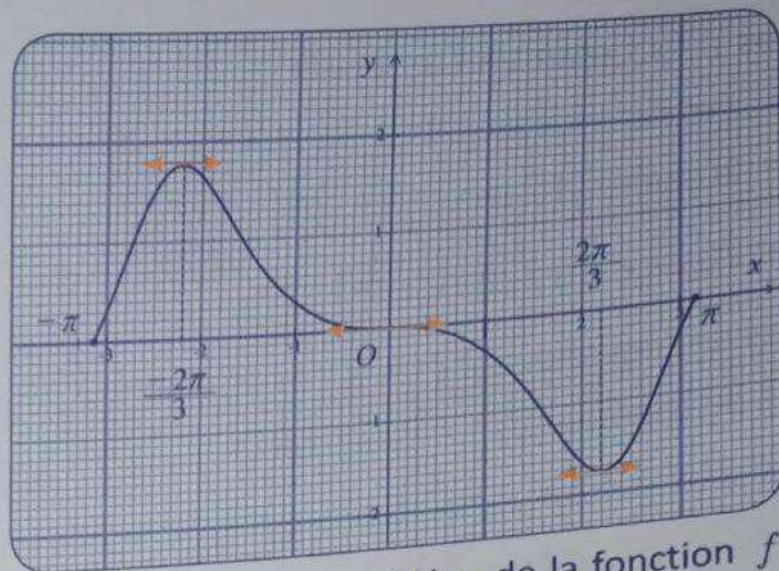
$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in [0; \pi], \text{ on a : } \cos x + \frac{1}{2} > 0 &\Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[\end{aligned}$$

c. Tableau de variations de f :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$\cos x - 1$	0	-	0
$\cos x + \frac{1}{2}$		+	-
$f'(x)$		-	+
f	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

d. Traçons (C_f) :

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{4} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$



Après le tracé de la courbe de la restriction de la fonction f sur la fonction $[0; \pi]$, on utilise la symétrie centrale de centre $O(0; 0)$ origine du repère puis on utilise la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

Exercice 40

1 a. Déterminons D_f l'ensemble de définition de la fonction f :

soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x + 1 \geq 0$ et $x \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \text{ et } x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [0; +\infty[$$

donc : $D_f = [0; +\infty[$

Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\text{Soit } x \in [0; +\infty[; \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b. Étudions la branche infinie de la courbe de la fonction f :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

2 a. Étudions la dérivabilité de la fonction f à droite en zéro :

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1}{x} = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$

alors : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

Donc : f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique :

(C_f) la courbe de f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point $A(0; 1)$.

b. Montrons que f est dérivable sur $]0, +\infty[$:

On a la fonction $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$; donc les fonctions $x \mapsto \sqrt{x+1}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont dérivables sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

D'où f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (Somme de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$)

Calculons $f'(x)$:

Soit x de $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f'(x) &= \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x - (x+1)}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x} (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \frac{-1}{2\sqrt{x+1} \sqrt{x} (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} \end{aligned}$$

On a : $\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) < 0$

Donc : f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

► **Tableau de variations de f :**

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-
f	1	0

3 La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$,
et $f(]0, +\infty[) =]0; 1]$

a. On a : $0 \notin]0; 1]$

Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions dans l'intervalle $]0; +\infty[$

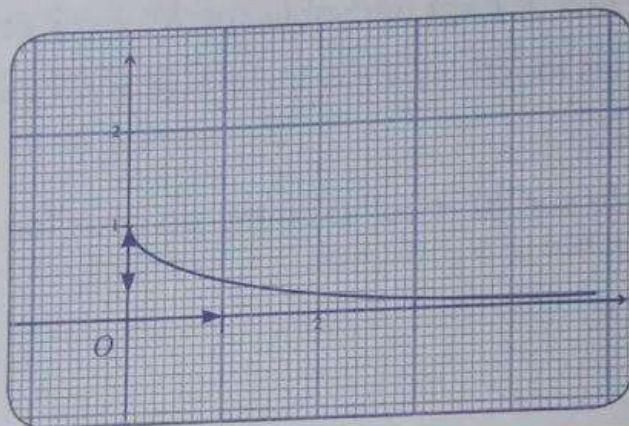
b. $\frac{1}{2} \in]0; 1]$

Donc l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α de $]0; +\infty[$

c. $2 \notin]0; 1]$

Donc l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solutions dans $]0; +\infty[$

4 Le tracé :



Exercice 41

$$f(x) = x \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

1 a. Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$ (car : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 + 1 > 0$)

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \text{ de } \mathbb{R}, \text{ on a : } f(x) &= x \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \end{aligned}$$

b. Étudions la parité de f :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; -x \in \mathbb{R}$

$$\text{et } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = -x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} \right) = -f(x)$$

Donc : f est une fonction impaire.

Puisque f est une fonction impaire, alors il suffit de l'étudier sur l'intervalle $D_E = [0; +\infty[$.

2 Variations de la fonction f :

a. Dérivabilité de f sur D_f :

La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}}$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
et $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Calculons $f'(x)$ et déterminons les variations de f :

$$\begin{aligned} \text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) &= \left(x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) \right)' \\ &= (x)' \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) + x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)' \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + x \cdot \left(0 - \frac{(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + x \cdot \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{(\sqrt{x^2+1})^3} = 1 + \frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt{x^2+1})^3} \\ &= 1 + \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3} = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$, d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Calculons la limite de f en $+\infty$:

$$\text{On a : } (\forall x > 0) ; f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

d. Tableau de variations de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	0	$+\infty$

$$f(0) = 0$$

3 Étudions la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$:

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{et : } (\forall x > 0) ; f(x) - x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 1$

Donc : (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$ au voisinage de $+\infty$:

Position de (C_f) avec la droite $(D): y = x + 1$.

$$\text{On a : } f(x) - (x + 1) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} < 0$$

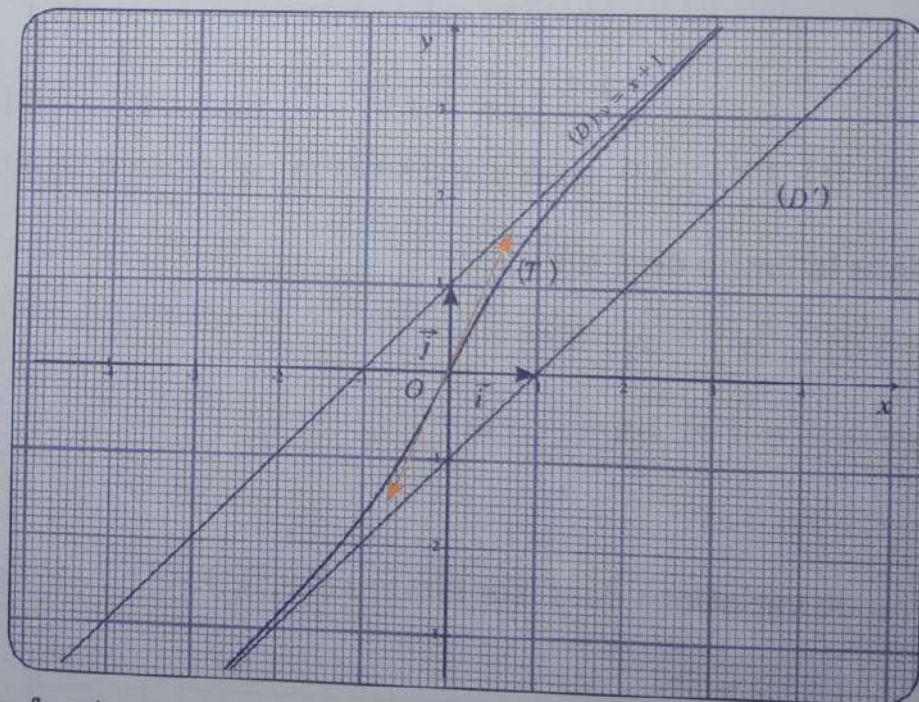
Donc : (C_f) se situe en dessous de l'asymptote oblique $(D): y = x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

4 La tangente (C_f) au point $O(0,0)$:

$$\text{On a : } f'(0) = 2$$

Donc : (C_f) la courbe de f admet une tangente oblique de coefficient directeur 2 au point d'abscisse 0.

5 Courbe (C_f) :



► La courbe f admet l'origine du repère comme centre de symétrie (car f est une fonction impaire).

$(D): y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

On construit de même (D') le symétrique de (D) par rapport à l'origine $(D) \parallel (D')$.

Exercices de synthèse

Exercices

Exercice 42

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{3x + 4}{(x + 1)^2}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1 Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de D_f .
- 2 a. Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}); f'(x) = \frac{(x + 1)(x - 1)(x + 2)^2}{(x + 1)^4}$
 b. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
- 3 a. Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .
 b. Déterminer la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.
- 4 a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse -2.
 b. Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α , et que : $-2 < \alpha < -1$.
 c. Tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 5 Discuter graphiquement, selon les valeurs du paramètre m , le nombre de solutions de l'équation: $(E): x^3 + (1 - m)x^2 + 2(1 - m)x + 3 - m = 0$

Exercice 43

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et à gauche en 4, puis donner une interprétation graphique des résultats.
- 3 a. Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; 4[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0; 4[$.
 b. Dresser le tableau de variations de f .

4 Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.

Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} , définie sur un intervalle que l'on déterminera.

Exercice 44

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 a. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f .

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$

2 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite au point 2 et à gauche au point -1, et donner une interprétation graphique des résultats.

3 a. Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty, -1[$ et $] 2; +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x de l'ensemble $D - \{-1; 2\}$,

b. Montrer que : $f'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $] -\infty, -1[$, et que $f'(x) < 0$ pour tout x de l'intervalle $] 2; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f .

4 a. Montrer que la droite d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

b. Tracer la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 45

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = (x - 2)\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

3 Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4 a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{++}) ; f'(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 2)}{2\sqrt{x}}$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$, et dresser le tableau de variations de la fonction f .

5 Montrer que (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisses α sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que $2 < \alpha < 3$.

6 Tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

7 Montrer que la fonction g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} , déterminer $D_{g^{-1}}$ l'ensemble de définition de la fonction g^{-1} , puis tracer $(C_{g^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 46

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par:

$$f(x) = x + 3 - \frac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2 Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3 a. Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -1; +\infty[$

et que : $(\forall x \in D_f) ; f'(x) = 1 - \frac{(x-1)}{(x+1)\sqrt{x+1}}$

b. Montrer que: $(\forall x \in D_f) ; f'(x) > 0$ (On peut étudier deux cas: $x < 1$ et $x \geq 1$).

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

4 Déterminer l'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

5 Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .

6 Tracer (C_f) (on admet que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse 5).

Exercice 47

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{x}$$

1 Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est :

$$D_f =]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$$

2 Calculer les limites suivantes: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

3 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1, et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

4 Étudier les variations de f sur chacun des intervalles $]1; +\infty[$ et $] -\infty; 0[$.

5 a. Déterminer l'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

b. Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .

6 Tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

7 Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera.

b. Tracer $(C_{g^{-1}})$, la courbe de la fonction g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 48

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f , et calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

2 Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 1, et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

3 a. Montrer que de la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -1; 1[$,

puis montrer que : $(\forall x \in] -1; 1[) ; f'(x) = \frac{1-x-x^2}{(1+x)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$

b. En déduire le signe de $f'(x)$, et dresser le tableau de variations de f .

4 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la figure f au point O .

5 Tracer (C_f) , on prend : $f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \simeq 0,3$

6 A partir de la courbe de la fonction f , déterminer l'ensemble (S) des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient : $(x-1)x^2 + (x+1)y^2 = 0$

Exercice 49

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - |x|} + 1$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Montrer que D_f l'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R}$.

2 Étudier la parité de la fonction f .

3 a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b. Étudier la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

4 a. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

b. Étudier les variations de la fonction f et donner son tableau de variations sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}$.

5 Tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

6 Soit g la restriction de f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera.

b. Tracer $(C_{g^{-1}})$, la courbe de fonction g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 50

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2 a. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de D_f .

b. Étudier les branches infinies de (C_f) .

c. Étudier la position relative de la courbe (C_f) avec la droite $(D) : y = 1$.

3 a. Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{x-1}{x^2(\sqrt{x}+1)}$

b. Dresser le tableau de variations de f .

4 Tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

5 Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1]$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera,

b. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

c. Calculer $g\left(\frac{1}{4}\right)$ puis déterminer $(g^{-1})'(1)$,

d. Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ pour x de l'intervalle J .

Exercice 51

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par:

$$f(x) = \sqrt{2x-2} - x + 1$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Déterminer l'ensemble de définition de f .

2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3 Déterminer la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

4 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 1$, puis donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

5 a. Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[) ; f'(x) = \frac{3-2x}{\sqrt{2x-2}(\sqrt{2x-2}+1)}$

b. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .

6 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 3$.

7 Montrer que : $f''(x) = \frac{-1}{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}$ pour tout x de $]1; +\infty[$, puis étudier la concavité de (C_f) sur $[1; +\infty[$.

8 Tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

9 Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction g^{-1} au point d'abscisse $x_0 = 0$.

c. Tracer la courbe de la fonction g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

10 Montrer que pour tout x de J on a : $g^{-1}(x) = 2 - x + \sqrt{1 - 2x}$

Exercice 52

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f , puis montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2 a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3 a. Montrer que : $(\forall x \in D_f) ; f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$

b. Montrer que la fonction f est croissante sur D_f , puis dresser son tableau de variation.

4 a. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

b. Tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

5 a. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera,

b. Calculer $(f^{-1})'(2)$,

c. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

Exercice 53

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f , et étudier la parité de f .

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2 Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{x(x^2 - 3)}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

3 Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

4 Tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

5 Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0; \sqrt{3}]$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera,

b. Calculer $g(1)$, puis déterminer $(g^{-1})'(3\sqrt{2})$.

Solutions

Exercice 42

On a : $f(x) = x - 1 + \frac{3x + 4}{(x + 1)^2}$

1 Déterminons les limites de f aux bornes de D_f :

On a : $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

► Soit x de $]0; +\infty[$; on a : $f(x) = x - 1 + \frac{x(3 + \frac{4}{x})}{x^2(1 + \frac{1}{x})^2} = x - 1 + \frac{3 + \frac{4}{x}}{x(1 + \frac{1}{x})^2}$

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{x(1 + \frac{1}{x})^2} = 3$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{x(1 + \frac{1}{x})^2} = 0$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

► de même on obtient : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

► puisque : $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)^2 = 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; (x + 1)^2 > 0$

et $\lim_{x \rightarrow -1} (3x + 4) = 1$ alors : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + 4}{(x + 1)^2} = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2$, d'où : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

2 a. La fonction f est dérivable en tout point de D_f (car f est une fonction rationnelle):

► Calculons $f'(x)$:

et $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; f'(x) = (x - 1)' + \frac{(3x + 4)'(x + 1)^2 - (3x + 4)((x + 1)^2)'}{((x + 1)^2)^2}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 + \frac{3(x+1)^2 - (3x+4)(2)(x+1)'(x+1)}{(x+1)^4} \\
 &= 1 + \frac{3(x+1)^2 - 2(x+1)(3x+4)}{(x+1)^4} \\
 &= \frac{(x+1)^4 + 3(x+1)^2 - 2(x+1)(3x+4)}{(x+1)^4} \\
 &= \frac{(x+1)[(x+1)^3 + 3(x+1) - 2(3x+4)]}{(x+1)^4} \\
 &= \frac{(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3x + 3 - 6x - 8)}{(x+1)^4} \\
 &= \frac{(x+1)(x^3 + 3x^2 - 4)}{(x+1)^4}
 \end{aligned}$$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; (x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$

$$\begin{aligned}
 &= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4 \\
 &= x^3 + 3x^2 - 4
 \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^4}$

b. Étudions le signe de $f'(x)$:

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+2)^2(x+1)(x-1)$ sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

(car : $(\forall x \in D_f) ; (x+1)^4 > 0$)

et on a :

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$	
$(x+1)(x-1)$	+	+	0	-	0	+
$(x+2)^2$	+	0	+	+	+	+

donc le tableau de signe de $f'(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$-$	0	$+$

Dressons le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		-5		$\frac{7}{4}$		

3 a. Étudions les branches infinies de (C_f) :

► On a : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$; donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à (C_f) .

► On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Puisque : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; f(x) = (x-1) + \frac{3x+4}{(x+1)^2}$

et $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{(x+1)^2} = 0$; d'où : la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

b. Position de (C_f) avec son asymptote oblique :

Soit x de $\mathbb{R} - \{-1\}$; on a le signe : $f(x) - (x-1)$ est celui de $3x+4$.

car : $(\forall x \in D_f) ; (x+1)^2 > 0$; et soit : $(D): y = x - 1$

d'où : on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	-1	$+\infty$
$3x+4$	$-$	0	$+$	$+$
Position (C_f) avec la droite (D)	(C_f) est en dessous de (D)	(C_f) est au dessus de (D)		(C_f) est au dessus de (D)

et on a : $f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3} - 1 = -\frac{7}{3}$; $(C_f) \cap (D) = I\left(-\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

4 a. Déterminons l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse -2:

On a : $f'(-2) = 0$, d'où l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse -2 est:

$$y = f(-2) = -5 \quad ((T): y = f'(-2)(x+2) + f(-2))$$

b. Montrons que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en un seul point α ,
et que : $-2 < \alpha < -1$

► La fonction f est continue sur tout intervalle de D_f (car f est une fonction rationnelle).

► Sur l'intervalle $] -1; +\infty[$, f admet une valeur minimale qui est $\frac{7}{4}$; donc :
 $(\forall x \in] -1; +\infty[); f(x) \geq \frac{7}{4}$

D'où l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $] -1; +\infty[$.

► Sur l'intervalle $]-\infty; -1[$, f est strictement croissante et continue et $f(]-\infty; -1[) =]-\infty; +\infty[$

On a : $0 \in]-\infty; +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $]-\infty; -1[$.

Résumé: l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur D_f .

► Vérifions que : $-2 < \alpha < -1$

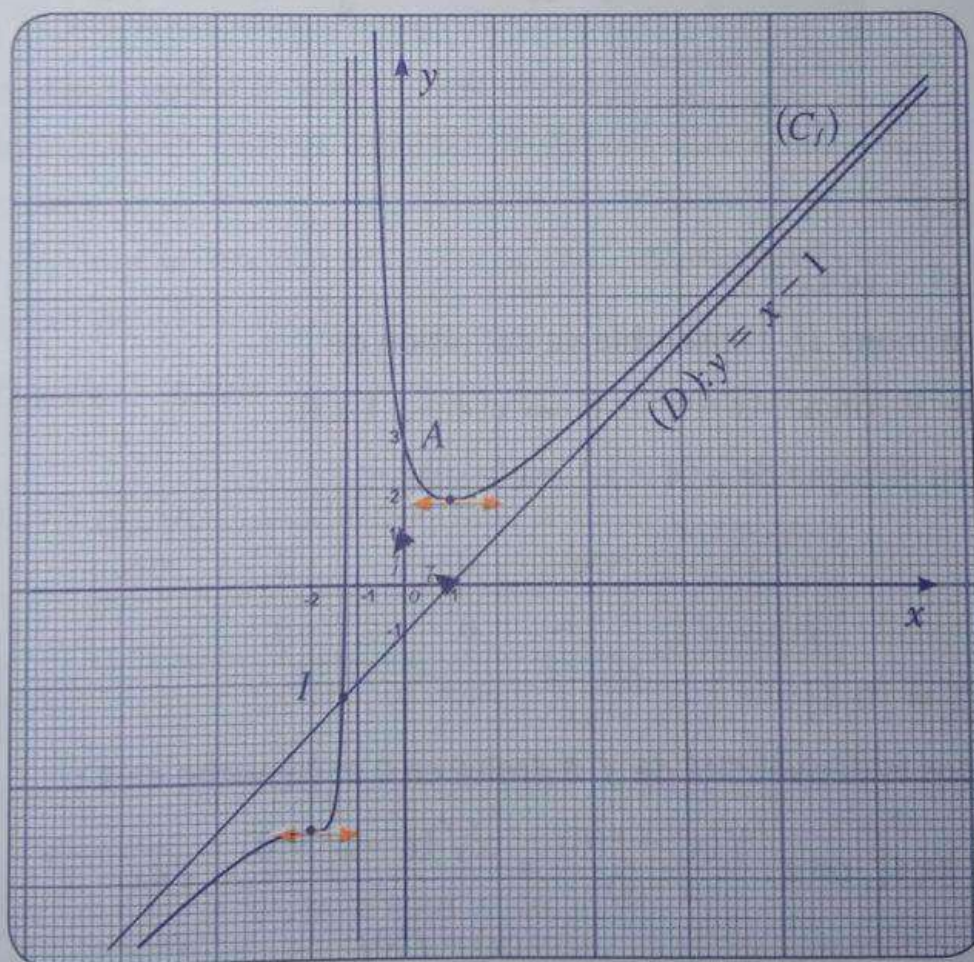
On a : $f(]-2; -1[) =]-5; +\infty[$

Or : $0 \in]-5; +\infty[$, d'où : $\alpha \in]-2; -1[$, avec : $f(\alpha) = 0$

conclusion : la courbe de f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α , tel que : $-2 < \alpha < -1$.

c. Construction de (C_f) :

On a : $f(0) = 3$ Donc : $(C_f) \cap (oy) = \{A(0;3)\}$



5 Discutons suivant les valeurs de m nombre de solutions de l'équation :

$$(E): x^3 + (1-m)x^2 + 2(1-m)x + 3 - m = 0$$

► On remarque que : $x = -1$ n'est pas solution;

$$\text{car : } (-1)^3 + (1-m)(-1)^2 + 2(1-m)(-1) + 3 - m = 5$$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, on a :

$$\begin{aligned} x^3 + (1-m)x^2 + 2(1-m)x + 3 - m &= 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - mx^2 + 2x - 2mx + 3 \\ &\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x + 3 = m(x^2 + 2x - 3) \\ &\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x + 3 = m(x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow m = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} \\ &\Leftrightarrow m = f(x) \end{aligned}$$

(On vérifie que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; \frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} = x - 1 + \frac{3x - 4}{(x+1)^2}$)

► Donc le nombre de solutions de l'équation (E) est le nombre des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = m ; m \in \mathbb{R}$; graphiquement on obtient le tableau suivant :

m	$-\infty$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$
Nombre de solutions	1	2	3

Exercice 43

Oa : $f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$

1 Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(4 - x) \geq 0$

Le tableau de signe de $x(4 - x)$ est le suivant :

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$x(4 - x)$	-	0	+	-

Donc : $D_f = [0; 4]$

2 Étudions la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en 4 :

Soit $x \in]0; 4[$, on a : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\sqrt{4x - x^2} - 0}{x} = \sqrt{4x - x^2}$

Or : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4x - x^2} = 0$, d'où : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

Donc la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

Interprétation graphique :

La courbe (C_f) admet une demi-tangente horizontale au point $O(0; 0)$.

► Soit $x \in]0; 4[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \frac{x\sqrt{4x - x^2} - 0}{x - 4} = \frac{x\sqrt{x(4 - x)}}{x - 4} = \frac{x \cdot x(4 - x)}{(x - 4)\sqrt{x(4 - x)}} \\ &= \frac{-x^2(x - 4)}{(x - 4)\sqrt{x(4 - x)}} = \frac{-x^2}{\sqrt{x(4 - x)}} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} -x^2 = -16 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \sqrt{x(4 - x)} = 0 \text{ et; } (\forall x \in]0; 4[); \sqrt{x(4 - x)} > 0 \end{array} \right.$$

$$\text{d'où : } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = -\infty$$

Ainsi: f n'est pas dérivable à gauche en 4.

Interprétation graphique :

La courbe (C_f) de f admet une demi-tangente verticale (dirigée vers le haut) au point $B(4; 0)$.

3 a. ► Montrons que la fonction f est dérivable sur $]0; 4[$.

La fonction: $u: x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0; 4[$.

et la fonction: $x \mapsto 4x - x^2$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]0; 4[$; donc la fonction $v: x \mapsto \sqrt{4x - x^2}$ est dérivable sur $]0; 4[$; d'où : $f = u \times v$ est dérivable sur $]0; 4[$.

► Calculons $f'(x)$

On a :

$$\begin{aligned} (\forall x \in]0; 4[); f'(x) &= (x\sqrt{4x - x^2})' \\ &= (x)' \sqrt{4x - x^2} + x \frac{(4x - x^2)'}{2\sqrt{4x - x^2}} \\ &= \sqrt{4x - x^2} + x \cdot \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \sqrt{4x - x^2} + \frac{2x - x^2}{\sqrt{4x - x^2}} \\ &= \frac{4x - x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{6x - 2x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2x(3 - x)}{\sqrt{4x - x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{2x(3 - x)}{\sqrt{4x - x^2}}; \text{ pour tout } x \text{ de }]0; 4[.$$

b. Dressons le tableau de variations de f :

$$\text{On a : } (\forall x \in]0; 4[); f'(x) = \frac{2x(3 - x)}{\sqrt{4x - x^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit : } x \in]0; 4[, \text{ on a : } f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } 3 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Le signe de $2x(3-x)$ sur l'intervalle $]0;4[$.

est celui de $3-x$ (car : $(\forall x \in]0;4[) ; 2x > 0$)

Donc le tableau de variations de f est le suivant:

On a : $f(3) = 3\sqrt{12-9} = 3\sqrt{3}$

x	0	3	4	
$f'(x)$	0	+	0	-
f	0	$3\sqrt{3}$	0	

4 Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} :

La fonction g est continue sur l'intervalle $[0;3]$, comme produit de deux fonctions continues sur l'intervalle $[0;3]$ qui sont: $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{4x-x^2}$.
et la fonction g est strictement croissante sur $[0;3]$.

D'où : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur :

$$g([0;3]) = [g(0);g(3)] = [0;3\sqrt{3}]$$

Exercice 44

On a : $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}$

1 a. Déterminons D l'ensemble de définition de f :

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$

or les deux solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ sont -1 et 2. (après avoir calculé Δ on a : $\Delta = 9$).

Donc : $x \in D \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$$

Donc : $D =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

b. Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x - 2} = +\infty$

et on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$;

d'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1 - \sqrt{x^2 - x - 2}) = -\infty$

► Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$:

Soit x un élément de $]2; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \sqrt{x^2 - x - 2} + 1 = \frac{(x - \sqrt{x^2 - x - 2})(x + \sqrt{x^2 - x - 2})}{x + \sqrt{x^2 - x - 1}} + 1 \\ &= \frac{x + 2}{x + \sqrt{x^2 - x - 1}} + 1 = \frac{x(1 + \frac{2}{x})}{x(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}})} + 1 \\ &= \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} + 1 \end{aligned}$$

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{x}) = 1$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

2 ► Étudions la dérivabilité de f à droite en 2:

Soit x un élément de $]2; +\infty[$; on a : $f(2) = 3$

$$\begin{aligned} \text{et : } \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2} - 3}{x - 2} \\ &= \frac{x - 2 - \sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{(x + 1)(x - 2)}}{x - 2} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)^2}} \quad (\text{car : } (x - 2) > 0) \\ &= 1 - \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}} \end{aligned}$$

puisque : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x + 1}{x - 2} \right) = +\infty$ (car : $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0^+$)

alors : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}} = +\infty$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(1 - \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}} \right) = -\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 2.

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 2 (diri-

gée vers le bas). (d'équation: $\begin{cases} x = 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$)

► Étudions la dérivabilité de f à gauche en -1 :

Soit x un élément de $] -\infty; -1[$, on a : $f(-1) = 0$

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 1} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{(x + 1)(x - 2)}}{x + 1} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)^2}} \quad \text{car : } (x + 1 < 0) \\ &= 1 + \sqrt{\frac{x - 2}{x + 1}} \end{aligned}$$

Or : $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(\frac{x - 2}{x + 1} \right) = +\infty$ (car : $\lim_{x \rightarrow -1} (x - 2) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 1) = 0^-$)

alors : $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \sqrt{\frac{x - 2}{x + 1}} = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \sqrt{\frac{x - 2}{x + 1}} \right) = +\infty$

d'où la fonction f n'est pas dérivable à gauche en -1 .

- **Interprétation graphique:** La courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -1 ; dirigée vers le bas.

(son équation : $\begin{cases} x = -1 \\ y \leq 0 \end{cases}$)

3 a. Montrons que f est dérivable sur $]2; +\infty[$:

La fonction : $u: x \mapsto x^2 - x - 2$ est dérivable sur $]2; +\infty[$ et $u(x) > 0$ pour tout x de $]2; +\infty[$, donc la fonction $-\sqrt{u}$ est dérivable sur $]2; +\infty[$.

et la fonction $v: x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $]2; +\infty[$.

d'où : $f = v - \sqrt{u}$ est dérivable sur $]2; +\infty[$;

► De même la fonction f est dérivable sur $] -\infty; -1[$.

► Calculons $f'(x)$ pour tout x de $D - \{-1; 2\}$:

Soit x de $D - \{-1; 2\}$; on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{2\sqrt{x^2 - x - 2} - 2x + 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

Donc : $(\forall x \in D - \{-1; 2\}) ; f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - x - 2} - 2x + 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$

b. Étudions le signe de $f'(x)$:

► Si : $x < -1$ alors : $-2x + 1 > 3$; donc : $-2x + 1 > 0$

d'où : $2\sqrt{x^2 - x - 2} - 2x + 1 > 0$; ainsi : $f'(x) > 0$ pour tout x de $]-\infty; -1[$.

► Si : $x > 2$, alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2\sqrt{x^2 - x - 2} - (2x - 1))(2\sqrt{x^2 - x - 2} + (2x - 1))}{2\sqrt{x^2 - x - 2}(2\sqrt{x^2 - x - 2} + (2x - 1))} \\ &= \frac{4x^2 - 4x - 8 - (4x^2 - 4x + 1)}{2\sqrt{x^2 - x - 2}(2\sqrt{x^2 - x - 2} + (2x - 1))} \\ &= \frac{-9}{2\sqrt{x^2 - x - 2}(2\sqrt{x^2 - x - 2} + (2x - 1))} \end{aligned}$$

puisque : $x > 2$; alors : $2x - 1 > 3$; d'où : $2x - 1 > 0$

donc : $2\sqrt{x^2 - x - 2} + (2x - 1) > 0$

par suite : $\frac{-9}{2\sqrt{x^2 - x - 2}(2\sqrt{x^2 - x - 2} + (2x - 1))} < 0$

c'est-à-dire : $f'(x) < 0$ pour tout x de $]2; +\infty[$:

► Le tableau des variations de f : est le suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+			-
f	$-\infty$	0	3	$\frac{3}{2}$

4 a. L'asymptote oblique :

Soit x de $]-\infty; -1[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right) &= x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2} - 2x - \frac{1}{2} \\ &= -x - \sqrt{x^2 - x - 2} + \frac{1}{2} \\ &= -\left(\frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x}\right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right) &= \frac{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1\right)} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{-\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 1$ alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1$

et on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$; d'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1} + \frac{1}{2} = 0$

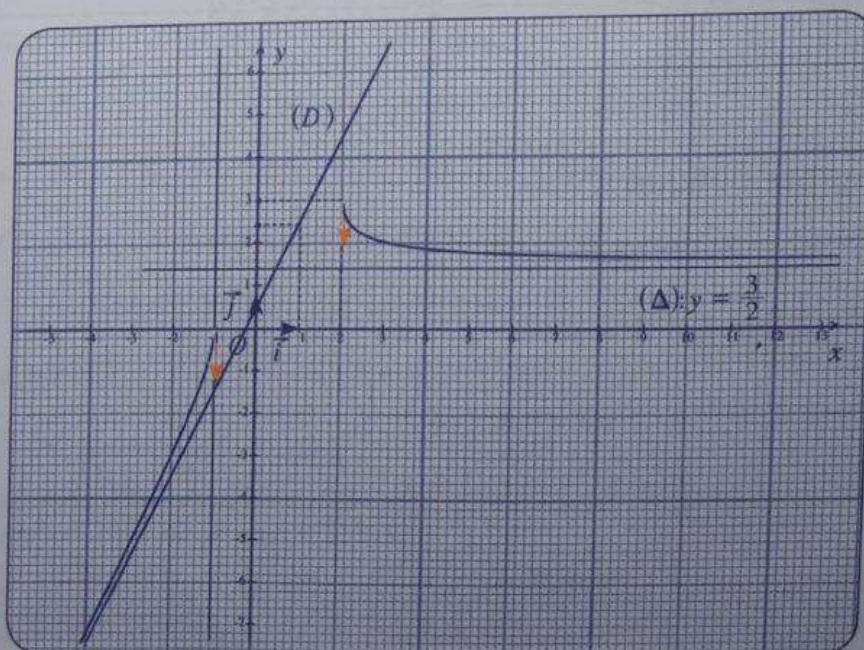
Conclusion :

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right)\right) = 0$

donc la droite (D) d'équation : $y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$.

b. La courbe (C) :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$; donc $(\Delta): y = \frac{3}{2}$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.



Exercice 45

On a : $f(x) = (x-2)\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$

1 Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$:

$$\text{Soit : } x \in]0; +\infty[; \text{ on a : } f(x) = x\left(1 - \frac{2}{x}\right)\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$$

$$= x\left[\left(1 - \frac{2}{x}\right)\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right]$$

puisque :

$$\begin{cases} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)\sqrt{x} - \frac{1}{2} = +\infty; \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\text{Soit : } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } \frac{f(x)}{x} = \frac{(x-2)\sqrt{x} - \frac{1}{2}x}{x}$$

$$= \left(\frac{x-2}{x}\right)\sqrt{x} - \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{2}{x}\right)\sqrt{x} - \frac{1}{2}$$

comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{x} = 1$; on a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Interprétation graphique :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3 Étudions la dérivabilité de f à droite en 0 :

Soit : $x \in]0; +\infty[, \text{ on a :}$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(x-2)\sqrt{x} - \frac{1}{2}x - 0}{x} = (x-2)\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{2} = (x-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$$

puisque :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \end{cases}; \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

Donc : f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation graphique :

(C_f) admet une demi-tangente verticale au point $O(0;0)$ dirigée vers le bas.

4 a. Montrons que : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 2)}{2\sqrt{x}}$;

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Soit : $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \text{on a : } f'(x) &= (x-2)' \sqrt{x} + (x-2)(\sqrt{x})' - \left(\frac{1}{2}x\right)' \\ &= \sqrt{x} + (x-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = \frac{2x + (x-2) - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 2 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

d'autre part on a :

$$(\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 2) = 3x + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2 = 3x - \sqrt{x} - 2$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 2)}{2\sqrt{x}}$$

b. ▶ Étudions le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$:

Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est celui de $\sqrt{x} - 1$ (car : $3\sqrt{x} + 2 > 0$ et $2\sqrt{x} > 0$ sur $\mathbb{R}^{++}$), et on a : $\sqrt{x} - 1 = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Soit : $x \in]0; +\infty[$ on a : $f'(x) > 0 \iff x > 1$

$$f'(x) < 0 \iff 0 < x < 1$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

▶ Le tableau de variations de f est le suivant sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

$$f(1) = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
f	0	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$

5 Montrons que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point α sur $]0; +\infty[$, et que : $2 < \alpha < 3$.

▶ La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$, comme somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$: $x \mapsto (x-2)\sqrt{x}$ et $x \mapsto -\frac{1}{2}x$.

▶ Sur l'intervalle $]0; 1]$, on a : $f(]0; 1]) = \left[-\frac{3}{2}; 0\right[$

donc : $(\forall x \in]0; 1]) ; f(x) < 0$

Par suite l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions sur l'intervalle $]0; 1]$.

► Sur l'intervalle $[1; +\infty[$ on a : f est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc : $f([1; +\infty[) = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$:

puisque : $0 \in \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$; alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Conclusion :

Sur l'intervalle $]0; +\infty[$; l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α
vérifions que : $1 < \alpha < 2$

alors : $f(2) = -\frac{1}{2}$ et $f(3) = (3-2)\sqrt{3} - \frac{3}{2} = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$

par suite : $\sqrt{3} - \frac{3}{2} \simeq 0,23$

donc : $f(2) \cdot f(3) < 0$; d'où : $f(2) < f(\alpha) < f(3)$

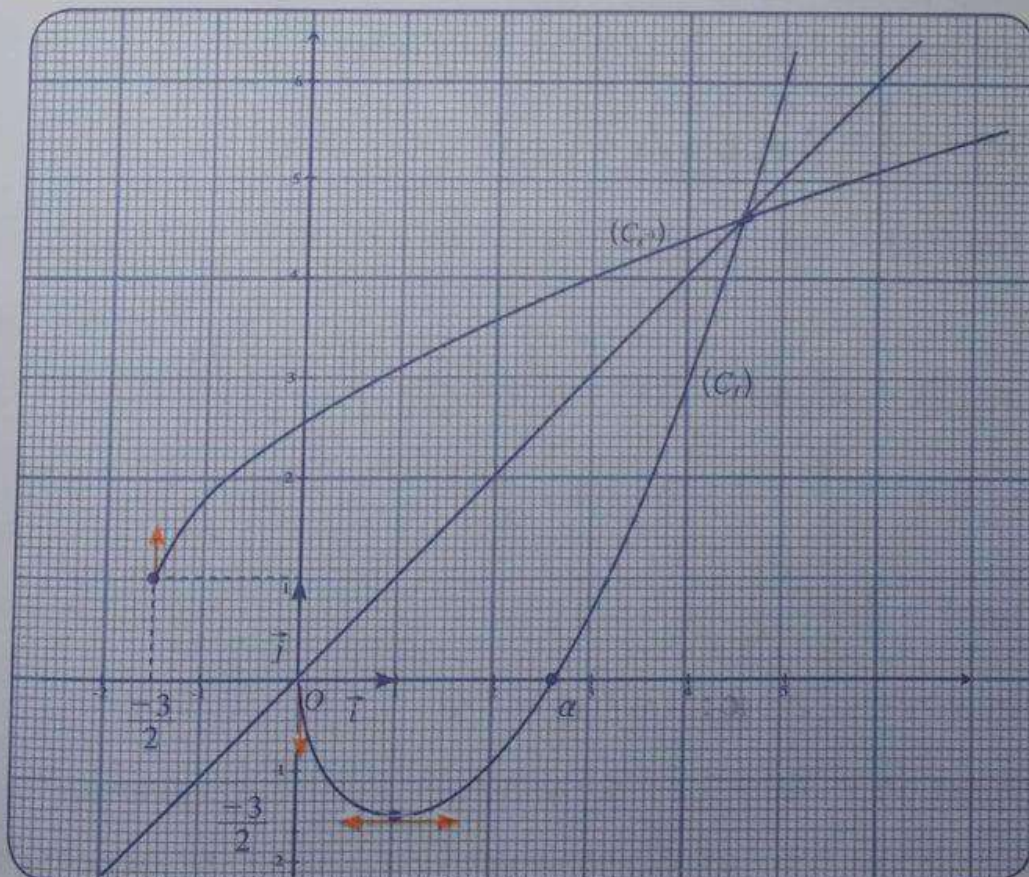
par suite : $2 < \alpha < 3$ (car f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$)

donc la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul réel α sur $]0; +\infty[$.

et que : $2 < \alpha < 3$.

(remarque que : $f(0) = 0$; donc : $(C_f) \cap (Ox) = \{O(0;0) ; A(\alpha;0)\}$)

6 Traçons la courbe C_f :



7 Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} :

La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ en particulier sur $[1; +\infty[$.

Donc la fonction g est continue sur $[1; +\infty[$ (somme de deux fonctions continues), et g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. (car f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$).

Donc : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur

$$D_{g^{-1}} = g([1; +\infty[) = [g(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[$$

$$= \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

► La courbe $(C_{g^{-1}})$ (voir figure précédente):

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ sont symétriques par rapport la droite d'équation $y = x$.

Exercice 46

$$f(x) = x + 3 - \frac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}}$$

1 Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

Si x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

Donc : $D_f =]-1; +\infty[$

2 Déterminons les limites $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x + 3 = 2$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \sqrt{x+1} = 0^+$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$

► Soit : $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) = x \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{2(1 + \frac{3}{x})}{\sqrt{x+1}} \right)$

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2(1 + \frac{3}{x}) = 2$; et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x} - \frac{2(1 + \frac{3}{x})}{\sqrt{x+1}} = 1$;

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3 a. La fonction $x \mapsto x + 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]-1; +\infty[$ et la fonction $x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et strictement positive sur $]-1; +\infty[$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est dérivable sur $]-1; +\infty[$.

Donc : f est dérivable sur $]-1; +\infty[$.

► Montrons que: $(\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) = 1 - \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$

$$\begin{aligned} (\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) &= (x+3)' - \left(\frac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}} \right)' \\ &= 1 - \frac{2\sqrt{x+1} - 2(x+3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1})^2} = 1 - \frac{2(x+1) - (x+3)}{\sqrt{x+1}(x+1)} \\ &= 1 - \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

b. Montrons que : $f'(x) > 0$ pour tout x de $]-1; +\infty[$:

► Si : $-1 < x < 1$ alors : $x-1 < 0$; d'où : $\frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x+1}} < 0$

donc : $-\frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$; par suite : $1 - \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$

Donc : $(\forall x \in]-1; 1[); f'(x) > 0$

► Si : $x \geq 1$, alors : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{x-1}{\sqrt{x+1}^3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}^3 > x-1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 > (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 > x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 5x > 0$$

C'est vérifié pour tout x de $[1; +\infty[$; on a : $(\forall x \geq 1); f'(x) > 0$

Dans les deux cas : $(\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) > 0$

c. Tableau de variations de f :

d'après ce qui précède, on a : $(\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

► D'où le tableau de variations de f :

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
f	$-\infty$	$+\infty$

3 L'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses :

Soit $x \in]-1; +\infty[$; on a : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 3 - \frac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}} = 0$

$$\Leftrightarrow (x+3) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 0 \text{ ou } 1 = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = -3}_{\text{impossible}} \text{ ou } \sqrt{x+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Donc : (C_f) coupe l'axe des abscisses au point $A(3;0)$.

4 Étude des branches infinies de (C_f) :

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$; donc : (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{x+3 - \frac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}}}{x} = 1 + \frac{3}{x} - \frac{2(1+\frac{3}{x})}{\sqrt{x+1}}$

or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2(1+\frac{3}{x})}{\sqrt{x+1}} = 0$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

► Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$:

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $f(x) - x = x + 3 - \frac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}} - x = 3 - \frac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}}$

$$= 3 - \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2(1+\frac{3}{x})}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 3 - \sqrt{x} \cdot \frac{2(1+\frac{3}{x})}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(1+\frac{3}{x})}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x}) = -\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$

2^{ème} méthode :

Soit x de $]0; +\infty[$; on a : $f(x) - x = 3 - \frac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}} = 3 - \frac{2(x+3)}{x+1} \cdot \sqrt{x+1}$

$$= 3 - \frac{2(1+\frac{3}{x})}{1+\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{x+1}$$

puisque :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x}} = -2; \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty \end{cases}$$

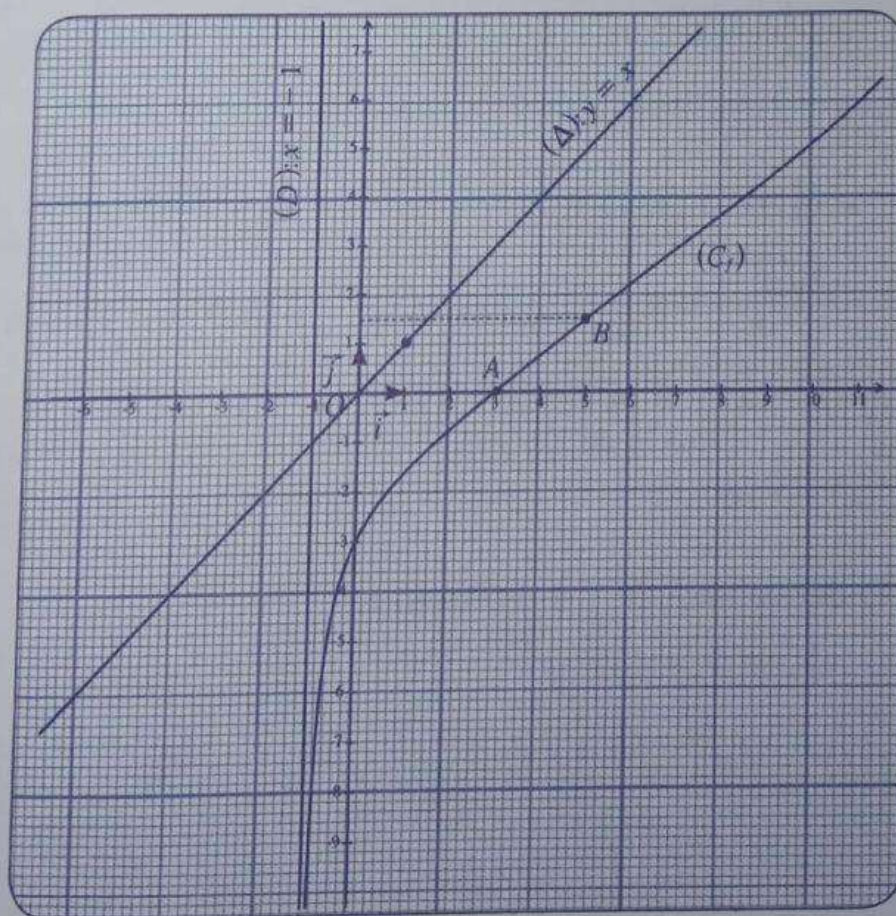
Interprétation graphique :

On a :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty \end{cases}$$

Donc : (C_f) la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

5 Construction de (C_f) :

On a : $f(5) = 8 - \frac{16}{\sqrt{6}} \simeq 1,47$; le point $B\left(5; 8 - \frac{16}{\sqrt{6}}\right)$ est un point d'inflexion de (C_f) .



Exercice 47

On a : $f(x) = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{x}$

1 Montrons que l'ensemble de définition de f est : $D_f =]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \frac{x-1}{x} \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}$

Le tableau de signe de $\frac{x-1}{x}$ est:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$	$-$	0	$+$

Donc : $D_f =]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$

2 Déterminons les limites: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, et montrons que:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

► Soit $x \in D_f$; on a : $f(x) = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{x} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \frac{1}{x}$

et puisque : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; donc : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 2\sqrt{1} + 0 = 2$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

► Soit $x \in]-\infty; 0[$, on a : $f(x) = 2\sqrt{\frac{(x-1)x}{x^2}} + \frac{1}{x} = \frac{2\sqrt{x^2-x}}{|x|} + \frac{1}{x}$

donc : $f(x) = -\frac{2\sqrt{x^2-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(1 - 2\sqrt{x^2-x})$ (car : $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$)

puisque : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \sqrt{x^2-x} = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (1 - 2\sqrt{x^2-x}) = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$

3 Étudions la dérivabilité de f à droite en 1:

Soit $x \in]1; +\infty[$, on a : $f(1) = 1$

$$\begin{aligned} \text{et : } \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{1-x}{x}}{x - 1} \\ &= \frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}}{x - 1} + \frac{-x+1}{x(x-1)} = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} \times \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x(x-1)} \\ &= 2\sqrt{\frac{x-1}{x(x-1)^2}} - \frac{1}{x} = 2\sqrt{\frac{1}{x(x-1)}} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Remarque que : $x - 1 > 0$; donc : $x - 1 = \sqrt{(x - 1)^2}$

$$\text{puisque : } \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x(x - 1) = 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[; x(x - 1) > 0 \end{cases} ; \text{ alors : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 1.

2^{ème} méthode:

Soit $x \in]1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{2\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \frac{2\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} - \frac{(\sqrt{x-1})^2}{x}}{(\sqrt{x-1})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x-1} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x-1}}{x} \right)}{(\sqrt{x-1})^2} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{x} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{x(\sqrt{x-1})} \end{aligned}$$

$$\text{puisque : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{x} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} x\sqrt{x-1} = 0$$

$$\text{et } (\forall x \in]1; +\infty[) ; x\sqrt{x-1} > 0, \text{ donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 1.

Interprétation graphique :

(C_f) la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point $A(1;1)$.

4 Étudions les variations de f sur $]1; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$:

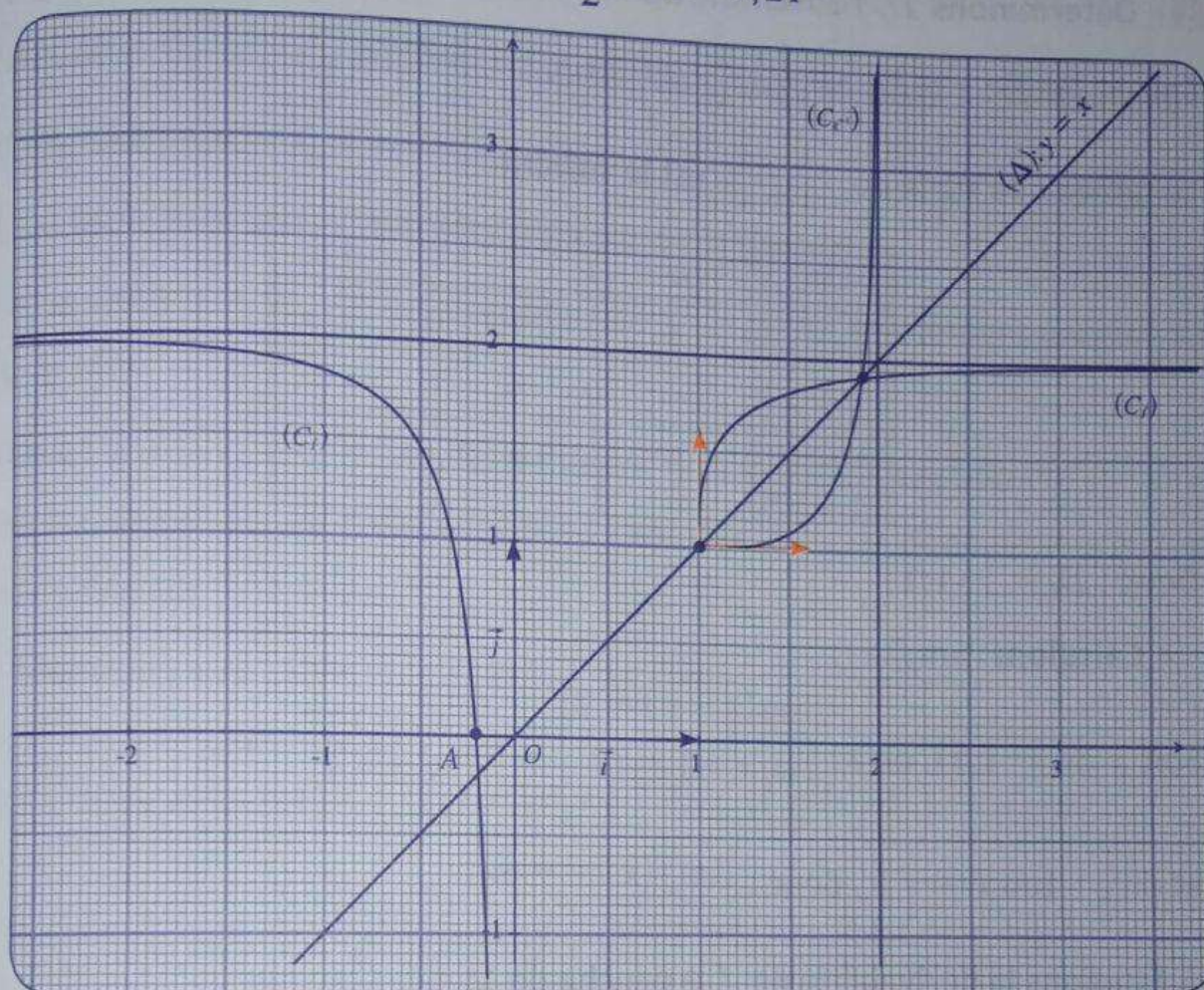
Soit $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f'(x) &= 2 \frac{\left(\frac{x-1}{x} \right)'}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}} + \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2 \frac{\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}} - 1 \right) = \frac{1}{x^2} \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{\frac{x}{x-1} - 1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{\frac{x - x + 1}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} \right) = \frac{1}{x^2(x-1)(\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1)} \end{aligned}$$

et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$; donc: (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

6 Construction de (C_f) :

$$x_A = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \simeq -0,21$$



7 g la restriction de f sur $[1; +\infty[$:

On a: g est continue, car g est somme de deux fonctions continues qui sont :

$$x \mapsto 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} \text{ et } x \mapsto \frac{1}{x}.$$

et : g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

donc : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur:

$$\begin{aligned} J &= g([1; +\infty[) = [g(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[\\ &= [1; 2[\end{aligned}$$

b. Construction de $(C_{g^{-1}})$ (voir figure précédente):

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ $(C_{g^{-1}})$ et (C_g) sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$

Exercice 48

On a: $f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

1 ▶ Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

Soit x de $\mathbb{R}$; $x \in D_f \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} \geq 0$ et $x+1 \neq 0$

Le tableau de signe de $\frac{1-x}{1+x}$ est le suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	0	-
$1+x$	-	0	+	+
$\frac{1-x}{1+x}$	-	+	0	-

Donc: $D_f =]-1; 1]$

▶ Calculons $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$:

Soit x de $]-1; 1]$, on a: $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} (1-x) = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x+1 = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = +\infty$

et on a: $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$, donc: $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$

2 Étudions la dérivabilité de f à gauche en 1:

Soit $x \in]-1; 1[$, on a:
$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{x\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} - 0}{x - 1} \\ &= x\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \cdot \frac{1}{x-1} \\ &= -x\sqrt{\frac{(1-x)}{(x+1)(x-1)^2}} \\ &= -x\sqrt{\frac{1}{(x+1)(1-x)}} \end{aligned}$$

Le tableau de signe de $(x+1)(1-x)$ est le suivant :

x	-1	1
$(x+1)(1-x)$	- 0 +	0 -

Donc: $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x+1)(1-x) = 0^+$; d'où: $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{\frac{1}{(x+1)(1-x)}} = +\infty$

$$\text{enfin : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -x \sqrt{\frac{1}{(x+1)(1-x)}} = -\infty$$

Donc : f n'est pas dérivable à gauche en 1.

Interprétation graphique :

La courbe C_f admet une demi-tangente au point d'abscisse 1. (dirigée vers les ordonnées positives), son équation est : $\begin{cases} x = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

3 a. Montrons que f est dérivable sur $] -1; 1[$:

La fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est dérivable sur $] -1; 1[$, est strictement positive sur $] -1; 1[$.

Donc : $u: x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ est dérivable sur $] -1; 1[$; et la fonction $v: x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur l'intervalle $] -1; 1[$; donc : $f = v \times u$ est dérivable sur $] -1; 1[$.

► Montrons que : $(\forall x \in] -1; 1[) ; f'(x) = \frac{1-x-x^2}{(1+x)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$

$$\begin{aligned} \text{on a : } (\forall x \in] -1; 1[) ; f'(x) &= x' \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' \\ &= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x \times \frac{\left(\frac{1-x}{1+x} \right)'}{2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \end{aligned}$$

$$\text{d'autre part : } \left(\frac{1-x}{1+x} \right)' = \frac{-1(x+1) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-x-1-1+x}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} (\forall x \in] -1; 1[) ; f'(x) &= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x \cdot \frac{\frac{-2}{(x+1)^2}}{2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{\frac{1-x}{1+x} + x \cdot \frac{-1}{(x+1)^2}}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \\ &= \frac{(1-x)(1+x) - x}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{1-x^2-x}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \end{aligned}$$

b. Étudions le signe de $f'(x)$ et dressons le tableau de variations de f :

$$\text{On a : } (\forall x \in] -1; 1[) ; (x+1)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} > 0$$

d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x^2-x$.

Le trinôme $1-x^2-x$ admet deux solutions qui sont : $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

d'où le tableau de signe de $1-x^2-x$:

x	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	-1	1	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		
$-x^2-x+1$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	-1	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	0	$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$-\infty$

4 Déterminons l'équation de la tangente à la courbe f au point $O(0;0)$:

On a : $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{1\sqrt{\frac{1}{1}}} = 1$

donc l'équation de la tangente à (C_f) est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

alors : $y = 1(x) + 0$

Donc : $(T): y = x$

5 Construction de (C_f) :

6 Déterminons l'ensemble :

$$(S) = \{M(x;y) \in (P) / (x-1)x^2 + (x+1)y^2 = 0\}$$

Soit $M(x;y)$ un point du plan; on a :

$$M(x;y) \in (S) \Leftrightarrow (x-1)x^2 + (x+1)y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)x^2 = (1+x)y^2$$

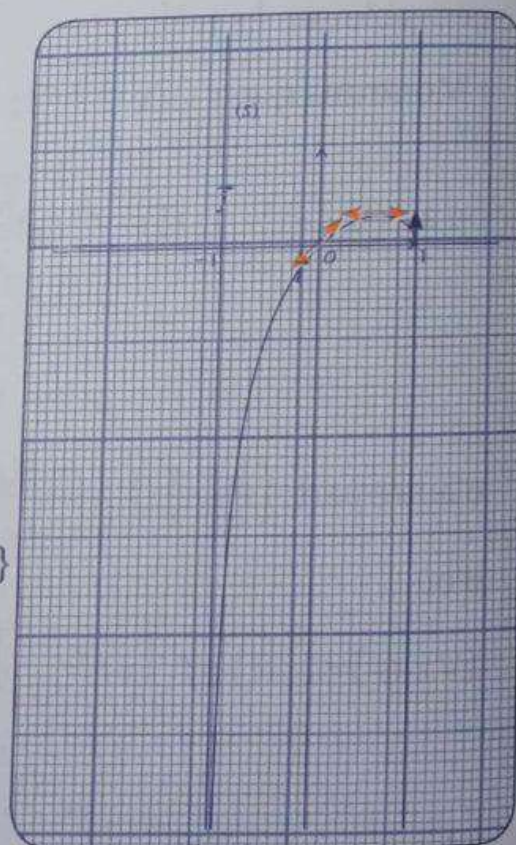
$$\Leftrightarrow (1-x)x^2 = (1+x)y^2$$

On remarque que le point d'abscisse -1 n'appartient pas à (S) .

On suppose que : $x \neq -1$. on a : $M(x;y) \in S \Leftrightarrow \frac{(1-x)}{x+1}x^2 = y^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \text{ et } \frac{1-x}{x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |y| = |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ et } x \in]-1; 1]$$



$$M(x; y) \in S \Leftrightarrow y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ ou } y = -x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\Leftrightarrow y = f(x) \text{ ou } y = -f(x)$$

S est la réunion de (C_f) et (C_{-f}) . (remarque : (C_{-f}) est la courbe symétrique de (C_f) par rapport à l'axe des abscisses).

Exercice 49

On a : $f(x) = \sqrt{x^2 - |x| + 1}$

1 Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - |x| + 1 \geq 0\}$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 = |x|^2$

d'où : $x^2 - |x| + 1 = |x|^2 - |x| + 1$, posons : $X = |x|$ alors l'inéquation $x^2 - |x| + 1 \geq 0$ devient : $X^2 - X + 1 \geq 0$

or le signe du trinôme $X^2 - X + 1$ est celui : $a = 1$ (car le discriminant : $\Delta < 0$)

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 - |x| + 1 > 0$

D'où : $D_f = \mathbb{R}$

2 Étudions la partie de f :

Soit : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; -x \in \mathbb{R}$

et $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - |-x| + 1} = \sqrt{x^2 - |x| + 1} = f(x)$

Donc la fonction f est paire.

3 a. Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis déduisons : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

On a : $(\forall x > 0) ; f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$, or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$, donc : $\lim_{-x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

► Déterminons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

On pose : $x = -X$, quand x tend vers $-\infty$, alors X tend vers $+\infty$.

d'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(-X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b. Étudions la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$:

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x > 0$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

► Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x > 0; \text{ on a : } f(x) - x &= \sqrt{x^2 - x + 1} - x \\ &= \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \\ &= \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \\ &= \frac{x(-1 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} \\ &= \frac{-1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} \end{aligned}$$

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{-1}{2}$$

Donc la courbe (C_f) admet une asymptote oblique d'équation : $y = x - \frac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$.

4 a. Étudions la dérivabilité de f à droite en 0 :

Soit $x > 0$; on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x} = \frac{x^2 - x + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \frac{x(x - 1)}{x(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} \\ &= \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} \end{aligned}$$

puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - x + 1} + 1 = 2$

d'où : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-1}{2}$

donc la courbe de f est dérivable à droite en 0, et (C_f) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente de pente $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$.

b. Étudions les variations de f :

Sur l'intervalle $]0; +\infty[$; on a : $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

► La fonction : $x \mapsto x^2 - x + 1$ est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ et strictement positive sur $]0; +\infty[$.

donc : $x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\text{On a : } (\forall x > 0); f'(x) = \frac{(x^2 - x + 1)'}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est celui de $2x - 1$:

Le tableau de signe $2x - 1$ sur $[0; +\infty[$ est le suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	-	0	+

Le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$ est le suivant:

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$+\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

Puisque la fonction f est paire; donc elle inverse les variations sur $]-\infty; 0[$.

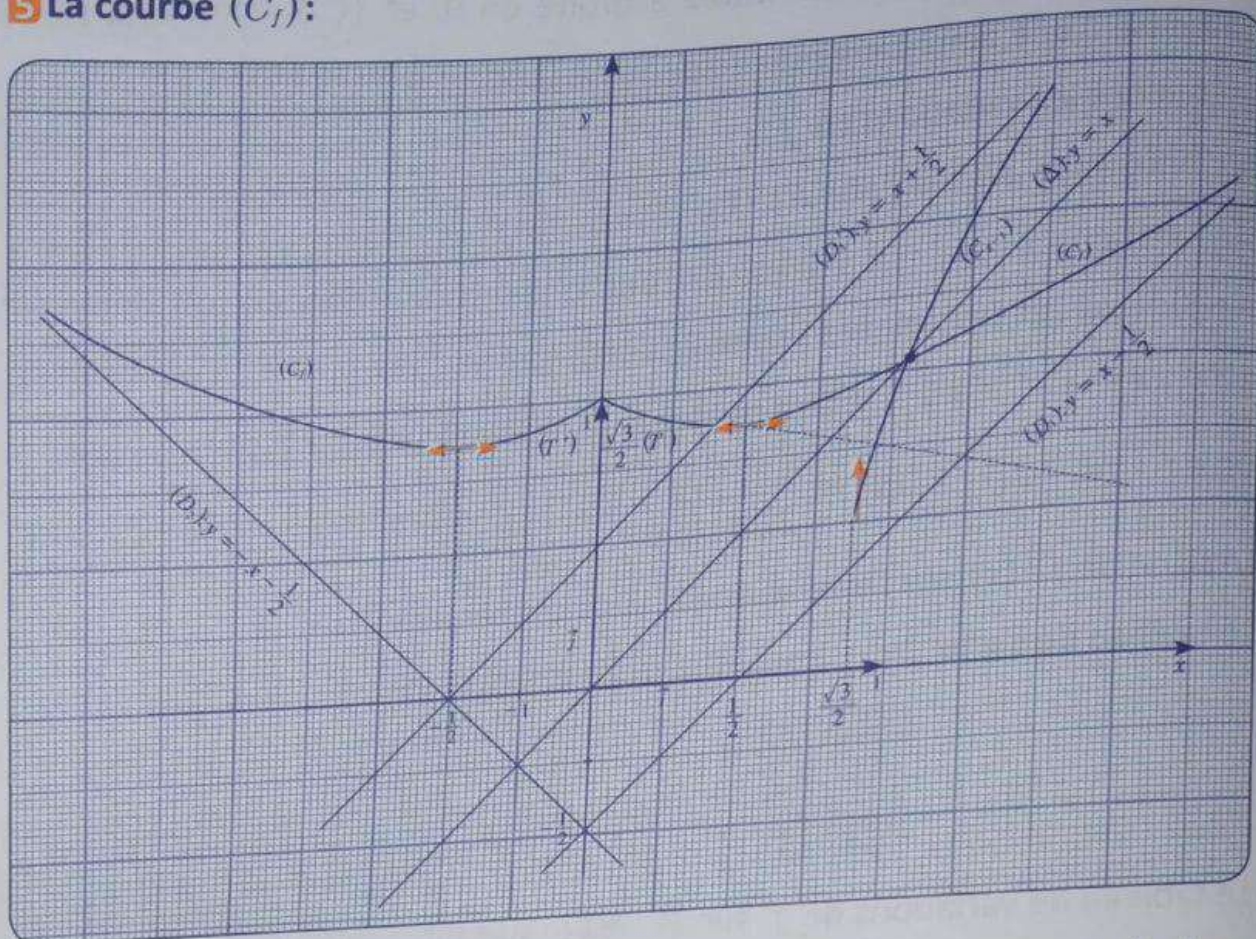
Donc tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est le suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$			1			$+\infty$	
		$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	

On remarque que : $f'_g(0) = \frac{1}{2}$ et $f'_f(0) = -\frac{1}{2}$; de plus on a :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5 La courbe (C_f) :



On a : la droite $(D): y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
Puisque f est paire; donc (C_f) admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

6 a. Montrons que g admet une fonction réciproque :

La fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ (car: $x \mapsto x^2 - x + 1$ est continue et positive sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$).

et on a : g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Donc : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur :

$$J = g\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\right) = \left[g\left(\frac{1}{2}\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right[= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$$

b. Construction de $(C_{g^{-1}})$ (voir figure précédente):

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe $(C_{g^{-1}})$ est le symétrique de (C_g) par rapport à la première bissectrice du repère c'est-à-dire la droite (Δ) d'équation $y = x$.

Exercice 50

On a : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

1 Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} =]0; +\infty[$

2 a. Déterminons les limites de f aux bornes de D_f :

► Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0^+ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = +\infty \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{aligned}$$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 : \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 1$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

b. Étudions les branches infinies de (C_f) :

► On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$: donc (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

► On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$: donc (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

c. Déterminons la position relative de (C_f) et la droite $(D) : y = 1$:

Soit $x > 0$; étudions le signe de $f(x) - 1$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) - 1 &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 1 \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1 - 2\sqrt{x}}{x} = \frac{(1 - 2\sqrt{x})(1 + 2\sqrt{x})}{x(1 + 2\sqrt{x})} = \frac{1 - 4x}{x(1 + 2\sqrt{x})} \end{aligned}$$

le signe de $f(x) - 1$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est celui de $1 - 4x$.

Car : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; x(1 + 2\sqrt{x}) > 0$

et on a : $1 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Le tableau de signe de $1 - 4x$ sur $]0; +\infty[$ est le suivant :

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$1 - 4x$	+	0	-

donc le tableau de la position relative (C_f) et (D) sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est :

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f(x) - 1$	+	0	-
Position relative de (C_f) et (D)	(C_f) est au dessus de (D)		(C_f) est en dessous de (D)

ou encore sur l'intervalle $]0; \frac{1}{4}[$; (C_f) est au dessus de $(D) : y = 1$.

Et sur $]\frac{1}{4}; +\infty[$; (C_f) est en dessous de $(D) : y = 1$.

Et (C_f) coupe $(D) : y = 1$ au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.

3 a. Montrons que : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{x-1}{x^2(\sqrt{x}+1)}$:

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) &= \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \right)' \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\
 &= 2 \left(0 - \frac{-(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \right) \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \right) \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \right) \\
 &= \frac{1}{(\sqrt{x})^3} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^4} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2(\sqrt{x}+1)}
 \end{aligned}$$

b. Dressons le tableau de variations de f :

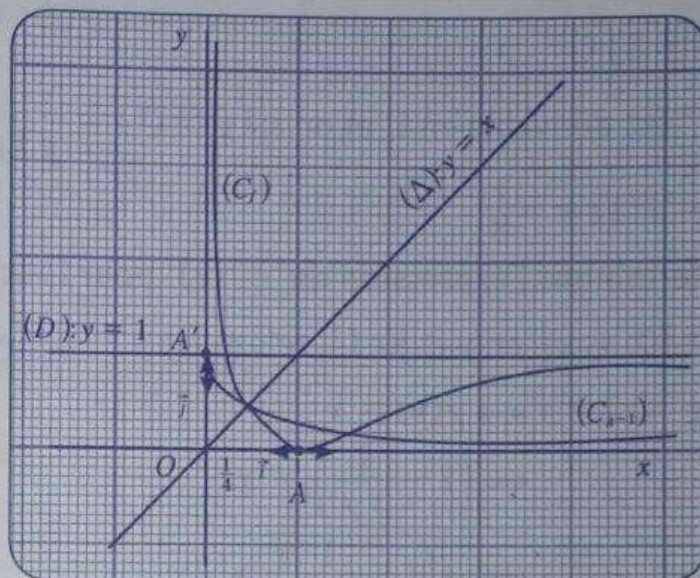
Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$.

on a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

d'où le tableau de variations de f est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	1	0	$+\infty$

4 La courbe de f :



5 a. Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} :

On a la fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $]0; 1]$ et ne s'annule pas sur $]0; 1]$.

Donc : $u: x \mapsto 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0; 1]$; donc : $g = u^2$ est continue sur $]0; 1]$.

Et on a : g est strictement décroissante sur $]0; 1]$.

D'où : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J ; avec :

$$J = g(]0; 1]) = [g(1); \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)[= [0; +\infty[$$

b. Courbe de la fonction g^{-1} :

Dans un repère orthonormé (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la 1^{ère} bissectrice du repère c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

(C_g)	$(C_{g^{-1}})$
$(D): x = 0$ asymptote verticale	$(D'): y = 0$ asymptote horizontale
$A(1; 0) \in (C_g)$	$A'(0; 1) \in (C_{g^{-1}})$
C_g admet une demi-tangente horizontale au point $A(1; 0)$	$(C_{g^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale au point $A'(0; 1)$

Construction de $(C_{g^{-1}})$ (voir la courbe précédente).

c. Calculons $g\left(\frac{1}{4}\right)$ et $(g^{-1})'(1)$:

$$\text{On a : } g\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right)^2 = (1 - 2)^2 = 1$$

$$\text{donc : } g\left(\frac{1}{4}\right) = 1; \text{ d'où : } g^{-1}(1) = \frac{1}{4} \text{ (remarquer que } \frac{1}{4} \in]0; 1])$$

► La fonction g est dérivable en $g^{-1}(1)$, c'est-à-dire en $\frac{1}{4}$ et $g'\left(\frac{1}{4}\right) \neq 0$ (car : $g'\left(\frac{1}{4}\right) = -8$)

$$\text{d'où : } g^{-1} \text{ est dérivable en } 1, \text{ et on a : } (g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(1)\right)} = \frac{1}{g'\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{-8}$$

$$\text{D'où : } (g^{-1})'(1) = -\frac{1}{8}$$

d. Déterminons l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout x de $[0; +\infty[$:

Soit : $x \in [0; +\infty[$ et $y \in]0; 1]$, tels que : $y = g^{-1}(x)$

$$\text{On a : } g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2} = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \left|1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| = \sqrt{x}$$

$$\text{or : } 0 < y \leq 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{y} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} \geq 1$$

$$\Rightarrow 0 \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\text{donc : } g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow -\left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt{x} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in [0; +\infty[) ; g^{-1}(x) = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$

Exercice 51

On a : $f(x) = \sqrt{2x-2} - x + 1$

1 Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\} = [1; +\infty[$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} \text{Soit : } x \in [1; +\infty[; \text{ on a : } f(x) &= \sqrt{2x-2} - x + 1 = \sqrt{x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} - x + 1 \\ &= x \left(\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x} = -1$$

$$\text{et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Soit $x \in [1; +\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{2x-2} - x + 1}{x} = \frac{x \left(\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x} \right)}{x} = \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

3 Déterminons la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$:

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

$$\text{Calculons : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x$$

$$\text{Soit : } x \in [1; +\infty[$$

$$\text{On a : } f(x) + x = \sqrt{2x-2} - x + 1 + x = \sqrt{2x-2} + 1$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-2} + 1 = +\infty$$

Conclusion : (C_f) la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = -x$ au voisinage de $+\infty$.

4 Étudions la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$:

$$\text{Soit } x \in [1; +\infty[, \text{ on a : } f(1) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{et : } \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{\sqrt{2x-2} - x + 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{2x-2}}{x - 1} - \frac{(x - 1)}{x - 1} \\ &= \sqrt{\frac{2(x-1)}{(x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\frac{2}{x-1}} - 1 \end{aligned}$$

on a : $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ et $(\forall x \in]1; +\infty[) ; x - 1 > 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$, d'où : f n'est pas dérivable à droite en 1.

Interprétation graphique :

(C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(1;0)$ (dirigée vers le haut).

5 a. Montrons que : $(\forall x \in]1; +\infty[) ; f'(x) = \frac{3 - 2x}{\sqrt{2x - 2}(\sqrt{2x - 2} + 1)}$

La fonction: $x \mapsto 2x - 2$ est dérivable et strictement positive sur $]1; +\infty[$, donc :

$u: x \mapsto \sqrt{2x - 2}$ est dérivable sur $]1; +\infty[$.

Et la fonction : $v: x \mapsto -x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]1; +\infty[$.

Donc : f est dérivable sur $]1; +\infty[$. ($f = u + v$)

► Calculons $f'(x)$ pour tout $]1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} (\forall x \in]1; +\infty[) ; f'(x) &= \frac{(2x - 2)'}{2\sqrt{2x - 2}} - 1 = \frac{2}{2\sqrt{2x - 2}} - 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x - 2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{2x - 2}}{\sqrt{2x - 2}} = \frac{(1 - \sqrt{2x - 2})(1 + \sqrt{2x - 2})}{(\sqrt{2x - 2})(1 + \sqrt{2x - 2})} \\ &= \frac{1 - (2x - 2)}{\sqrt{2x - 2}(1 + \sqrt{2x - 2})} = \frac{-2x + 3}{\sqrt{2x - 2}(1 + \sqrt{2x - 2})} \end{aligned}$$

b. Étudions le signe de $f'(x)$:

On a : $(\forall x \in]1; +\infty[) ; \sqrt{2x - 2}(\sqrt{2x - 2} + 1) > 0$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - 2x$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

► Le tableau de signes de $3 - 2x$ est :

x	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3 - 2x$	+	0	-

Donc le tableau de variations de f est le suivant :

x	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
f	0	$\frac{1}{2}$	$-\infty$

6 L'équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 3$.

On a : $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$ est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

c'est-à-dire l'équation de (T) est : $y = -\frac{1}{2}(x - 3)$ (car : $f(3) = 0$ et $f'(3) = -\frac{1}{2}$)

D'où : $(T) : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

7 Montrons que : $(\forall x > 1) ; f''(x) = \frac{-1}{(2x-2)^{\frac{3}{2}}} :$

Soit : $x \in]1; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-2}} - 1 = \frac{1}{(2x-2)^{\frac{1}{2}}} - 1$
 $= (2x-2)^{-\frac{1}{2}} - 1$

Donc : $f''(x) = -\frac{1}{2}(2x-2)'(2x-2)^{-\frac{1}{2}-1} - 0$
 $= \frac{-1}{2}(2)(2x-2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}$

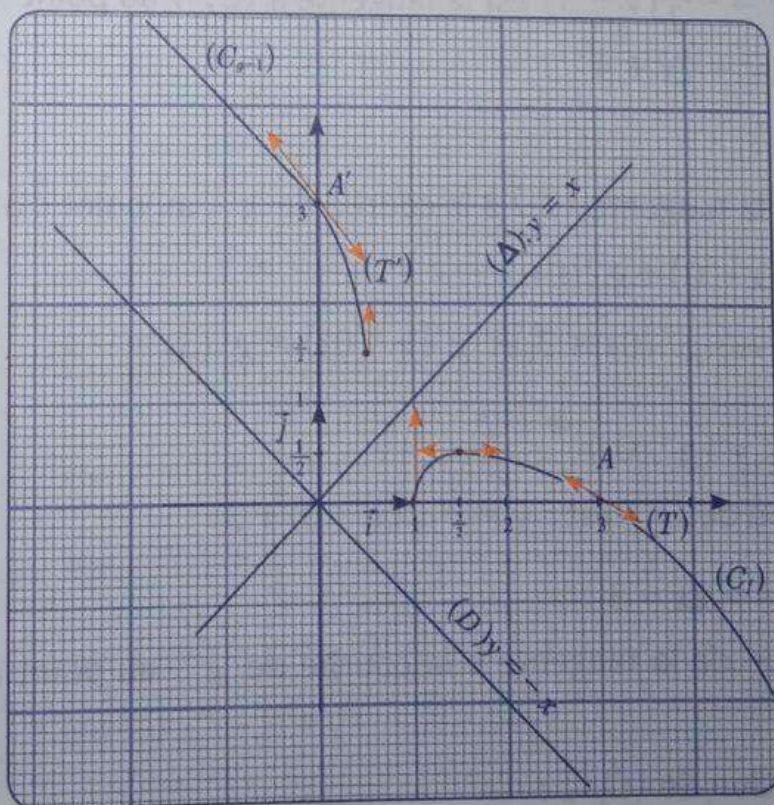
d'où : $(\forall x > 1) ; f'(x) = \frac{-1}{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}$

► Étudions la concavité de (C_f) :

On a : $\forall x \in]1; +\infty[; f''(x) < 0$

donc la courbe (C_f) est concave sur $[1; +\infty[$

8 La courbe :



9 a. Montrons que g admet une fonction réciproque :

On a : g est la restriction de f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$, et f est une fonction continue (comme somme de deux fonctions continues sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ qui sont : $x \mapsto \sqrt{2x-2}$ et $x \mapsto -x+1$) ; donc g est continue sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$.

Et on a : g est strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$.

Donc : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur :

$$\begin{aligned} J &= g\left(\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]\right) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g\left(\frac{3}{2}\right)\right] \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f\left(\frac{3}{2}\right)\right] \\ &= \left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

b. Déterminons l'équation de la tangente à $(C_{g^{-1}})$ au point d'abscisse 0:

1^{ère} méthode :

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(3) = 0 &\Leftrightarrow g(3) = 0 \\ &\Leftrightarrow g^{-1}(0) = 3 \end{aligned}$$

Donc : la tangente à $(C_{g^{-1}})$ au point $A'(0;3)$ est la droite symétrique de la tangente à (C_g) au point $A(3;0)$ par rapport à la 1^{ère} bissectrice : $(\Delta): y = x$.

Or : $(T): y = -\frac{1}{2}(x-3)$ est la tangente à (C_f) au point $A(3;0)$.

Donc : $(T'): x = -\frac{1}{2}(y-3)$ est la tangente à $(C_{g^{-1}})$ au point $A'(0;3)$.

$$\text{D'où : } (T'): y = -2x + 3$$

2^{ème} méthode :

L'équation de la tangente (T') à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse 0 est :

$$y = (g^{-1})'(0)(x-0) + g^{-1}(0)$$

$$\text{or : } g(3) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = 3 \text{ et } g'(g^{-1}(0)) = g'(3) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{donc : } (g^{-1})' = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = -2$$

$$\text{donc l'équation de } (T) \text{ est : } y = -2(x-0) + 3$$

$$\text{d'où : } (T'): y = -2x + 3$$

Donc l'équation de la tangente à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse 0 est :

$$y = -2x + 3$$

c. Construction de $(C_{g^{-1}})$:

► Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $(C_{g^{-1}})$ est le symétrique de (C_g) par

rapport à la 1ère bissectrice du repère (la droite d'équation : $(y = x)$)

10 Montrons que : $(\forall x \in J) ; g^{-1}(x) = 2 - x + \sqrt{1 - 2x}$:

1^{ère} méthode :

Soit : $y \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et $x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ tel que : $y = g^{-1}(x)$

on a : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y-2} - y + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{y-1} - (y-1) = x$$

$$\Leftrightarrow y-1 - \sqrt{2}\sqrt{y-1} = -x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y-1})^2 - \sqrt{2}\sqrt{y-1} = -x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y-1})^2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{y-1} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{y-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{y-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$$

on a : $y \geq \frac{3}{2} \Rightarrow y-1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{y-1} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \sqrt{y-1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{y-1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$$

donc : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{y-1} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - x}$$

$$\Leftrightarrow y-1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y-1 = \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - x} + \frac{1}{2} - x ; (\text{car : } \frac{1}{2} - x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow y = 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2} - x} + \frac{1}{2} - x$$

$$\Leftrightarrow y = 2 - x + \sqrt{2\left(\frac{1}{2} - x\right)}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 - x + \sqrt{1 - 2x}$$

donc : $(\forall x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]) ; g^{-1}(x) = 2 - x + \sqrt{1 - 2x}$

2^{ème} méthode : soit : $y \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et $x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$, tel que : $g^{-1}(x) = y$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y-2} - y + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y-2} = x + y - 1$$

$$\Leftrightarrow 2y - 2 = (x + y - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y - 2 = (x + y)^2 - 2(x + y) + 1$$

$$\Leftrightarrow 2y - 2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = y^2 + y(2x - 4) + x^2 + 3 - 2x$$

Soient : $a = 1$ et $b = 2(x - 2)$ et $c = x^2 + 3 - 2x$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4(x - 2)^2 - 4(x^2 + 3) + 8x \\ &= 4(x^2 - 4x + 4) - 4x^2 - 12 + 8x \\ &= -8x + 4 \\ &= 4(-2x + 1) \end{aligned}$$

on a : $\Delta \geq 0$ (car : $x \leq \frac{1}{2}$)

alors l'équation admet deux solutions :

$$y_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2(x - 2) - \sqrt{4(1 - 2x)}}{2} = -x + 2 - \sqrt{1 - 2x}$$

$$\text{et } y_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -x + 2 + \sqrt{1 - 2x}$$

pour $x = 0$ on a : $y_1 = 1$ or $0 \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et $1 \notin \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

donc : y_1 à rejeté alors y_2 est la bonne solution.

Donc : $\left(\forall x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]\right); g^{-1}(x) = -x + 2 + \sqrt{1 - 2x}$

Exercice 52

$$\text{On a : } f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}$$

1 Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 \geq 0\}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ est : $\Delta = -3$,

on a : $\Delta < 0$ et $a > 0$ ($a = 1$)

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + x + 1 > 0$

D'où : $D_f = \mathbb{R}$

► Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$:

La fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$; et de plus : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 + x + 1 > 0$; la fonction : $u : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction $v : x \mapsto x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $f = u + v$ est continue sur $\mathbb{R}$ (somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

2 a. Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

Soit $x \in]-\infty; 0[$; on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{((x+1) + \sqrt{x^2 + x + 1})(x+1 - \sqrt{x^2 + x + 1})}{(x+1) - \sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= \frac{(x+1)^2 - (x^2 + x + 1)}{x+1 - \sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - x - 1}{x+1 - \sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= \frac{x}{x(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}})} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \end{aligned}$$

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}$

d'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

Interprétation graphique :

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$; donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

b. Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$

car : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty \end{cases}$

c. Montrons que la droite d'équation : $y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$:

Soit : $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
 f(x) - \left(2x + \frac{3}{2}\right) &= x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - \frac{3}{2} \\
 &= \sqrt{x^2 + x + 1} - x - \frac{1}{2} \\
 &= \sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{x^2 + x + 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{x^2 + x + 1 - x^2 - x - \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

puisque: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2} = +\infty$, alors: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}} = 0$

d'où: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(2x + \frac{3}{2}\right) = 0$, et on a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Donc la droite (D) d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

3 a. Montrons que : $(\forall x \in D_f) ; f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$:

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, qui sont : $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ et $x \mapsto x + 1$

(remarque : la fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}
 \text{et on a : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) &= (x + 1)' + (\sqrt{x^2 + x + 1})' \\
 &= 1 + \frac{(x^2 + x + 1)'}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \\
 &= 1 + \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \\
 &= \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

b. Montrons que f est croissante sur D_f :

Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est celui de : $2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1$

(car le dénominateur est strictement positif : $\forall x \in \mathbb{R} ; 2\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$)

► Si : $2x + 1 > 0$ (c'est-à-dire : $x > -\frac{1}{2}$), alors : $2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$

Donc : $\forall x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[; f'(x) > 0$

► Si : $2x + 1 \leq 0$ (c'est-à-dire : $x \leq -\frac{1}{2}$) alors on ne peut pas déterminer directement le signe de : $2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}$

$$\begin{aligned} \text{mais on a : } 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1 &= \frac{4(x^2 + x + 1) - (2x + 1)^2}{2\sqrt{x^2 + x + 1} - (2x + 1)} \\ &= \frac{4x^2 + 4x + 4 - 4x^2 - 4x - 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1} - (2x + 1)} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{x^2 + x + 1} - (2x + 1)} \end{aligned}$$

puisque : $-(2x + 1) \geq 0$ et $2\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$ alors :

$$2\sqrt{x^2 + x + 1} - (2x + 1) > 0$$

$$\text{d'où : } \frac{3}{2\sqrt{x^2 + x + 1} - (2x + 1)} > 0 ; \text{ donc : } 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1 > 0$$

$$\text{d'où : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$$

dans les deux cas on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1 > 0$

► Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

4 a. Déterminons l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 :

L'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est :

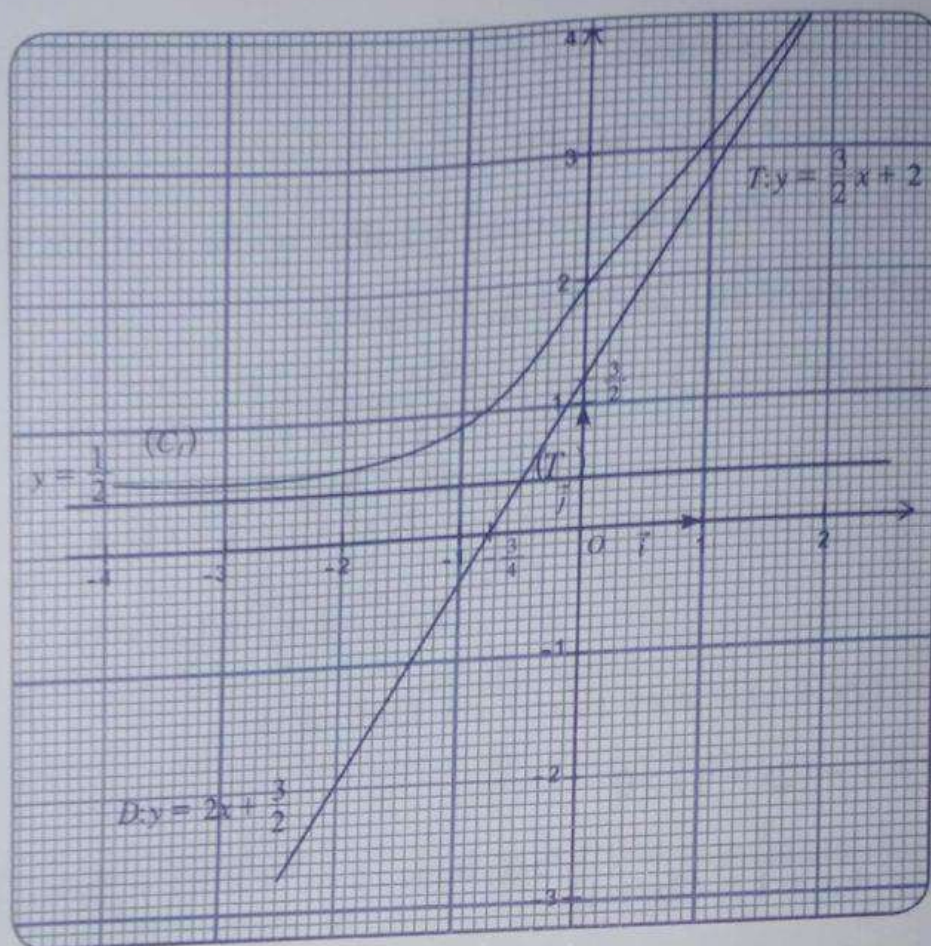
$$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\text{or : } f(0) = 2 \text{ et } f'(0) = \frac{2+1}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{D'où : } (T) : y = \frac{3}{2}x + 2$$

b. Construction de (C_f) :

$(D) : y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.



5 a. Montrons que f admet une fonction réciproque :

On a : f est continue sur $\mathbb{R}$ (d'après la première question).
et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc : f admet une fonction réciproque f^{-1} ; définie sur l'intervalle J :

$$\begin{aligned} \text{tel que : } J &= f(\mathbb{R}) = f(-\infty; +\infty[) \\ &=]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[\\ &=]\frac{1}{2}; +\infty[\end{aligned}$$

b. Calculons $(f^{-1})'(2)$:

$$\text{On a : } f(0) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2) = 0$$

► La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) \neq 0$ (car : $f'(0) = \frac{3}{2}$)

$$\text{Donc } f^{-1} \text{ est dérivable en 2 et : } (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

c. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit : $y \in \mathbb{R}$ et $x \in J$ c'est-à-dire : $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$, avec : $y = f^{-1}(x)$

on a :

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow y + 1 + \sqrt{y^2 + y + 1} = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + y + 1} = x - y - 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y + 1 = (x - (y + 1))^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y + 1 = x^2 + (y + 1)^2 - 2x(y + 1)$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y + 1 = x^2 + y^2 + 2y + 1 - 2xy - 2x$$

$$\Leftrightarrow y - 2y + 2xy = x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow -y + 2xy = x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow y(-1 + 2x) = x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 2x}{2x - 1} \quad (\text{car } 2x - 1 \neq 0)$$

Donc : $\left(\forall x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\right); f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x - 1}$

Exercice 53

on a : $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$

1 a. Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

donc : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 > 0\}$ (la condition $x^2 + 1 > 0$ est vraie pour tout x de $\mathbb{R}$).

donc : $D_f =]-\infty; +\infty[$

► **Étudions la parité de f :**

On a : $\forall x \in \mathbb{R} ; -x \in \mathbb{R}$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = \frac{(-x)^2 + 5}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x)$

on a : $\begin{cases} \forall x \in D_f ; -x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) ; f(-x) = f(x) \end{cases}$

Donc f est une fonction paire.

b. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

Soit : $x \in]0; +\infty[$ on a :
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x^2 + 5}{(x)\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{x \left(x + \frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{x + \frac{5}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \end{aligned}$$

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{5}{x} = +\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2 Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$:

$$\begin{aligned} \text{Soit : } x \in \mathbb{R} : f'(x) &= \left(\frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)' = \frac{(x^2 + 5)' \sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 5)(\sqrt{x^2 + 1})'}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} \\ &= \frac{2x\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 5) \cdot \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} \\ &= \left(2x\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 5) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) \times \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} \\ &= \left(2x\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x(x^2 + 5)}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \times \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} \\ &= \frac{2x(x^2 + 1) - x(x^2 + 5)}{\sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{x^2 + 1})^2} \\ &= \frac{x[(2x^2 + 2) - (x^2 + 5)]}{(\sqrt{x^2 + 1})^3} \\ &= \frac{x(x^2 - 3)}{(\sqrt{x^2 + 1})^3} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{x(x^2 - 3)}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$

► **Variations de f :**

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{x(x^2 - 3)}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$

Or : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{(x^2 + 1)^3} > 0$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x^2 - 3)$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } x(x^2 - 3) &= x(x^2 - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \\ &= x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

donc : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

Le tableau de signe de $x(x^2 - 3)$ est:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x^2 - 3$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
$x(x^2 - 3)$	$-$	0	$+$	0	$+$

► Le tableau de variations de est le suivant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{car : } f \text{ est paire})$$

$$\text{et } f(\sqrt{3}) = \frac{3+5}{\sqrt{3}+1} = \frac{8}{2} = 4$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$+\infty$	4	5	4	$+\infty$

3 Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$:

$$\begin{aligned}
 \text{Soit : } x \in]0; +\infty[: f(x) - x &= \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}} - x \\
 &= \frac{x^2+1+4}{\sqrt{x^2+1}} - x \\
 &= \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} - x \\
 &= \sqrt{x^2+1} - x + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - (x)^2}{\sqrt{x^2+1} + x} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}
 \end{aligned}$$

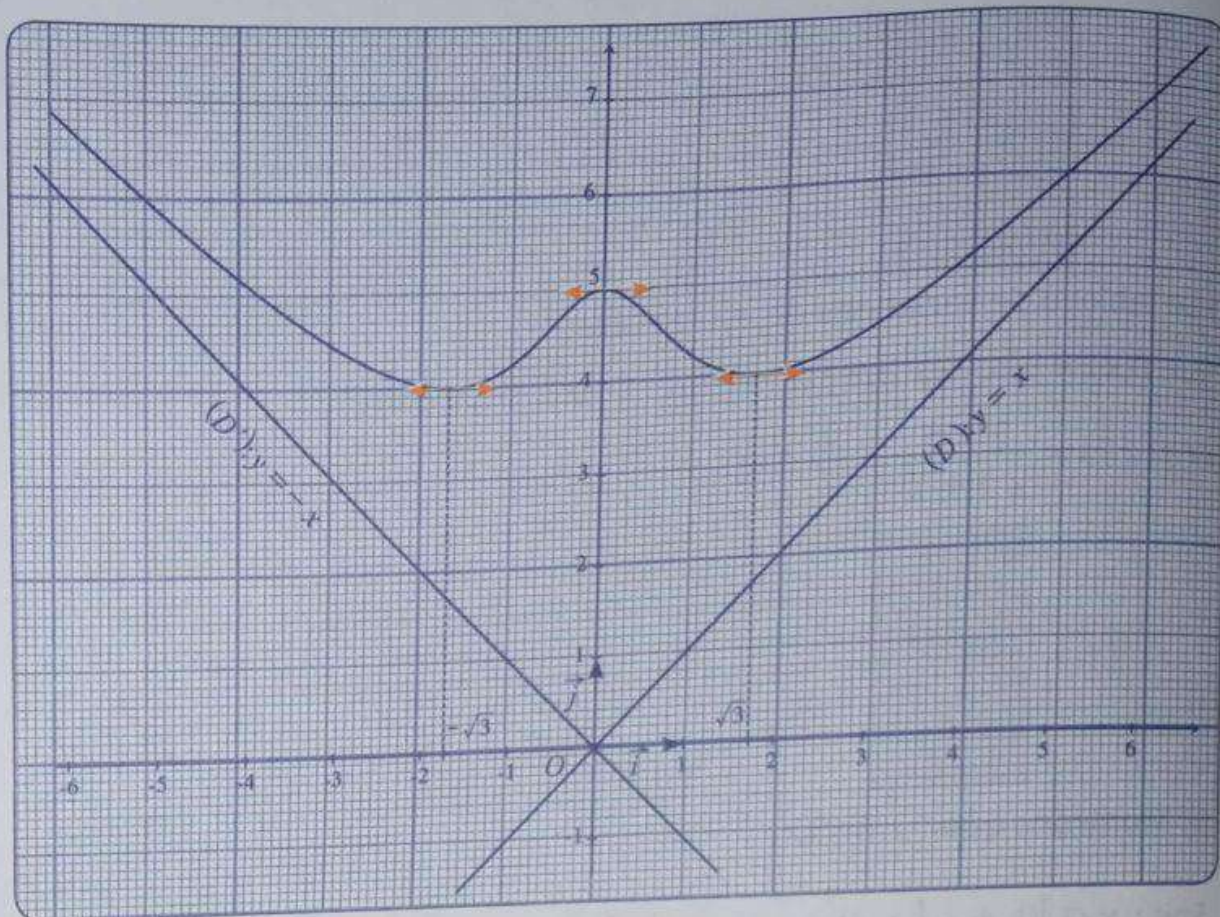
$$\text{puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} = 0, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0, \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$$

Interprétation graphique :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

4 Construction de (C_f) :

Puisque f est paire alors (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



5 a. Montrons que g admet une fonction réciproque :

La fonction g est la restriction de f sur $[0; \sqrt{3}]$.

La fonction g est continue sur $[0; \sqrt{3}]$ comme quotient de deux fonctions continues sur $[0; \sqrt{3}]$ qui sont : $x \mapsto x^2 + 5$ et $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$.

Et on a : g est strictement décroissante sur $[0; \sqrt{3}]$.

Donc : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J .

$$\text{Tel que : } J = g([0; \sqrt{3}]) = [f(\sqrt{3}); g(0)] \\ = [4; 5]$$

b. Déterminons $g(1)$ et $(g^{-1})'(3\sqrt{2})$:

$$\text{On a : } g(1) = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}, \text{ alors : } g^{-1}(3\sqrt{2}) = 1$$

$$\text{or : } g \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } g'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ c'est-à-dire : } g'(1) \neq 0$$

donc : g^{-1} est dérivable en $3\sqrt{2}$ et on a :

$$(g^{-1})'(3\sqrt{2}) = \frac{1}{g'(g^{-1}(3\sqrt{2}))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } (g^{-1})'(3\sqrt{2}) = -\sqrt{2}.$$

Soit n_0 un entier naturel et $I \subset \mathbb{N}$ avec $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

1 Suite majorée ; suite minorée ; suite bornée.

Définitions:

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique définie sur I

- ▶ La suite $(u_n)_{n \in I}$ est **majorée** si et seulement s'il existe un réel M tel que :
 $(\forall n \in I) ; u_n \leq M$
- ▶ La suite $(u_n)_{n \in I}$ est **minorée** si et seulement s'il existe un réel m : tel que
 $(\forall n \in I) ; u_n \geq m$
- ▶ La suite $(u_n)_{n \in I}$ est **bornée** si et seulement si elle est majorée et minorée.

2 Sens de variation d'une suite

Propriété:

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite définie sur I

- ▶ $(u_n)_{n \in I}$ est une suite **croissante** si et seulement si : $(\forall n \in I) ; u_{n+1} \geq u_n$
- ▶ $(u_n)_{n \in I}$ est une suite **strictement croissante** si et seulement si :
 $(\forall n \in I) ; u_{n+1} > u_n$
- ▶ $(u_n)_{n \in I}$ est une suite **décroissante** si et seulement si : $(\forall n \in I) ; u_{n+1} \leq u_n$
- ▶ $(u_n)_{n \in I}$ est une suite **strictement décroissante** si et seulement si ,
 $(\forall n \in I) ; u_{n+1} < u_n$
- ▶ $(u_n)_{n \in I}$ est une suite **constante** si et seulement si : $(\forall n \in I) ; u_{n+1} = u_n$

3 Sens de variation d'une suite

Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
$(\forall n \in I) ; u_{n+1} = u_n + r$	$(\forall n \in I) ; u_{n+1} = qu_n$
$u_n = u_0 + nr$; cas où : $I = \mathbb{N}$	$u_n = q^n u_0$; $I = \mathbb{N}$ et $q \neq 0$
$u_n = u_p + (n - p)r$; n et p de I	$u_n = q^{n-p} u_p$; n et p de I et $q \neq 0$

$S_n = \left(\begin{array}{c} \text{nombre} \\ \text{de terme} \end{array} \right) \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$	$(q \neq 1) ;$ $S_n = \frac{1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} \times (1 - q^n)}{1 - q}$
cas particulier: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	cas particulier: $(q \neq 1)$ $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exercices

Exercice 1 Raisonnement par récurrence

1 On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 2 ;$

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)$$

Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$

2 On considère la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par : $v_0 = 2 ;$

$$(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \sqrt{6 + v_n}$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < v_n < 3$

3 Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) w_{n+1} = 2 - \frac{1}{2 + w_n} \end{cases}$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq w_n \leq \sqrt{3}$

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

En utilisant le raisonnement par récurrence :

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < 6.$

2 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 6 - \frac{7}{2^n}.$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 \leq u_n \leq 2.$

2 Étudier les variations de la suite $(u_n).$

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5} \end{cases}$$

- 1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n > 0$
- 2 On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$; $v_n = \frac{5}{u_n}$
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.
 - b. Déterminer v_n et u_n en fonction de n .

Exercice 5

Soit (a_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - 1 \end{cases}$$

- 1 Déterminer α l'abscisse du point d'intersection de la droite $(D): y = x$ avec la droite $(\Delta): y = \frac{3}{2}x - 1$
- 2 On pose pour tout n de $\mathbb{N}$; $b_n = a_n - \alpha$
 - a. Montrer que (b_n) est une suite géométrique.
 - b. Déterminer b_n puis a_n en fonction de n .

Solutions

Exercice 1

1 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$

On a : $u_0 = 2$ et $2 > 1$ d'où $u_0 > 1$; donc la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $u_n > 1$ et on montre que $u_{n+1} > 1$.

On a : $u_n > 1$ donc $1 + u_n > 2$ d'où $\frac{1}{2}(1 + u_n) > 1$ ainsi $u_{n+1} > 1$.

la propriété est vraie pour $n + 1$;

donc d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$

2 Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < v_n < 3$

On a : $v_0 = 2$ et $0 < 2 < 3$ d'où $0 < v_0 < 3$;

la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que $0 < v_n < 3$ et on montre que $0 < v_{n+1} < 3$

On a :

$$\begin{aligned} 0 < v_n < 3 &\Rightarrow 6 < 6 + v_n < 9 \\ &\Rightarrow \sqrt{6} < \sqrt{6 + v_n} < \sqrt{9} \\ &\Rightarrow \sqrt{6} < v_{n+1} < 3 \quad (\sqrt{6} > 0) \\ &\Rightarrow 0 < v_{n+1} < 3 \end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < v_n < 3 \Rightarrow 0 < v_{n+1} < 3$

Donc d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < v_n < 3$

3 Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq w_n \leq \sqrt{3}$

On a : $w_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq \sqrt{3}$ donc $1 \leq w_0 \leq \sqrt{3}$; d'où la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que $1 \leq w_n \leq \sqrt{3}$; et on montre que $1 \leq w_{n+1} \leq \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \text{On a:} \quad 1 \leq w_n \leq \sqrt{3} &\Rightarrow 3 \leq 2 + w_n \leq 2 + \sqrt{3} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \leq \frac{1}{2 + w_n} \leq \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \frac{-1}{3} \leq \frac{-1}{2 + w_n} \leq \frac{-1}{2 + \sqrt{3}} \\ &\Rightarrow 2 - \frac{1}{3} \leq 2 - \frac{1}{2 + w_n} \leq 2 - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \\ &\Rightarrow \frac{5}{3} \leq w_{n+1} \leq \frac{4 + 2\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3}} \\ &\Rightarrow \frac{5}{3} \leq w_{n+1} \leq \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &\Rightarrow 1 \leq w_{n+1} \leq \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)}{2 + \sqrt{3}} \quad (\text{car } \frac{5}{3} > 1) \\ &\Rightarrow 1 \leq w_{n+1} \leq \sqrt{3} \end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq w_n \leq \sqrt{3} \Rightarrow 1 \leq w_{n+1} \leq \sqrt{3}$

Donc; d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq w_n \leq \sqrt{3}$

Exercice 2

1 Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < 6$

► pour $n = 0$ on a: $u_0 = -1$ et $-1 < 6$, d'où : $u_0 < 6$; c'est-à-dire la propriété est vraie pour $n = 0$

► Soit n un élément de $\mathbb{N}$; montrons que: $u_n < 6 \Rightarrow u_{n+1} < 6$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } u_n < 6 &\Rightarrow \frac{1}{2}u_n < 3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}u_n + 3 < 6 \\ &\Rightarrow u_{n+1} < 6\end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 6 \Rightarrow u_{n+1} < 6$

Donc d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 6$

2 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 6 - \frac{7}{2^n}$

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = -1$ et $6 - \frac{7}{2^0} = 6 - 7 = -1$.

D'où : $u_0 = 6 - \frac{7}{2^0}$; ainsi la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On suppose que : $u_n = 6 - \frac{7}{2^n}$ Et on montre que $u_{n+1} = 6 - \frac{7}{2^{n+1}}$

$$\begin{aligned}\text{On a : } u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + 3 \\ &= \frac{1}{2}\left(6 - \frac{7}{2^n}\right) + 3 \\ &= 3 - \frac{7}{2 \times 2^n} + 3 \\ &= 6 - \frac{7}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$;

d'où d'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 6 - \frac{7}{2^n}$

Exercice 3

1 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 \leq u_n \leq 2$.

Pour $n = 1$; on a : $u_1 = 1$ et $1 \leq 1 \leq 2$; d'où $1 \leq u_1 \leq 2$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$

Soit n un élément $\mathbb{N}^*$; on suppose que : $1 \leq u_n \leq 2$ et on montre que :

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

$$\begin{aligned}\text{On a : } 1 \leq u_n \leq 2 &\Rightarrow 3 \leq u_n + 2 \leq 4 \\ &\Rightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2 \\ &\Rightarrow 1 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2 \\ &\Rightarrow 1 \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2 \\ &\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2\end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$

D'où d'après le principe de récurrence on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 \leq u_n \leq 2$

2 Étudions les variations de (u_n)

► Méthode 1:

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n$

$$= \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

$$= \frac{-(u_n + 1)(u_n - 2)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

On a eu la factorisation
en calculant le
discriminant de
 $-x^2 + x + 2$

infos:

$$ax^2 + bx + c$$

$$= a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec $\Delta > 0 (a \neq 0)$

Puisque : $\sqrt{u_n + 2} + u_n > 0$ et $u_n + 1 > 0$ et $u_n - 2 \leq 0$ donc: $u_{n+1} - u_n \geq 0$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} \geq u_n$; donc (u_n) est une suite croissante.

► Méthode 2 : On utilise le raisonnement par récurrence:

On a : $u_1 = 1$ et $u_2 = \sqrt{u_1 + 1} = \sqrt{2}$

Donc : $u_1 \leq u_2$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on suppose que $u_n \leq u_{n+1}$ et on montre que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

On a : $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow 0 \leq u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2$

$$\Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq u_{n+1}$

Donc la suite (u_n) est une suite croissante.

Exercice 4

On a : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5} \end{cases}$

1 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n > 0$

pour $n = 1$; on a : $u_1 = 1$ et $1 > 0$, donc : $u_1 > 0$.

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on suppose que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

on a : $u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} 5u_n > 0 \\ 3u_n + 5 > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{5u_n}{3u_n + 5} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$

D'où d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n > 0$

2 a. Montrons que la suite (v_n) est arithmétique :

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}^* ; \text{ on a : } v_{n+1} - v_n &= \frac{5}{u_{n+1}} - \frac{5}{u_n} = \frac{5}{\frac{5u_n}{3u_n+5}} - \frac{5}{u_n} \\ &= \frac{5 \times (3u_n + 5)}{5u_n} - \frac{5}{u_n} \\ &= \frac{3u_n + 5 - 5}{u_n} = \frac{3u_n}{u_n} = 3 \end{aligned}$$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} = v_n + 5$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 3$

et de 1^{er} terme : $v_1 = \frac{5}{u_1} = \frac{5}{1} = 5$

b. Déterminons v_n en fonction de n

$$\begin{aligned} \text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n &= v_1 + (n-1)r \\ &= 5 + (n-1) \times 3 \\ &= 5 + 3n - 3 \\ &= 3n + 2 \end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = 3n + 2$

► Exprimons u_n en fonction de n

Soit n de $\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } v_n &= \frac{5}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{5}{v_n} \\ &\Rightarrow u_n = \frac{5}{3n+2} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{5}{3n+2}$

Exercice 5

1 Déterminons α l'abscisse du point d'intersection de (D) et (Δ)

Il s'agit de résoudre le système :
$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \begin{cases} y = x \\ y = \frac{3}{2}x - 1 \end{cases} &\Rightarrow x = \frac{3}{2}x - 1 \\ &\Rightarrow 1 = \frac{3}{2}x - x \\ &\Rightarrow 1 = \frac{1}{2}x \\ &\Rightarrow 2 = x \end{aligned}$$

Donc $\alpha = 2$ est l'abscisse du point d'intersection de (D) et (Δ)

2 a. Montrons que (b_n) est une suite géométrique

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}; \text{ on a: } b_{n+1} &= a_{n+1} - \alpha \quad (\alpha = 2) \\ &= a_{n+1} - 2 \\ &= \frac{3}{2}a_n - 2 - 1 \\ &= \frac{3}{2}a_n - 3 = \frac{3}{2}(a_n - 2) = \frac{3}{2}b_n \end{aligned}$$

$$\text{Alors : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n$$

Donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Son premier terme est : } b_0 &= a_0 - 2 \\ &= 3 - 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

b. Exprimons b_n et a_n en fonction de n

$$\begin{aligned} \text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; b_n &= b_0 \times q^n \\ &= 1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

► Soit n de $\mathbb{N}$.

Exprimons a_n en fonction de n

$$\text{On a : } b_n = a_n - \alpha = a_n - 2$$

$$\text{D'où : } a_n = b_n + 2$$

$$\text{Donc : } a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$$

$$\text{Conclusion : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$$

4 Limites usuelles

$$\text{Pour tout } p \text{ de } \mathbb{N}^* ; \text{ on a: } \begin{aligned} \triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p &= +\infty & \triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^p} &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} &= 0 & \triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Si : } \alpha \in \mathbb{Q}^{*+} \text{ alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si : } \alpha \in \mathbb{Q}^{*-} \text{ alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$$

5 Convergence d'une suite

Soit $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ avec n_0 un entier naturel.

Définition:

- ▶ On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est une suite **convergence** si elle admet une limite l , et on écrit: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$
- ▶ Toute suite non convergence est dite **divergente**.

6 Les critères deconvergence d'une suite

- ▶ Si: $(\forall n \geq n_0); |u_n - l| \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in I}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.
- ▶ Si: $(\forall n \geq n_0); w_n \leq u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$, alors la suite $(u_n)_{n \in I}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.
- ▶ Si $(\forall n \geq n_0); v_n \leq u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors: (u_n) est une suite divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- ▶ Si $(\forall n \geq n_0); u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors: (u_n) est une suite divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- ▶ Toute suite croissante et majorée est convergente.
- ▶ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

7 Limite de (q^n)

Soit q un réel.

- ▶ Si $q > 1$, alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- ▶ Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$.
- ▶ Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- ▶ Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) est divergente.

Exercices

Exercice 6

Calculer la limite de chaque suite définie par son terme général:

$$1 \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^n : \frac{2^{n-1}}{5^n} : \frac{3^n}{4^n} : (-0,0007)^{n-5}$$

$$2 \quad \frac{3^n - 4}{3^n + 4} \text{ et } \frac{4^n - 6^n}{4^n + 6^n}$$

$$3 \quad \frac{5^n - 4^n}{3^n - 2^n} \text{ et } \frac{2^n - \pi^n + 3^n}{3^n + \pi^n + 2^n}$$

Exercice 7

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son terme général:

$$1 \quad u_n = \frac{4n^2 + 3}{2n^2 + 2}$$

$$2 \quad u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}$$

$$3 \quad u_n = \frac{2^n - 3^{n-1}}{3^{n+1} + 6^{n-1}}$$

$$4 \quad u_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{2}}$$

$$5 \quad u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}$$

$$6 \quad u_n = \left(1 - \frac{n+2}{n+3}\right)(n+4)$$

Exercice 8

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son terme général dans chacun des cas suivants:

$$1 \quad u_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$2 \quad u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \text{ avec: } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$3 \quad u_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n + (-1)^n}$$

$$4 \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 9

Déterminer les limites de (u_n) ; (v_n) et (w_n) telles que :

$$\triangleright u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{2n^2} + \frac{3}{3n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\triangleright v_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\triangleright w_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 10

Déterminer la limite de (u_n) dans chaque cas:

1 $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{\sin(n)}{n^2 + 1}$

2 $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{a^n + 2}{4a^n + 3}$ avec $a \in]1; +\infty[$

3 $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{n^2 + \sin(n)}{n^4}$

4 $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n + 2}$

Exercice 11

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 5^n - 3^n$

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; u_n > 3^n$

2 En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 12

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 3^n \geq 1 + 2n^2$

2 En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 3^n + n)$

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{n}{n^2 + \sqrt{1}} + \frac{n}{n^2 + \sqrt{2}} + \frac{n}{n^2 + \sqrt{3}} + \dots + \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}}$$

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{1}}$

2 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{1}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{n}}$; puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 14

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_n = 2 + \frac{\sin n}{n^2}$

1 Montrer que : $|a_n - 2| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

2 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Exercice 6

Calculons la limite de chaque suite définie par son terme général :

1 ▶ On a : $-1 < -\frac{2}{3} < 1$; d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$

▶ Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $\frac{2^{n-1}}{5^n} = \frac{2^n}{5^n} \times 2^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{1}{2}$

Puisque : $-1 < \frac{2}{5} < 1$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n} = 0$

▶ Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $\frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Puisque : $-1 < \frac{3}{4} < 1$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{4^n} = 0$

▶ Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $(-0,0007)^{n-5} = (-0,0007)^n \times (-0,0007)^{-5}$

Puisque : $-1 < -0,0007 < 1$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,0007)^n = 0$

d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,0007)^n \times \underbrace{(-0,0007)^{-5}}_{\text{c'est une constante}} = 0$

c'est une constante

ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,0007)^{n-5} = 0$

2 ▶ Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $\frac{3^n - 4}{3^n + 4} = \frac{3^n \left(1 - \frac{4}{3^n}\right)}{3^n \left(1 + \frac{4}{3^n}\right)} = \frac{1 - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

Puisque : $-1 < \frac{1}{3} < 1$; alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{1} = 1$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 4}{3^n + 4} = 1$

▶ Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $\frac{4^n - 6^n}{4^n + 6^n} = \frac{6^n \left(\frac{4^n}{6^n} - 1\right)}{6^n \left(\frac{4^n}{6^n} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$

Puisque : $-1 < \frac{2}{3} < 1$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n - 6^n}{4^n + 6^n} = -1$

3 Soit n de $\mathbb{N}$; on a :
$$\frac{5^n - 4^n}{3^n - 2^n} = \frac{5^n \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)}{3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

Puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ car : $-1 < \frac{4}{5} < 1$; et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car : $-1 < \frac{2}{3} < 1$

D'où :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty \text{ car : } \frac{5}{3} > 1$$

Alors :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = +\infty$$

Donc :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n - 4^n}{3^n - 2^n} = +\infty$$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a :

$$\frac{2^n - \pi^n + 3^n}{3^n + \pi^n + 2^n} = \frac{\pi^n \left(\frac{2^n}{\pi^n} - 1 + \frac{3^n}{\pi^n}\right)}{\pi^n \left(\frac{3^n}{\pi^n} + 1 + \frac{2^n}{\pi^n}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^n - 1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^n}{\left(\frac{3}{\pi}\right)^n + 1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^n}$$

Puisque : $-1 < \frac{3}{\pi} < 1$ et $-1 < \frac{2}{\pi} < 1$; alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n = 0$

D'où :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{\pi}\right)^n - 1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^n}{\left(\frac{3}{\pi}\right)^n + 1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^n} = -1$$

Donc :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - \pi^n + 3^n}{3^n + \pi^n + 2^n} = -1$$

Exercice 7

Déterminons la limite de (u_n) dans chaque cas :

1. $u_n = \frac{4n^2 + 3}{2n^2 + 2}$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a :
$$u_n = \frac{n^2 \left(4 + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{4 + \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{2}{n^2}}$$

Puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$; d'où :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{2} = 2$$

$$2 \quad u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}^*; \text{ on a : } u_n &= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{n(1-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}} = 1 - \sqrt{\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt{\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}} = 1 - 1 = 0$$

$$\text{ainsi : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

2ème méthode:

Soit n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \\ &= \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \frac{2}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \end{aligned}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n-1} = +\infty$$

$$\text{Alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = 0 \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$3 \quad u_n = \frac{2^n - 3^{n-1}}{3^{n+1} + 6^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}; \text{ on a : } u_n &= \frac{2^n - 3^{n-1}}{3^n \times 3 + \frac{6^n}{6}} = \frac{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{3} \right)}{6^n \left(\frac{3^n}{6^n} \times 3 + \frac{1}{6} \right)} \\ &= \left(\frac{3}{6} \right)^n \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{3}}{\left(\frac{3}{6} \right)^n \times 3 + \frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{2} \right)^n \times \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2} \right)^n \times 3 + \frac{1}{6}} \end{aligned}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0 \text{ (car : } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ et } -1 < \frac{2}{3} < 1)$$

$$\text{Alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \times \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2} \right)^n \times 3 + \frac{1}{6}} = 0 ; \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

4 $u_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{2}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_n = n^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$
 $= n^{\frac{2}{3}} \left(1 - n^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}\right)$
 $= n^{\frac{2}{3}} \left(1 - n^{-\frac{1}{6}}\right)$

Or : $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}^{*+}$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{2}{3}} = +\infty$

Et : $-\frac{1}{6} \in \mathbb{Q}^{*-}$; donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\frac{1}{6}} = 0$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

infos:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty$ si : $a \in \mathbb{Q}^{*+}$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0$ si : $a \in \mathbb{Q}^{*-}$

5 $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}$
 $= \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$
 $= \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{n - (n+1)}$
 $= -(\sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})$

Puisque : $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \end{cases}$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -(\sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = -\infty$

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

6 $u_n = \left(1 - \frac{n+2}{n+3}\right)(n+4)$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $u_n = \left(1 - \frac{n+2}{n+3}\right)(n+4)$
 $= \frac{n+3 - n - 2}{n+3} \cdot (n+4)$
 $= \frac{1}{n+3} \cdot (n+4)$
 $= \frac{n+4}{n+3}$
 $= \frac{n\left(1 + \frac{4}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{3}{n}\right)}$
 $= \frac{1 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$

Or: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$; d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 1$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Exercice 8

1 Déterminons la limite de la suite (u_n) avec: $u_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a: $u_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(Somme d'une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de 1^{er} terme 1 et dernier terme n).

Puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2 Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$

► Si : $a = b$ alors: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 0$ d'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

► Si: $a < b$ alors : $u_n = \frac{b^n \left(\left(\frac{a}{b} \right)^n - 1 \right)}{b^n \left(\left(\frac{a}{b} \right)^n + 1 \right)} = \frac{\left(\frac{a}{b} \right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b} \right)^n + 1}$

Puisque: $0 < \frac{a}{b} < 1$ car : $0 < a < b$

alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b} \right)^n = 0$; donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$

► Si: $a > b$ alors

On a: $u_n = \frac{a^n \left(1 - \left(\frac{b}{a} \right)^n \right)}{a^n \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^n \right)} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^n}$

Puisque : $0 < \frac{b}{a} < 1$ alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a} \right)^n = 0$ d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Conclusion:

$a = b$	$a < b$	$a > b$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

3 Calculons la limite de (u_n) avec: $u_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n + (-1)^n}$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ d'où : $n^2 - 1 \leq n^2 + (-1)^n \leq n^2 + 1$ (1)

Et on a: $n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$

Donc: $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+(-1)^n} \leq \frac{1}{n-1}$ (avec $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$) (2)

D'après (1) et (2) on a: $\frac{n^2-1}{n+1} \leq (n^2+(-1)^n) \times \frac{1}{n+(-1)^n} \leq \frac{n^2+1}{n-1}$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); \frac{n^2-1}{n+1} \leq \frac{n^2+(-1)^n}{n+(-1)^n} \leq \frac{n^2+1}{n-1}$

Puisque: $\frac{n^2-1}{n+1} = \frac{n(n-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{n-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$; alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = +\infty$

Alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

infos:

Si $v_n \leq u_n$ pour tout $n \geq n_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

4 Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ avec: $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$ (car: $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$)

u_n est la somme de $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

On a: alors $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Or: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$; (car: $-1 < \frac{1}{2} < 1$); d'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Exercice 9

1 Déterminons: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{2n^2} + \frac{3}{3n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$

Soit n de $\mathbb{N}^*$;

On a: $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{2n^2} + \frac{3}{3n^2} + \dots + \frac{n}{nn^2} = \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \dots + \frac{n}{n}\right)$
 $= \frac{1}{n^2} \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ fois } 1} = \frac{1}{n^2} \cdot (n \cdot 1) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

Puisque: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

2 Déterminons la limite de (v_n)

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a: $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+2} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+3} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

$\vdots$

$\vdots$

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

Additionnons membre à membre les double inégalités précédentes:

$$\underbrace{\frac{1}{n^2+n} + \frac{1}{n^2+n} + \dots + \frac{1}{n^2+n}}_{n \text{ fois}} \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+1} + \dots + \frac{1}{n^2+1}}_{n \text{ fois}}$$

$$\text{D'où: } n \times \frac{1}{n^2+n} \leq v_n \leq n \times \frac{1}{n^2+1}$$

$$\text{Donc: } \frac{n}{n^2+n} \leq v_n \leq \frac{n}{n^2+1}$$

$$\text{Or: } \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} \text{ et } \frac{n}{n^2+1} = \frac{n}{n(n + \frac{1}{n})} = \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$$

$$\text{puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} = 0$$

Par suite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ (d'après un critère de convergence).

3 Déterminons la limite (w_n):

Soit n de $\mathbb{N}^*$; et $k \in \{1; 2; \dots; n\}$

$$\text{On a: } 1 \leq k \leq n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

On remplace k par 1 ; 2 ;et n

$$\text{On aura: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \end{array} \right.$$

$$\text{Donc: } n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq w_n \leq n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} ; \text{ d'où: } \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq w_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\text{Or: } \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

$$\text{Et: } \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n^2})}} = \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

$$\text{Et puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1$$

$$\text{Alors: } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$$

(D'après un critère de convergence).

infos:

$$\text{Si: } \begin{cases} u_n \leq w_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \end{cases}$$

$$\text{Alors: } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$$

Exercice 10

1 Déterminer la limite de la suite (u_n) avec: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{\sin(n)}{n^2 + 1}$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ et $n^2 + 1 > 0$

$$\text{D'où: } (\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{-1}{n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$\text{Puisque: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty ; \text{ alors: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2 + 1} = 0$$

$$\text{d'où: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

2 Déterminons la limite de la suite (u_n) définie par: $n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{a^n + 2}{4a^n + 3}$

et $a > 1$

Soit n un entier naturel,

$$\text{On a: } u_n = \frac{a^n + 2}{4a^n + 3} = \frac{a^n(1 + \frac{2}{a^n})}{a^n(4 + \frac{3}{a^n})} = \frac{1 + \frac{2}{a^n}}{4 + \frac{3}{a^n}} ; \text{ puisque: } a > 1 ; \text{ alors:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$$

$$\text{D'où: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{a^n} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{a^n} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} (4 + \frac{3}{a^n}) = 4 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{a^n}) = 1$$

$$\text{Donc: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{2}{a^n}}{4 + \frac{3}{a^n}} \right) = \frac{1}{4} ; \text{ par suite: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{4}$$

3 Déterminons la limite de $(u_n)_{n \geq 1}$ avec: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{n^2 + \sin(n)}{n^4}$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a: $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc: $-1 + n^2 \leq n^2 + \sin(n) \leq 1 + n^2$

$$\text{d'où : } \frac{-1+n^2}{n^4} \leq \frac{n^2+\sin(n)}{n^4} \leq \frac{1+n^2}{n^4}$$

$$\text{ainsi : } -\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*$$

$$\text{Puisque : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0; \text{ d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} \right) = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} \right) = 0; \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

4 Déterminons la limite de la suite (u_n) :

$$\text{avec : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n+2}$$

$$\text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N} ; \text{ on a : } -1 \leq (-1)^n \leq 1 ; \text{ d'où : } -\sqrt{n} \leq (-1)^n \sqrt{n} \leq \sqrt{n}$$

$$\text{Donc : } 2n - \sqrt{n} \leq 2n + (-1)^n \sqrt{n} \leq 2n + \sqrt{n}$$

$$\text{Puisque : } n+2 > 0; \text{ alors : } \frac{2n - \sqrt{n}}{n+2} \leq \frac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n+2} \leq \frac{2n + \sqrt{n}}{n+2}$$

$$\text{Donc : } \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{2}{n}} \leq u_n \leq \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{2}{n}} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*$$

$$\text{Puisque : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 ; \text{ et : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right) = 1$$

$$\text{Et puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0; \text{ alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2.$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{2}{n}} = 2, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{2}{n}} = 2; \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

$$\text{car : } \begin{cases} n \in \mathbb{N}^* ; \frac{2n - \sqrt{n}}{n+2} \leq u_n \leq \frac{2n + \sqrt{n}}{n+2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n - \sqrt{n}}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + \sqrt{n}}{n+2} = 2 \end{cases}$$

Exercice 11

1 Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; u_n > 3$

► pour $n = 2$; on a: $3^2 = 9$ et $u_2 = 5^2 - 3^2 = 16$; d'où: $u_2 > 3^2$;

La propriété est vraie pour $n = 2$

► Soit n de $\mathbb{N}^* - \{1\}$.

Supposons: $u_n > 3^n$; et montrons que: $u_{n+1} > 3^{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} &= 5^{n+1} - 3^{n+1} \\ &= 5 \cdot 5^n - 3 \cdot 3^n \\ &= (2+3) \cdot 5^n - 3 \cdot 3^n \\ &= 2 \cdot 5^n + 3(5^n - 3^n) \\ &= 2 \cdot 5^n + 3u_n \end{aligned}$$

Puisque: $2 \cdot 5^n > 0$; alors: $u_{n+1} > 3 \cdot u_n$, car $u_n > 3 \Rightarrow 3u_n > 3^{n+1}$

ainsi: $u_{n+1} > 3^{n+1}$

D'où d'après le principe de récurrence on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); u_n > 3^n$

2 Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); u_n > 3^n$; et puisque: $3 > 1$ alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$.

donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 12

1 Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 3^n \geq 1 + 2n^2$

► pour $n = 1$; on a: $3^1 = 3$ et $1 + 2(1)^2 = 3$; d'où la propriété est vraie pour $n = 1$.

► Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$;

On suppose que: $3^n \geq 1 + 2n^2$; et on montre que: $3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)^2$

On a: $3^n \geq 1 + 2n^2$; d'où: $3 \times 3^n \geq 3 + 6n^2$

Ainsi: $3^{n+1} \geq 3 + 6n^2$

Montrons que: $3 + 6n^2 \geq 1 + 2(n+1)^2$

On étudie le signe de la différence:

$$\begin{aligned} 3 + 6n^2 - (1 + 2(n+1)^2) &= 3 + 6n^2 - (1 + 2n^2 + 4n + 2) \\ &= 4n^2 - 4n = 4n(n-1) \end{aligned}$$

Puisque: $n \in \mathbb{N}^*$; alors: $4n(n-1) \geq 0$ d'où: $3 + 6n^2 \geq 1 + 2(n+1)^2$

donc $3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)^2$

par conséquent: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 3^n \geq 1 + 2n^2$; d'après le principe de récurrence.

2 Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n + n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

infos:

Si: $A \geq B$

et pour montrer que: $A \geq C$

Il suffit de montrer que: $B \geq C$

On a: $2^n - 3^n + n = 3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 + \frac{n}{3^n} \right)$

Et puisque: $3^n \geq 1 + 2n^2$

Alors: $0 < \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{1 + 2n^2}$; d'où: $0 < \frac{n}{3^n} \leq \frac{n}{1 + 2n^2}$

et puisque: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1 + 2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \left(\frac{1}{n} + 2n \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + 2n} = 0$;

d'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3^n} = 0$

Et on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$; car: $-1 < \frac{2}{3} < 1$

d'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 + \frac{n}{3^n} \right) = -1$

Et on a: $3 > 1$; d'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$

donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 + \frac{n}{3^n} \right) = -\infty$; conclusion: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 3^n + n) = -\infty$

Exercice 13

1 Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{1}}$

► Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

pour tout k de $\mathbb{N}^*$ avec $1 \leq k \leq n$;

On a: $1 \leq k \leq n \Leftrightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$

$\Leftrightarrow n^2 + \sqrt{1} \leq n^2 + \sqrt{k} \leq n^2 + \sqrt{n}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2 + \sqrt{k}} \leq \frac{1}{n^2 + \sqrt{1}}$

d'où: $\frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{n}{n^2 + \sqrt{k}} \leq \frac{n}{n^2 + \sqrt{1}}$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$ avec $1 \leq k \leq n$

On remplace k par tous les valeurs de 1 à n on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{n}{n^2 + \sqrt{1}} \leq \frac{n}{n^2 + \sqrt{1}} \\ \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{n}{n^2 + \sqrt{2}} \leq \frac{n}{n^2 + \sqrt{1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{n}{n^2 + \sqrt{1}} \end{array} \right.$$

On additionne membre à membre les doubles inégalités précédentes, on aura:

$$n \times \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2 + \sqrt{1}} \times n$$

$$\text{d'où : } \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{1}} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

2 Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{1}}$

► Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a: $\frac{n^2}{n^2 + \sqrt{1}} = \frac{n^2}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}$

Puisque: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$ donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{1}} = 1$

► Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{n}}$

► Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a: $\frac{n^2}{n^2 + \sqrt{n}} = \frac{n^2}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}}$

puisque: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$; alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1$; d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{n}} = 1$

On a donc :
$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{1}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + \sqrt{1}} = 1 \end{cases}$$

(d'après un critère de convergence on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$)

Exercice 14

1 Montrons que: $|a_n - 2| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a: $|a_n - 2| = \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \frac{|\sin n|}{n^2}$

puisque: $|\sin n| \leq 1$ alors: $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); |a_n - 2| \leq \frac{1}{n^2}$

2 Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); |a_n - 2| \leq \frac{1}{n^2}$

et: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

d'après un critère de convergence: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$

infos:

$$\forall n \geq n_0; |u_n - \ell| \leq v_n$$

Et si: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

8 Suites de (u_n) type $u_{n+1} = f(u_n)$

Variations (cas où f est croissante).

▶ Si: $u_{n_0} < u_{n_0+1}$; alors par récurrence, on montre que: $(\forall n \geq n_0); u_n < u_{n+1}$; donc: $(u_n)_{n \in I}$ est croissante.

▶ Si: $u_{n_0} > u_{n_0+1}$; alors par récurrence on montre que: $(\forall n \geq n_0); u_n > u_{n+1}$; donc: $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante.

Limite:

si: $\left\{ \begin{array}{l} \text{▶ } u_{n+1} = f(u_n); n \geq n_0 \\ \text{▶ } u_{n_0} \in I \\ \text{▶ } f \text{ est continue sur l'intervalle } I \\ \text{▶ } f(I) \subset I \\ \text{▶ } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ est convergente} \end{array} \right.$

Alors: La limite de $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une solution de l'équation $f(x) = x$

Exercices

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie par: $\begin{cases} u_0 = -\frac{5}{4} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2 \end{cases}$

- 1 Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); -2 < u_n < -1$.
- 2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- 3 En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 4 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- 1 Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 2$.
- 2 Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 2.
- 3 En déduire que la suite (u_n) admet une limite ℓ et que: $\ell \geq 2$
- 4 Calculer la limite de (u_n) .

Exercice 17

1 On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par:

$$f(x) = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \right)^2$$

- Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 4]$.
- Montrer que: $f([0; 4]) \subset [0; 4]$

2 On considère la suite $(u_n)_n$ définie par: $u_0 = 1$
et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 4$
- Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante, puis déduire qu'elle est convergente.

3 Soit $(v_n)_n$ la suite définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}$

- Montrer que: $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- En déduire v_n ; puis u_n en fonction de n .
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 18

On considère la suite (u_n) définie par: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = u_n + 1 - \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$

- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$
- Montrer que (u_n) est une suite décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.

2 Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{1 + x^2}$$

- Montrer que f est continue sur $[0; 1]$ et que: $f([0; 1]) \subset [0; 1]$
- Déterminer la limite la suite de (u_n) .

Solutions

Exercice 15

1 Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -2 < u_n < -1$

► Pour $n = 0$; on a: $u_0 = -\frac{5}{4}$ et $-2 < -\frac{5}{4} < -1$; donc: $-2 < u_0 < -1$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose que: $-2 < u_n < -1$;

et on montre que: $-2 < u_{n+1} < -1$

$$\begin{aligned} \text{On a : } -2 < u_n < -1 &\Rightarrow 0 < u_n + 2 < 1 \\ &\Rightarrow 0 < (u_n + 2)^2 < 1 \\ &\Rightarrow -2 < (u_n + 2)^2 - 2 < -2 + 1 \\ &\Rightarrow -2 < u_{n+1} < -1 \end{aligned}$$

Donc d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -2 < u_n < -1$

2 Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \text{ un élément de } \mathbb{N} ; \text{ on a : } u_{n+1} - u_n &= (u_n + 2)^2 - (u_n + 2) \\ &= (u_n + 2)(u_n + 2 - 1) \\ &= (u_n + 2)(u_n + 1) \end{aligned}$$

Puisque: $-2 < u_n < -1$ alors: $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 1 < 0$; donc:

$$(u_n + 2)(u_n + 1) < 0$$

$$\text{d'où: } u_{n+1} - u_n < 0$$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$; conclusion (u_n) est une suite décroissante.

3 Déduisons que (u_n) est convergente.

On a la suite (u_n) est décroissante et minorée par -2; donc elle est convergente.

4 Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Puisque la suite (u_n) est décroissante alors: $u_n \leq u_0$ pour tout n de $\mathbb{N}$; donc $u_n \leq -\frac{5}{4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

On considère la fonction f définie sur $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ par : $f(x) = (x + 2)^2 - 2$

On a f est continue sur l'intervalle $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ (car u est la restriction d'une fonction continue).

Tt de plus $f\left(\left[-2; -\frac{5}{4}\right]\right) \subset \left[-2; -\frac{5}{4}\right]$; (vérifier ce résultat)

on a : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et $u_0 \in \left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ et (u_n) est convergente.

Donc la limite de (u_n) vérifie l'équation: $f(x) = x$ dans $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$

Soit x de $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$, on a : $f(x) = x \Leftrightarrow (x + 2)^2 - 2 = x$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$

Exercice 16

1 Montrons par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 2; c'est-à-dire :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 2$$

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 4$ et : $4 \geq 2$ donc : $u_n \geq 2$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On suppose que : $u_n \geq 2$ et on montre que : $u_{n+1} \geq 2$

On a : $u_n \geq 2$; alors : $3u_n \geq 6$; donc : $3u_n - 2 \geq 4$

d'où : $\sqrt{3u_n - 2} \geq 2$; par conséquent : $u_{n+1} \geq 2$

D'où d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 2$;

donc (u_n) est minorée par 2.

2 Montrons que la suite (u_n) est décroissante ;

c'est-à-dire, montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$ (par récurrence)

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 4$ et $u_1 = \sqrt{3u_0 - 2} = \sqrt{10}$; d'où : $u_1 < u_0$

Soit n de $\mathbb{N}$; supposons que : $u_{n+1} < u_n$ et on montre que : $u_{n+2} < u_{n+1}$

On a : $u_{n+1} < u_n \Rightarrow 3u_{n+1} < 3u_n$

$$\Rightarrow 0 \leq 3u_{n+1} - 2 < 3u_n - 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3u_{n+1} - 2} < \sqrt{3u_n - 2}$$

(car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3u_n - 2 \geq 0$)

(Et on a : $\sqrt{3u_n - 2} = u_{n+1}$ et $\sqrt{3u_{n+1} - 2} = u_{n+2}$)

Donc : $u_{n+1} < u_n \Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$; pour tout n de $\mathbb{N}$

D'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

3 Dédudisons que la suite (u_n) admet une limite ℓ et que $\ell \geq 2$

D'après la question 1) on a : (u_n) est décroissante et minorée par 2; donc elle est convergente.

Or : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 2$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} 2$; d'où $\ell \geq 2$

4 Déterminons la limite de (u_n) .

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [2; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{3x-2}$

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$; et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 2$

- ▶ (u_n) est convergente.
- ▶ f est continue sur l'intervalle I ;
- ▶ $f(I) \subset I$ (vérifier ce résultat)
- ▶ $u_0 \in I$

Donc la limite de la suite (u_n) vérifie l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle I .

Réolvons l'équation : $f(x) = x$ sur I :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = x \\ &\Leftrightarrow 3x-2 = x^2 \quad (x \geq 2 > 0) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2 \end{aligned}$$

Donc : $\ell = 2$ ou $\ell = 1$; comme $\ell \geq 2$ alors : $\ell = 2$; donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Exercice 17

1 a. Étudions les variations de f sur l'intervalle $[0; 4]$:

La fonction f est définie sur $[0; 4]$ et dérivable sur $]0; 4[$ (vérifier ce résultat)

$$\text{On a : } (\forall x \in]0; 4[) ; f'(x) = 2 \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \right) \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } \left(\frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \right)' &= \frac{(\sqrt{x})'(2+\sqrt{x}) - \sqrt{x}(2+\sqrt{x})'}{(2+\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\sqrt{x}) - \sqrt{x} \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{(2+\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2} (2+\sqrt{x} - \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in]0; 4[) ; f'(x) = 2 \times 4 \times \frac{1}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2} \times \frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = \frac{32}{(2+\sqrt{x})^2}$$

Et puisque: $2 + \sqrt{x} > 0$ pour tout x de $]0; 4[$; on a: $f'(x) > 0$ pour tout x de $]0; 4[$; donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 4]$.

b. Montrons que: $f([0; 4]) \subset [0; 4]$

La fonction f est continue sur $[0; 4]$; comme carré d'une fonction continue

Et on a: f est strictement croissante sur $[0; 4]$

Donc: $f([0; 4]) = [f(0); f(4)] = [0; 4]$; d'où: $f([0; 4]) \subset [0; 4]$

2 a. Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 4$

Pour $n = 0$; on a: $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 4$ donc: $0 \leq u_0 \leq 4$

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que $0 \leq u_n \leq 4$; et on montre que: $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

On a: $0 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(4)$ (f est croissante sur $[0; 4]$)
 $\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4$

D'après le principe de récurrence on a: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 4$

b. Montrons par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante, c'est-à-dire: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < u_{n+1}$

- Pour $n = 0$; on a: $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$;

on a donc: $u_0 < u_1$

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que: $u_n < u_{n+1}$; et on montre que: $u_{n+1} < u_{n+2}$

On a: $u_n < u_{n+1}$ et $u_n \in [0; 4]$ et $u_{n+1} \in [0; 4]$

et la fonction f est strictement croissante sur $[0; 4]$; donc: $f(u_n) < f(u_{n+1})$

d'où: $u_{n+1} < u_{n+2}$

D'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < u_{n+1}$

donc la suite (u_n) est strictement croissante.

➤ Dédudons que (u_n) est convergente :

On a: la suite (u_n) est croissante et majorée par 4; donc elle est convergente.

3 a. Montrons que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}; \text{ on a: } v_{n+1} &= 1 - \frac{2}{\sqrt{u_{n+1}}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{f(u_n)}} = 1 - \frac{2 + \sqrt{u_n}}{2\sqrt{u_n}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{u_n}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{u_n}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}} \right) = \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

D'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_0}} = 1 - 2 = -1$

b. Déterminons v_n en fonction de n :

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: $v_n = q^n v_0$; donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

► **Exprimons u_n en fonction de n :**

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a: $v_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}$; d'où: $\frac{2}{\sqrt{u_n}} = 1 - v_n$

Donc: $\sqrt{u_n} = \frac{2}{1 - v_n}$; d'où: $u_n = \left(\frac{2}{1 - v_n}\right)^2$;

conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \left(\frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^2$

c. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

Puisque: $-1 < \frac{1}{2} < 1$; alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$; d'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2^2$

donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

Remarque:

A partir de la question 2), on peut déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ d'une autre façon :

On a la suite (u_n) vérifie :

► $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in [0; 4]$

► f continue sur $[0; 4]$

► $f([0; 4]) \subset [0; 4]$

► (u_n) est convergente

donc la limite de (u_n) vérifie $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0; 4]$.

Exercice 18

1 a. Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$

► Pour $n = 0$; on a: $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$; d'où: $0 < u_0 < 1$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$;

on suppose que: $0 < u_n < 1$; et on montre que $0 < u_{n+1} < 1$

$$\text{On a: } u_{n+1} = 1 + u_n - \sqrt{1 + u_n^2} = \frac{(1 + u_n)^2 - (1 + u_n^2)}{1 + u_n + \sqrt{1 + u_n^2}} = \frac{2u_n}{1 + u_n + \sqrt{1 + u_n^2}}$$

De plus on a : $u_n > 0$; donc : $\frac{2u_n}{1+u_n+\sqrt{1+u_n^2}} > 0$; d'où : $u_{n+1} > 0$ (1)

Montrons que : $u_{n+1} < 1$

On a :
$$u_{n+1} - 1 = u_n - \sqrt{1+u_n^2} = \frac{-1}{u_n + \sqrt{1+u_n^2}}$$

On a : $u_n > 0$ d'où : $u_{n+1} - 1 < 0$ donc : $u_{n+1} < 1$ (2)

D'après (1) et (2) on a : $0 < u_{n+1} < 1$;

d'après le principe de récurrence : $0 < u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

b. Montrons que (u_n) est décroissante

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a :
$$u_{n+1} - u_n = 1 - \sqrt{1+u_n^2} = \frac{1 - (1+u_n^2)}{1 + \sqrt{1+u_n^2}}$$
$$= \frac{-u_n^2}{1 + \sqrt{1+u_n^2}}$$

Or : $u_n^2 > 0$ et $1 + \sqrt{1+u_n^2} > 0$; d'où : $u_{n+1} - u_n < 0$;

donc pour tout n de $\mathbb{N}$; $u_{n+1} < u_n$

Donc : (u_n) est une suite décroissante.

► Puisque (u_n) est décroissante et minorée par le nombre 0, elle est donc convergente.

2 a. Montrons que f est continue sur $[0; 1]$

Les fonctions : $u: x \mapsto x + 1$ et $v: x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sont continues sur l'intervalle $[0; 1]$; donc : f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$ (comme somme de deux fonctions continues sur $[0; 1]$).

► Montrons que : $f([0; 1]) \subset [0; 1]$

Soit x de $[0; 1]$.

On a :
$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2 - x^2}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$$

donc :
$$f'(x) = \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$$
 pour tout x de $[0; 1]$.

On a : $f'(x) > 0$ pour tout x de $[0; 1]$; alors f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

D'où : $f([0; 1]) = [f(0); f(1)]$; or $f(0) = 0$ et $f(1) = 2 - \sqrt{2}$

et : $2 - \sqrt{2} < 1$ donc : $f([0; 1]) \subset [0; 1]$

b. Déterminons la limite de (u_n)

On a : $\triangleright (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$ $\triangleright f$ est une fonction continue sur $[0; 1]$
 $\triangleright u_0 \in [0; 1]$ $\triangleright (u_n)$ est convergente $\triangleright f([0; 1]) \subset [0; 1]$

Donc la limite de (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0; 1]$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in [0; 1] ; \text{ on a : } f(x) = x &\Leftrightarrow x + 1 - \sqrt{1 + x^2} = x \\ &\Leftrightarrow 1 = \sqrt{1 + x^2} \\ &\Leftrightarrow 1 = 1 + x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercices de synthèse

Exercices

Exercice 19

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1 Montrer par récurrence que : $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

2 On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a. Montrer que : $v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$; puis montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 1.

b. Écrire v_n en fonction de n ; puis en déduire que $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 20

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 13$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7$; pour tout n de $\mathbb{N}$

1 Montrer par récurrence que : $u_n < 14$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = 14 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$; puis écrire v_n en fonction de n .
- En déduire que : $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$; puis calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 21

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}$

- Calculer u_1 et u_2 .
- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \neq 0$.
- On pose : $u_n \times v_n = u_n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - Montrer que la suite (v_n) est arithmétique, en déterminant sa raison et son premier terme.
 - Écrire v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 22

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{7u_n - 25}{u_n - 3}$

- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \neq 5$
- On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
 - Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
 - Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- Calculer : $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ en fonction de n (avec $\sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$)
 - On pose : $P_n = 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times \dots \times 2^{v_n}$ déterminer P_n en fonction de n .

Exercice 23

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + u_n - 2}{u_n^2} \end{cases}$

- 1 Montrer que la suite (u_n) est minorée par 2.
- 2 a. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$
 b. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$
 c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 24

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_0 = 0$

et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

- 1 Montrer que la suite (u_n) est minorée par 0 et majorée par 4.
- 2 Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- 3 a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$
 b. En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$
 c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 25

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_0 = 15$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{7}{5}u_n - 5$

- 1 Calculer u_1 et u_2 .
- 2 Soit (v_n) la suite définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = u_{n+1} - u_n$
 Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison q que l'on déterminera, puis déterminer v_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.
- 3 On pose: pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$
 Montrer que: $S_n = u_{n+1} - u_0$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis déduire u_n en fonction de n .
- 4 Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 26

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par:
$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{u_n}{3(1 - 2u_n)} \end{cases}$$

- 1 Calculer u_1 et u_2 .
- 2 Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 0$.

3 a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{3}$.

b. En déduire que la suite (u_n) est croissante et convergente.

4 a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|u_n|$.

b. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 27

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$

1 Montrer que : $f([2;3]) \subset [2;3]$

2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} \end{cases}$

a. Montrer que la suite (u_n) est minorée par le nombre 2.

b. Étudier les variations de (u_n) ; en déduire qu'elle est convergente.

3 Calculer la limite de (u_n) .

Exercice 28

On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - u_n}$

1 Calculer u_2 et u_3 .

2 Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \frac{1}{u_n}$.

a. Calculer v_1 .

b. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} = 3v_n - 1$.

3 On considère la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; w_n = v_n - \frac{1}{2}$

a. Déterminer w_n en fonction de n , puis déduire u_n en fonction de n .

b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 29

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 7$

et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{u_n + 8\sqrt{2 + u_n}}{9}$

1 a. Calculer u_1 et u_2 .

b. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 2$.

- 2 Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
- 3 Pour tout n de $\mathbb{N}$; on pose: $v_n = \sqrt{2 + u_n} - 2$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
 - b. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .
 - c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 30

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$.

- 1 a. Étudier les variations de f .
 - b. Déterminer l'image de l'intervalle $[0; 1]$ par f .
- 2 On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
 - a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 1$ puis $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} < u_n$.
 - b. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$; en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
 - c. Montrer que la suite (u_n) est convergente puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 31

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}; u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n} \right) \end{cases}$

- 1 Calculer u_2 et u_3 .
- 2 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$
- 3 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
- 4 Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, puis en déduire v_n et u_n en fonction de n .
 - b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 32

Soit (u_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

- 1 a. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante.
- b. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2 ; puis en déduire qu'elle est convergente.
- c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2 On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.

- a. Montrer que : (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison et son premier terme.
- b. Déterminer u_n en fonction de n .
- c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 33

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+2} = \frac{7}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n.$$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2u_n$ et $w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$.

- 1 a. Calculer v_1 et w_1 .
- b. Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ sont deux suites géométriques de raisons respectivement $\frac{1}{3}$ et 2.
- c. Calculer u_n en fonction de n ; puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 34

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$; $u_1 = a$ et pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = bu_{n+1} - (b-1)u_n \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R} (b \neq 0 ; b \neq 1 \text{ et } b \neq 2)$$

1 Calculer u_2 .

2 On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique puis déterminer v_n en fonction de n ; b et a pour tout n de $\mathbb{N}$.

- 3 On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_n = u_{n+1} - (b-1)u_n$
 Montrer que (w_n) est une suite constante puis calculer w_n en fonction de n .
 4 Dédire u_n en fonction de n .
 5 Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans le cas où $0 < b < 2$ et $b \neq 1$.

Exercice 35

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1}$$

- 1 a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$.
 b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 c. Dédire que (u_n) est convergente.
 2 a. Montrer que : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 b. Dédire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
 c. Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 3 On pose pour tout n de $\mathbb{N}$; $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$.

Montrer que (v_n) est convergente en déterminant sa limite.

Exercice 36

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $u_1 = \frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$\text{et } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n-1}{2n(n+1)}$$

- 1 Vérifier que $u_1 > u_2 > u_3$
 2 a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^* - \{1\}$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{3-n}{2n(n-1)(n+1)}$$

 b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 3 On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$; $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.
 a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 b. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .
 c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 19

1 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n > 2$

Pour $n = 1$, on a : $u_1 = 5$ et $5 > 2$ d'où : $u_1 > 2$

D'où la propriété est vraie pour $n = 1$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on suppose que $u_n > 2$ et on montre que $u_{n+1} > 2$

$$\begin{aligned} \text{1ère méthode : on a } u_{n+1} - 2 &= \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2 \\ &= \frac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1 + u_n} \\ &= \frac{3u_n - 6}{1 + u_n} \\ &= 3 \frac{u_n - 2}{1 + u_n} \end{aligned}$$

Or $u_n > 2$ alors $u_n - 2 > 0$ et $u_n + 1 > 0$; donc : $u_{n+1} - 2 > 0$

La propriété est vraie pour $n + 1$.

D'où d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 2$

2ème méthode :

$$\text{on a : } u_{n+1} = \frac{5(u_n + 1) - 5 - 4}{u_n + 1} = 5 - \frac{9}{u_n + 1}$$

Alors : $u_n > 2 \Rightarrow u_n + 1 > 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n + 1} < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-9}{u_n + 1} > \frac{-9}{3}$$

$$\Rightarrow 5 - \frac{9}{u_n + 1} > 5 - 3$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 2$$

Donc d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n > 2$

2 a. ▶ Montrons que $v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$ **pour tout** n **de** $\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ on a : } v_{n+1} &= \frac{3}{u_{n+1} - 2} = \frac{3}{\frac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2} = \frac{3}{\frac{5u_n - 4 - 2(1 + u_n)}{1 + u_n}} \\ &= \frac{3(1 + u_n)}{5u_n - 4 - 2 - 2u_n} \\ &= \frac{3(1 + u_n)}{3u_n - 6} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2} \end{aligned}$$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1+u_n}{u_n-2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

► Montrons que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}^* ; \text{ on a : } v_{n+1} - v_n &= \frac{1+u_n}{u_n-2} - \frac{3}{u_n-2} = \frac{1+u_n-3}{u_n-2} \\ &= \frac{u_n-2}{u_n-2} = 1 \end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} - v_n = 1$

D'où la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_1 = 1$

b. Déterminons v_n en fonction de n .

On a (v_n) est suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_1 = 1$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = v_1 + (n-1) \cdot r$

c'est-à-dire : $v_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = n$

► Déduisons que $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$\text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}^* ; \text{ on a : } v_n = \frac{3}{u_n-2} \Rightarrow u_n - 2 = \frac{3}{v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{v_n} + 2$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{n} + 2$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = 2 + \frac{3}{n}$

c. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0 ; \text{ d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2$$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Solution 20

1 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 14$

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 13$ et $13 < 14$; d'où $u_0 < 14$

la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n de $\mathbb{N}$; supposons que $u_n < 14$ et montrons que $u_{n+1} < 14$

Méthode 1:

$$\begin{aligned} \text{on a: } u_{n+1} - 14 &= \frac{1}{2}u_n + 7 - 14 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 7 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 14) \end{aligned}$$

Or : $u_n < 14$, d'où : $u_n - 14 < 0$

ainsi : $\frac{1}{2}(u_n - 14) < 0$

donc : $u_{n+1} - 14 < 0$

La propriété est vraie pour $n + 1$

Donc d'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 14$

2 a. Montrons que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} = 14 - u_{n+1}$

$$= 14 - \left(\frac{1}{2}u_n + 7\right)$$

$$= 7 - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(14 - u_n) = \frac{1}{2}v_n$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$

► Déterminons v_n en fonction de n

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a : $v_n = q^n v_0$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (14 - u_0)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (14 - 13) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b. Déduisons que $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 14 - u_n$; donc : $u_n = 14 - v_n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

► Déterminons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car : $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Méthode 2:

$$\begin{aligned} \text{on a: } u_n < 14 &\Rightarrow \frac{1}{2}u_n < \frac{14}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}u_n + 7 < 7 + 7 \\ &\Rightarrow u_{n+1} < 14 \end{aligned}$$

d'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (14 - (\frac{1}{2})^n) = 14$

donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 14$

Exercice 21

1 Calculons u_1 et u_2 :

On a: $u_1 = \frac{u_0}{2u_0 + 1} = \frac{2}{2 \times 2 + 1} = \frac{2}{5}$

Et on a: $u_2 = \frac{u_1}{2u_1 + 1} = \frac{\frac{2}{5}}{2 \times \frac{2}{5} + 1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4+5}{5}} = \frac{2}{9}$

2 Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \neq 0$

Pour: $n = 0$; on a: $u_0 \neq 0$; car: $u_0 = 2$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose que $u_n \neq 0$ et on montre que $u_{n+1} \neq 0$

On a: $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}$ et $u_n \neq 0$; d'où: $u_{n+1} \neq 0$

La propriété est vraie pour $n + 1$

D'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \neq 0$

3 a. Montrons que la suite (v_n) est arithmétique:

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: $(u_n \times v_n = u_n + 1; u_n \neq 0) \Rightarrow v_n = \frac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n}$

d'où: $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{u_n}{2u_n + 1}} = 1 + \frac{2u_n + 1}{u_n}$

donc: $v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{2u_n + 1}{u_n} - 1 - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n + 1 - 1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2$

par suite: $v_{n+1} = 2 + v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

par conséquent: (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier

terme $v_0 = 1 + \frac{1}{u_0} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b. Déterminons v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n :

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 + (n - 0)r = \frac{3}{2} + n \times 2 = \frac{3}{2} + 2n$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 2n + \frac{3}{2}$

d'autre part on a : $u_n v_n = u_n + 1 \Rightarrow u_n(v_n - 1) = 1$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n - 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\frac{3}{2} + 2n - 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n}$

De plus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} + 2n = +\infty$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 22

1 Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \neq 5$

On utilise le raisonnement par récurrence :

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 2$ et $2 \neq 5$ d'où $u_0 \neq 5$

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que $u_n \neq 5$ c'est-à-dire $u_n - 5 \neq 0$

Et montrons que : $u_{n+1} - 5 \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} - 5 &= \frac{7u_n - 25}{u_n - 3} - 5 \\ &= \frac{7u_n - 25 - 5(u_n - 3)}{u_n - 3} \\ &= \frac{7u_n - 25 - 5u_n + 15}{u_n - 3} \\ &= \frac{2u_n - 10}{u_n - 3} \\ &= \frac{2(u_n - 5)}{u_n - 3} \end{aligned}$$

Or $u_n - 5 \neq 0$ d'où : $u_{n+1} - 5 \neq 0$

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \neq 5$

Autre méthode:

On a : $u_0 \neq 5$

Soit n de $\mathbb{N}$; montrons que : $u_n \neq 5 \Rightarrow u_{n+1} \neq 5$

On utilise le raisonnement par contraposée :

C'est-à-dire : $u_{n+1} = 5 \Rightarrow u_n = 5$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } u_{n+1} = 5 &\Rightarrow \frac{7u_n - 25}{u_n - 3} = 5 \\
 &\Rightarrow 7u_n - 25 = 5u_n - 15 \\
 &\Rightarrow 7u_n - 5u_n = 25 - 15 \\
 &\Rightarrow 2u_n = 10 \\
 &\Rightarrow u_n = 5
 \end{aligned}$$

infos:

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
(contraposée)

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \neq 5 \Rightarrow u_{n+1} \neq 5$

D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \neq 5$

2 a. Montrons que (v_n) est une suite arithmétique :

Soit n de $\mathbb{N}$;

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 5} \\
 &= \frac{1}{\frac{7u_n - 25}{u_n - 3} - 5} = \frac{1}{\frac{7u_n - 25 - 5(u_n - 3)}{u_n - 3}} \\
 &= \frac{u_n - 3}{7u_n - 25 - 5u_n + 15} = \frac{u_n - 3}{2u_n - 10} = \frac{u_n - 3}{2(u_n - 5)}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 3}{2(u_n - 5)} - \frac{1}{u_n - 5} = \frac{u_n - 3 - 2}{2(u_n - 5)} = \frac{u_n - 5}{2(u_n - 5)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}$$

Par conséquent : (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 5} = -\frac{1}{3}$

b. Déterminons v_n et u_n en fonction de n

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $v_n = v_0 + nr$

$$\text{Alors : } v_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n$$

► Déterminons u_n en fonction de n ;

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{1}{u_n - 5}$$

$$\text{Alors : } \frac{1}{v_n} = u_n - 5, \text{ d'où : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1}{v_n} + 5$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n &= \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n} + 5 = \frac{1}{\frac{-2 + 3n}{6}} + 5 \\
 &= \frac{6}{3n - 2} + 5 = \frac{6 + 5(3n - 2)}{3n - 2} = \frac{15n - 4}{3n - 2}
 \end{aligned}$$

c. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:



On a : $u_n = \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n} + 5$, pour tout n de $\mathbb{N}$;

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n = +\infty$; d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$

a. Déterminons S_n en fonction de n :

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : (v_n) est une suite arithmétique, d'où :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= (n+1) \frac{v_0 + v_n}{2} \\ &= (n+1) \frac{-\frac{1}{3} + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n)}{2} \\ &= (n+1) \times \frac{-\frac{2}{3} + \frac{n}{2}}{2} = \frac{(n+1)(-4+3n)}{12} \end{aligned}$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \frac{(n+1)(3n-4)}{12}$

b. Déterminons P_n en fonction de n :

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N} ; \text{ on a : } P_n &= 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times \dots \times 2^{v_n} \\ &= 2^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = 2^{S_n} \\ &= 2^{\frac{(n+1)(3n-4)}{12}} \end{aligned}$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; P_n = 2^{\frac{(n+1)(3n-4)}{12}}$

Exercice 23

1 Montrons que (u_n) est minorée par 2.

C'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 2$

On utilise le raisonnement par récurrence :

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 3$ et $3 \geq 2$ d'où : $u_0 \geq 2$

D'où la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose que : $u_n \geq 2$ et on montre : $u_{n+1} \geq 2$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} - 2 &= \frac{2u_n^2 + u_n - 2}{u_n^2} - 2 = \frac{2u_n^2 + u_n - 2 - 2u_n^2}{u_n^2} = \frac{u_n - 2}{u_n^2} \\ &= \frac{1}{u_n^2}(u_n - 2) \end{aligned}$$

Or : $u_n - 2 \geq 0$ car $u_n \geq 2$ et $\frac{1}{u_n^2} > 0$ d'où $u_{n+1} - 2 \geq 0$

donc : $u_{n+1} \geq 2$; la propriété est vraie pour $n + 1$.

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 2$

2 a. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$

Soit n de $\mathbb{N}$;

$$\text{On a: } u_{n+1} - 2 = \frac{1}{u_n^2}(u_n - 2)$$

$$\text{Or: } u_n \geq 2 \Rightarrow u_n^2 \geq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n^2}(u_n - 2) \leq \frac{1}{4}(u_n - 2) \quad (u_n - 2 \geq 0)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$$

b. Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Soit n de $\mathbb{N}^*$;

D'après les deux questions précédentes :

$$\triangleright \text{ on a : } u_n - 2 \geq 0 \text{ et } u_{n+1} - 2 \geq 0$$

$$\triangleright \text{ et } u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$$

$$\text{On remplace } n \text{ par } 0 \text{ on obtient: } 0 \leq u_1 - 2 \leq \frac{1}{4}(u_0 - 2)$$

$$\text{on remplace } n \text{ par } 1 \text{ on obtient: } 0 \leq u_2 - 2 \leq \frac{1}{4}(u_1 - 2)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\text{On remplace } n \text{ par } n - 1 \text{ on obtient: } 0 \leq u_n - 2 \leq \frac{1}{4}(u_{n-1} - 2)$$

En multipliant membre à membre les doubles inégalités précédentes et après simplification on obtient : $0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 - 2)$

$$\text{C'est-à-dire : } 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (3 - 2)$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Méthode 2: On pourra faire un raisonnement par récurrence

c. Déterminons $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$:

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{Or : } -1 < \frac{1}{4} < 1 \text{ d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 2) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 2) = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

► Méthode 2:

$$\text{On a : } 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \text{ (d'après un critère de convergence)}$$

infos:

$$\text{Si : } \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| \leq v_n$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$\text{alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Exercice 24

1 Montrons que : (u_n) est minorée par 0 et majorée par 4.

$$\text{C'est-à-dire : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 4$$

On utilise le raisonnement par récurrence :

$$\text{Pour } n = 0 ; \text{ on a : } u_0 = 0 \text{ et } 0 \leq 0 \leq 4 ; \text{ d'où : } 0 \leq u_0 \leq 4$$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose : $0 \leq u_n \leq 4$ et on montre que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 4$$

$$\text{on a : } 0 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 3u_n \leq 12$$

$$\Rightarrow 4 \leq 3u_n + 4 \leq 16$$

$$\Rightarrow 2 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4$$

$$\Rightarrow 2 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4 \quad (\text{car } (0 \leq 2))$$

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 4$

2 Montrons que (u_n) est croissante :

Soit n de $\mathbb{N}$;

$$\text{On a : } u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} = \frac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

Puisque: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \sqrt{3u_n + 4} + u_n > 0$

Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $-u_n^2 + 3u_n + 4$

Étudions le signe du trinôme $-X^2 + 3X + 4$

Les deux solutions de l'équation $-X^2 + 3X + 4 = 0$ sont: $X_1 = -1$ et $X_2 = 4$

Et le tableau de signe du trinôme $-X^2 + 3X + 4$ est le suivant:

X	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$-X^2 + 3X + 4$	$-$	0	$+$	0	$-$

Puisque: $0 \leq u_n \leq 4$; on a: $-u_n^2 + 3u_n + 4 \geq 0$

car: $(\forall X \in [0; 4]) ; -X^2 + 3X + 4 \geq 0$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \geq 0$; c'est-à-dire la suite (u_n) est croissante.

3 a. Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } 4 - u_{n+1} &= 4 - \sqrt{3u_n + 4} = \frac{16 - (3u_n + 4)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{12 - 3u_n}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \\ &= \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}(4 - u_n) \end{aligned}$$

Encadrons: $\frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$:

$$\text{On a : } 0 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 3u_n \leq 12$$

$$\Rightarrow 4 \leq 3u_n + 4 \leq 16$$

$$\Rightarrow 2 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4$$

$$\Rightarrow 6 \leq 4 + \sqrt{3u_n + 4} \leq 8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \leq \frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}(4 - u_n) \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) ; (4 - u_n \geq 0)$$

$$\Rightarrow 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

b. Dédudisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

On remplace n par 0 ; on aura : $0 \leq 4 - u_1 \leq \frac{1}{2}(4 - u_0)$

On remplace n par 1 ; on aura : $0 \leq 4 - u_2 \leq \frac{1}{2}(4 - u_1)$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

On remplace n par $(n - 1)$; on aura : $0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2}(4 - u_{n-1})$

En multipliant membre à membre les inégalités doubles et après simplification

on obtient : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$

C'est-à-dire : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - 0)$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 4$

2ème méthode : on pourra faire un raisonnement par récurrence.

c. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 4$

Et puisque : $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 4 = 0 \quad \left(\text{car: } -1 < \frac{1}{2} < 1\right) \end{cases}$

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) = 0$ (d'après un critère de convergence)

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

Exercice 25

1 Calcul de u_1 et u_2

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{7}{5}u_n - 5$

► On pose $n = 0$; on a : $u_1 = \frac{7}{5}u_0 - 5 = \frac{7}{5} \times 15 - 5 = 21 - 5 = 16$

d'où : $u_1 = 16$

► on pose $n = 1$; on a : $u_2 = \frac{7}{5}u_1 - 5 = \frac{7}{5} \times 16 - 5 = \frac{87}{5}$

d'où : $u_2 = \frac{87}{5}$

2 Montrons que la suite (v_n) est géométrique.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

$$= \left(\frac{7}{5}u_{n+1} - 5\right) - \left(\frac{7}{5}u_n - 5\right)$$

$$= \frac{7}{5}(u_{n+1} - u_n) - 5 + 5$$

$$= \frac{7}{5}v_n$$

Donc : la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{7}{5}$ et de premier terme:
 $v_0 = u_1 - u_0 = 16 - 15 = 1$

► Déterminons v_n en fonction de n

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = v_0 \times q^{n-0}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{7}{5}\right)^n$

3 ► Déterminons S_n en fonction de n

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \sum_{k=0}^n v_k$

Montrons que : $S_n = u_{n+1} - u_0$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = u_{n+1} - u_n$

pour $n = 0$; on a : $v_0 = u_1 - u_0$

pour $n = 1$; on a : $v_1 = u_2 - u_1$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

pour n ; on a : $v_n = u_{n+1} - u_n$

Additionnons membre à membre les égalités précédentes,

On obtient : $v_0 + v_1 + \dots + v_n = u_{n+1} - u_0$

D'où : $S_n = u_{n+1} - u_0$ donc : $u_{n+1} = S_n + u_0$; d'où : $(n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = S_{n-1} + u_0$

► Calculons u_n en fonction de n

on a : $u_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}) + u_0$

$$= v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{7}{5}\right)^n}{1 - \frac{7}{5}} + 15$$

$$= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{7}{5}\right)^n}{-\frac{2}{5}} + 15$$

$$= -\frac{5}{2} \left(1 - \left(\frac{7}{5}\right)^n\right) + 15 = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} \times \left(\frac{7}{5}\right)^n + 15$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{25}{2} + \frac{5}{2} \times \left(\frac{7}{5}\right)^n$

Cette dernière propriété est vraie pour $n = 0$ car :

$$u_0 = 15 \text{ et } \frac{25}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{7}{5} \right)^0 = 15$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{25}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{7}{5} \right)^n$$

4 Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{On a : } \frac{7}{5} > 1 ; \text{ d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{5} \right)^n = +\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{25}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{7}{5} \right)^n = +\infty$$

Exercice 26

1 Calcul de u_1 et u_2 .

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{u_n}{3(1 - 2u_n)}$$

$$\begin{aligned} \text{On remplace } n \text{ par } 0 ; \text{ on a : } u_1 &= \frac{u_0}{3(1 - 2u_0)} = \frac{-\frac{1}{3}}{3\left(1 - 2 \times \frac{-1}{3}\right)} = \frac{-\frac{1}{3}}{3\left(1 + \frac{2}{3}\right)} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}}{3 \times \frac{5}{3}} = \frac{-1}{15} = -\frac{1}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et on a : } u_2 &= \frac{u_1}{3(1 - 2u_1)} = \frac{-\frac{1}{15}}{3\left(1 - 2 \times \frac{-1}{15}\right)} = \frac{-\frac{1}{15}}{3\left(1 + \frac{2}{15}\right)} = \frac{-\frac{1}{15}}{3 \times \frac{17}{15}} \\ &= \frac{-1}{51} = -\frac{1}{51} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } u_1 = -\frac{1}{15} \text{ et } u_2 = -\frac{1}{51}$$

2 Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 0$

$$\text{Pour } n = 0 ; \text{ on a : } u_0 = -\frac{1}{3} \text{ et } -\frac{1}{3} < 0 ; \text{ d'où : } u_0 < 0$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose que : $u_n < 0$ et on montre que : $u_{n+1} < 0$

$$\text{On a : } u_n < 0 \text{ d'où : } \begin{cases} u_n < 0 \\ 1 - 2u_n > 0 \end{cases} ; \text{ donc : } \frac{u_n}{3(1 - 2u_n)} < 0 \text{ d'où : } u_{n+1} < 0$$

La propriété est vraie pour $n + 1$;

d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 0$

3 a. Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} = \frac{u_n}{3(1-2u_n)} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3(1-2u_n)} \quad (u_n \neq 0)$

Et de plus : $u_n < 0 \Rightarrow -2u_n > 0$

$$\Rightarrow 1 - 2u_n > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-2u_n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3(1-2u_n)} < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{3}$$

b. Dédisons que (u_n) est croissante et qu'elle est convergente

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{3}$; donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ car : $\frac{1}{3} \leq 1$

Alors : $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \\ u_n < 0 \end{cases} \Rightarrow (u_{n+1} \geq u_n)$

D'où la suite (u_n) est croissante

Puisque (u_n) est croissante et majorée

par 0; donc elle est convergente

4 a. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|u_n|$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$;

$$\text{On a : } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|u_n|$$

(Remarque que $u_n < 0$ et $u_{n+1} < 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$)

b. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

On a d'après la question précédente $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|u_n|$, alors :

On remplace n par 0 on a : $|u_1| \leq \frac{1}{3}|u_0|$

On remplace n par 1; on a : $|u_2| \leq \frac{1}{3}|u_1|$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

On remplace n par $n-1$; on a : $|u_n| \leq \frac{1}{3}|u_{n-1}|$

En multipliant membre à membre les inégalités précédentes on obtient :

$$|u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0|$$

infos:

► Si : $(\forall n \in I) ; u_n > 0$

$(\forall n \in I) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Rightarrow (u_n)_{n \in I}$
est croissante

$(\forall n \in I) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Rightarrow (u_n)_{n \in I}$
est décroissante

► Si : $(\forall n \in I) ; u_n < 0$

$(\forall n \in I) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Rightarrow (u_n)_{n \in I}$
est croissante

$(\forall n \in I) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Rightarrow (u_n)_{n \in I}$
est décroissante

C'est-à-dire : $|u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \left|-\frac{1}{3}\right|$

d'où : $|u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ (On pourra faire un raisonnement par récurrence)

c. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On a : $|u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

et : $-1 < \frac{1}{3} < 1$ d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

D'où d'après un critère de convergence on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

infos:

Si : $|u_n - \ell| \leq k v_n$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Exercice 27

1 Montrons que : $f([2; 3]) \subset [2; 3]$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$ d'où : $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $[2; +\infty[$ et $f'(x)$ équivaut à $x = 2$.

donc : f est strictement croissante sur $[2; 3]$ (1) (car $[2; 3] \subset [2; +\infty[$);

Et on a f continue sur $[2; 3]$ (2)

D'après (1) et (2) on a : $f([2; 3]) = [f(2); f(3)] = \left[2; \frac{13}{6}\right]$

Or $\frac{13}{6} < 3$; d'où $f([2; 3]) \subset [2; 3]$

2 a. Montrons que (u_n) **est minorée par 2;**

en utilisant le raisonnement par récurrence

Pour $n = 1$ on a : $u_1 = 3$ et $3 > 2$; donc : $u_1 > 2$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on suppose que : $u_n > 2$; et on montre que : $u_{n+1} > 2$

Puisque f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$ et $u_n > 2$ alors : $f(u_n) > f(2)$

donc : $f(u_n) > 2$; d'où : $u_{n+1} > 2$

D'après le principe de récurrence; on a : $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$;

donc la suite (u_n) est minorée par 2.

b. Étudions les variations de (u_n) .

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} - u_n = \frac{4 - u_n^2}{2u_n}$

Puisque : $u_n > 2$, alors : $u_n > 0$ et $4 - u_n^2 < 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n < 0$ d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} < u_n$; la suite (u_n) est décroissante.

► **Déduction :**

La suite : (u_n) est décroissante et minorée par 2 ; donc elle est convergente.

3 On a la fonction f est continue sur l'intervalle $[2;3]$; $f([2;3]) \subset [2;3]$
 $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_0 \in [2;3]$ et la suite (u_n) est convergente ;
donc la limite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[2;3]$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \text{ un élément de } [2;3] ; \text{ on a : } f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4}{2x} = x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ (car } -2 \notin [2;3]) \end{aligned}$$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Exercice 28

1 Calculons u_2 et u_3

$$\text{On a : } u_2 = \frac{u_1}{3 - u_1} = \frac{1}{2} \text{ et } u_3 = \frac{u_2}{3 - u_2} = \frac{\frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{5} ; \text{ donc : } u_2 = \frac{1}{2} \text{ et } u_3 = \frac{1}{5}$$

2 a. Calculons v_1

$$\text{On a : } u_1 = 1 ; \text{ d'où : } v_1 = \frac{1}{u_1} = 1 ; \text{ donc : } v_1 = 1$$

b. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} = 3v_n - 1$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

$$\text{On a : } v_n = \frac{1}{u_n} ; \text{ d'où } v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{3 - u_n}{u_n} = \frac{3}{u_n} - 1$$

$$\text{donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} = 3v_n - 1$$

3 a. Déterminons w_n en fonction de n

Soit n élément de $\mathbb{N}^*$;

$$\text{On a : } w_{n+1} = v_{n+1} - \frac{1}{2} = 3v_n - \frac{3}{2} = 3\left(v_n - \frac{1}{2}\right) = 3w_n$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; w_{n+1} = 3w_n$; d'où (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de 1^{er} terme $w_1 = \frac{1}{2}$.

$$\text{On a : } w_n = w_1 \times q^{n-1} ; \text{ donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; w_n = \frac{1}{2} \times 3^{n-1}$$

► Déduisons v_n et u_n en fonction de n

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$:

► Déterminons v_n en fonction de n : on a : $w_n = \frac{1}{2} \times 3^{n-1}$; d'où :

$$v_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2} \text{ (car } v_n = w_n + \frac{1}{2} \text{)}$$

► Déterminons u_n en fonction de n :

On a : $v_n = \frac{1}{u_n}$; d'où : $u_n = \frac{1}{v_n}$; ainsi : $u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}}$; (on peut également

écrire u_n de la façon suivante : $u_n = \frac{1}{\frac{1}{6} \cdot 3^n + \frac{3}{6}} = \frac{1}{\frac{3^n + 3}{6}} = \frac{6}{3^n + 3}$

b. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{6}{3^n + 3}$ et puisque : $3 > 1$; on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 29

1 a. Calcul de u_1 et u_2 .

On a : $u_1 = \frac{u_0 + 8\sqrt{2+u_0}}{9} = \frac{7 + 8 \times 3}{9} = \frac{31}{9}$; d'où : $u_1 = \frac{31}{9}$

et $u_2 = \frac{u_1 + 8\sqrt{2+u_1}}{9} = \frac{\frac{31}{9} + 8 \times \frac{7}{3}}{9} = \frac{199}{81}$; donc : $\begin{cases} u_1 = \frac{31}{9} \\ u_2 = \frac{199}{81} \end{cases}$

b. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 2$

pour $n = 0$; on a : $u_0 = 7$ et $7 > 2$; d'où : $u_0 > 2$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que la propriété est vraie pour n ; et on montre qu'elle est vraie pour $n + 1$.

On a : $u_n > 2$; d'où : $\sqrt{2+u_n} > 2$ (car $u_n + 2 > 4$) ; d'où :

$$\frac{u_n + 8\sqrt{2+u_n}}{9} > \frac{2 + 8 \times 2}{9}$$

donc : $u_{n+1} > \frac{18}{9}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} > 2$

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 2$

2 Montrons que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Soit n de $\mathbb{N}$;

$$\text{On a : } u_{n+1} - u_n = \frac{8(\sqrt{2+u_n} - u_n)}{9} = \frac{8(2+u_n - u_n^2)}{9(\sqrt{2+u_n} + u_n)} = \frac{-8(u_n - 2)(u_n + 1)}{9(\sqrt{2+u_n} + u_n)}$$

Or : $u_n > 2$; d'où : $u_n + 1 > 0$ et $u_n - 2 > 0$ et on a : $\sqrt{2+u_n} + u_n > 0$

donc : $u_{n+1} - u_n < 0$; (car $-\frac{8}{9} < 0$) alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n < 0$

donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3 a. Montrons que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} = \sqrt{2 + u_{n+1}} - 2$

alors : $v_{n+1} + 2 = \sqrt{2 + u_{n+1}}$

donc :

$$\begin{aligned} (v_{n+1} + 2)^2 &= 2 + u_{n+1} = 2 + \frac{u_n + 8\sqrt{2 + u_n}}{9} = \frac{18 + u_n + 8\sqrt{2 + u_n}}{9} \\ &= \frac{16 + (2 + u_n) + 2 \times 4\sqrt{2 + u_n}}{9} = \left(\frac{4 + \sqrt{2 + u_n}}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

On obtient : $v_{n+1} + 2 = \frac{4 + \sqrt{2 + u_n}}{3}$ (car $(v_{n+1} + 2) > 0$)

$$\text{Donc : } v_{n+1} = \frac{4 + \sqrt{2 + u_n}}{3} - 2 = \frac{\sqrt{2 + u_n} - 2}{3} = \frac{1}{3} v_n$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$

D'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme

$$v_0 = \sqrt{2 + u_0} - 2 = 1$$

b. Déterminons v_n et u_n en fonction de n .

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$;

$$\text{donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = v_0 q^n = \frac{1}{3^n}$$

on obtient de ce qui précède : $\frac{1}{3^n} = \sqrt{2 + u_n} - 2$ ainsi : $\left(2 + \frac{1}{3^n}\right) = \sqrt{2 + u_n}$

$$\text{donc : } \left(2 + \frac{1}{3^n}\right)^2 = 2 + u_n ;$$

$$\text{D'où : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \left(2 + \frac{1}{3^n}\right)^2 - 2$$

c. Calculer la limite (u_n)

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0 \text{ d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0 \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4 - 2 = 2$$

Exercice 30

1 a. Étude des variations de f avec : $f(x) = \frac{x}{1 + x + x^2}$

La fonction f est définie dérivable sur $\mathbb{R}$. (fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$)

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{(1+x+x^2) - (2x+1)x}{(1+x+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x+x^2)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)(1+x)$

donc f est croissante sur l'intervalle $[-1; 1]$ et décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty; -1]$ et $[1; +\infty[$.

b. Déterminons l'image de $[0; 1]$ par f

L'image de $[0; 1]$ par f est $[f(0); f(1)]$. (car f continue et croissante sur $[0; 1]$)

d'où : $f([0; 1]) = \left[0; \frac{1}{3}\right]$

2 a. Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

Pour $n = 0$; on a : $0 \leq 1 \leq 1$; d'où $0 \leq u_0 \leq 1$ la propriété est vraie pour $n = 0$

- Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que propriété est vraie pour n et, on montre qu'elle est vraie pour $n + 1$.

On a : $0 \leq u_n \leq 1$; donc : $0 \leq f(u_n) \leq \frac{1}{3}$ (car $f([0; 1]) = \left[0; \frac{1}{3}\right]$)

d'où $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

► Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$

pour : $n = 0$ on a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{3}$; d'où $u_1 < u_0$; la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que : $u_{n+1} < u_n$ et on montre que : $u_{n+2} < u_{n+1}$

On a : $u_{n+1} < u_n$ et $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ et f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Donc : $f(u_{n+1}) < f(u_n)$; d'où : $u_{n+2} < u_{n+1}$, donc la propriété est vraie pour $n + 1$.

On obtient $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$; donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

b. Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$ puis déduisons que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n^2 + n + 1}{n^2}}$

$$\text{d'où : } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n^2 + n + 1}$$

$$\text{donc : } f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n^2 + n + 1} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n^2 + n + 1)}$$

Puisque $(n+1)(n^2 + n + 1) > 0$ alors $f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} < 0$

$$\text{donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*); f\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+1}$$

► Dédution :

On utilise le raisonnement par récurrence

Pour $n = 1$ on a : $u_1 = \frac{1}{3}$; puisque $0 \leq \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1}$ donc : $0 \leq u_1 \leq \frac{1}{1}$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on suppose que la propriété est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$.

On a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ et f est croissante sur $[0; 1]$; d'où : $f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$

Or : $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$ et $f(0) = 0$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ d'où : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

La propriété est vraie pour $n+1$; donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

c. Dédisons que la suite (u_n) est convergente et déterminons sa limite.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1; donc elle est convergente.

Puisque $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (d'après un critère de convergence)

Exercice 31

1 a. Calcul u_2 et u_3 .

On a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = 1$ et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n} \right)$

$$\text{donc : } \frac{1}{u_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} (1 + 2) = \frac{3}{2} \text{ d'où : } u_2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{de même } \frac{1}{u_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{2}{3}} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) = \frac{5}{4} \text{ d'où : } u_3 = \frac{4}{5}$$

2 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$

$$\text{pour } n = 0; \text{ on a : } \frac{2u_0}{4u_0 - 1} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{4 \times \frac{1}{2} - 1} = 1 = u_1 \text{ donc : } u_1 = \frac{2u_0}{4u_0 - 1}$$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que la propriété est vraie pour n . c'est-à-dire :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1},$$

on aura : $u_n(4u_{n+1} - 2) = u_{n+1}$ d'où : $u_n = \frac{u_{n+1}}{4u_{n+1} - 2}$

on montre qu'elle est vraie pour $n + 1$.

$$\text{on a : } \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n + u_{n+1}}{u_{n+1} \times u_n} \right) = \frac{1}{2} \frac{\frac{u_{n+1}}{4u_{n+1} - 2} + u_{n+1}}{u_{n+1} \times \frac{u_{n+1}}{4u_{n+1} - 2}} = \frac{1}{2} \frac{4u_{n+1}^2 - u_{n+1}}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{2} \frac{4u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}$$

donc : $u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}}{4u_{n+1} - 1}$ ainsi la propriété est vraie pour $n + 1$.

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$

3 Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

Pour : $n = 0$; on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq 1$ d'où : $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que la propriété est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n + 1$.

On a : $u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n}{4u_n - 1} - 1 = \frac{1 - 2u_n}{4u_n - 1}$

Or : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$; d'où : $1 - 2u_n \leq 0$ et $4u_n - 1 > 0$; donc : $u_{n+1} - 1 \leq 0$

C'est-à-dire : $u_{n+1} \leq 1$

De plus on a : $u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2u_n}{4u_n - 1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(4u_n - 1)}$

Puisque : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ alors : $4u_n - 1 > 0$; d'où : $u_{n+1} - \frac{1}{2} \geq 0$

donc : $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, d'après le principe de récurrence.

4 a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique puis calculer v_n et u_n en fonction de n .

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N} ; \text{ on a : } v_{n+1} &= \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3} = \frac{1}{\frac{2u_n}{4u_n - 1}} - \frac{4}{3} = \frac{4u_n - 1}{2u_n} - \frac{4}{3} \\ &= \frac{12u_n - 3 - 8u_n}{6u_n} = \frac{4u_n - 3}{6u_n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2u_n} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme.

$$v_0 = \frac{1}{u_0} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

► Calcul de v_n et u_n en fonction de n .

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme:

$$v_0 = \frac{2}{3}$$

$$\text{D'où: } v_n = v_0 \times q^n = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

De plus on a : $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}$ d'où: $u_n = \frac{3}{3v_n + 4}$; donc:

$$u_n = \frac{3}{3 \times \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4}$$

On obtient : $u_n = \frac{3}{4 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$; pour tout n de $\mathbb{N}$

5 Calcul de la limite (u_n) .

On a : $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, d'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{4}$

Exercice 32

1 a. Montrons que la suite (u_n) est croissante:

On utilise le raisonnement par récurrence.

On a : $u_1 - u_0 = \frac{2}{3}$ (car: $u_1 = \frac{5}{3}$); d'où: $u_1 - u_0 > 0$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que : $u_{n+1} - u_n > 0$ et on montre que: $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

$$\begin{aligned} \text{on a : } u_{n+2} - u_{n+1} &= \frac{2u_{n+1} + 3}{u_{n+1} + 2} - \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \\ &= \frac{2u_{n+1}u_n + 4u_{n+1} + 3u_n + 6 - 2u_{n+1}u_n - 3u_{n+1} - 4u_n - 6}{(u_n + 2)(u_{n+1} + 2)} \\ &= \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_n + 2)(u_{n+1} + 2)} \end{aligned}$$

On a : $u_{n+1} > 0$ et $u_n > 0$ (vérifier ce résultat) donc: $(u_n + 2)(u_{n+1} + 2) > 0$

D'où : $u_{n+2} - u_{n+1}$ et $u_{n+1} - u_n$ ont le même signe et donc : $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$.

D'après le principe de récurrence: $u_{n+1} > u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

la suite: (u_n) est strictement croissante.

b. Montrons que la suite (u_n) est majorée par 2.

C'est-à-dire : $u_n < 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

Pour $n = 0$; on a $u_0 < 2$ (car: $u_0 = 1$)

Soit n de $\mathbb{N}$; supposons que : $u_n < 2$ et montrons que : $u_{n+1} < 2$

$$\text{On a : } u_{n+1} - 2 = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - 2 = \frac{-1}{u_n + 2}$$

Donc : $u_{n+1} - 2 < 0$; (car: $u_n + 2 > 0$) et donc : $u_{n+1} < 2$;

d'après le principe de récurrence : $u_n < 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Dédution:

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2; donc elle est convergente.

c. Calculons la limite de (u_n) .

$$\left(\text{Remarque } u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = \frac{2x + 3}{x + 2} \right)$$

La suite (u_n) vérifie ► $u_{n+1} = f(u_n)$

► f est continue sur $[0; 2]$

► $f([0; 2]) \subset [0; 2]$

► (u_n) est convergente

► $u_0 \in [0; 2]$

Donc la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'équation : $\ell = \frac{2\ell + 3}{\ell + 2}$ avec $0 \leq \ell \leq 2$

D'où : $\ell^2 + 2\ell = 2\ell + 3$ donc : $\ell = \sqrt{3}$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$

2 a. Montrons que la suite: (v_n) est géométrique.

Soit n de $\mathbb{N}$;

$$\begin{aligned} \text{on a : } v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \sqrt{3}}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})u_n + 3 - 2\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})u_n + 3 + 2\sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})u_n - \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \left(\frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} v_n = (7 - 4\sqrt{3}) v_n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $7 - 4\sqrt{3}$ et de premier terme $v_0 = -2 + \sqrt{3}$.

b. Déterminons u_n en fonction de n .

On a : $v_n = (\sqrt{3} - 2)(7 - 4\sqrt{3})^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$; car: (v_n) est géométrique de raison $7 - 2\sqrt{3}$ et de 1er terme $v_0 = -2 + \sqrt{3}$

$$\text{On a : } v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}; \text{ d'où : } v_n u_n + \sqrt{3} v_n = u_n - \sqrt{3}$$

Alors : $u_n(v_n - 1) = -\sqrt{3}v_n - \sqrt{3}$, on obtient : $u_n = \frac{\sqrt{3}v_n + \sqrt{3}}{1 - v_n}$

Donc : $u_n = \frac{\sqrt{3}(-2 + \sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})^n + \sqrt{3}}{1 + (2 - \sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})^n}$; pour tout n de $\mathbb{N}$

c) Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2 + \sqrt{3})\sqrt{3}(7 - 4\sqrt{3})^n = 0$ car : $-1 < 7 - 4\sqrt{3} < 1$

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$

Exercice 33

1 a. Calcul de v_1 et w_1

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = u_{n+1} - 2u_n$ et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

$$\begin{aligned} \text{Pour } n = 0 ; \text{ on a : } v_1 &= u_1 - 2u_0 \\ &= 1 - 2 \times 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } n = 0 ; \text{ on a : } w_1 &= u_1 - \frac{1}{3}u_0 \\ &= 1 - \frac{1}{3} \times 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

b. Montrons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Soit n de $\mathbb{N}$;

$$\begin{aligned} \text{On a : } v_{n+2} &= u_{n+2} - 2u_{n+1} = \left(\frac{7}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n\right) - 2u_{n+1} \\ &= \left(\frac{7}{3} - 2\right)u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1} - 2u_n) = \frac{1}{3}v_{n+1} \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et son premier terme est $v_1 = 1$.

► Montrons que : $(w_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q' = 2$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } w_{n+2} &= u_{n+2} - \frac{1}{3}u_{n+1} \\ &= \left(\frac{7}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n\right) - \frac{1}{3}u_{n+1} = \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\right)u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n \\ &= 2u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = 2\left(u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n\right) = 2w_n \end{aligned}$$

Donc : (w_n) est géométrique de raison $q' = 2$ et de 1er terme $w_1 = 1$

2 Déterminons u_n en fonction n .

Déterminons tout d'abord v_n et w_n en fonction de n ;

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = v_1 \times q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{Et on a } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; w_n = w_1 \times (q')^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = (2)^{n-1}$$

$$\text{On a pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* : \begin{cases} v_{n+1} = u_{n+1} - 2u_n \\ w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \end{cases}$$

$$\text{D'où : } v_{n+1} - w_{n+1} = -2u_n + \frac{1}{3}u_n$$

$$v_{n+1} - w_{n+1} = \left(-2 + \frac{1}{3}\right)u_n$$

$$v_{n+1} - w_{n+1} = \frac{-5}{3}u_n$$

$$\begin{aligned} \text{On obtient : } u_n &= -\frac{3}{5}(v_{n+1} - w_{n+1}) \\ &= \frac{3}{5}(w_{n+1} - v_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\text{donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{3}{5}\left(2^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right);$$

$$\text{vraie de même pour } n = 0 \text{ car : } \begin{cases} u_0 = 0 \\ \frac{3}{5}\left(2^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^0\right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{3}{5}\left(2^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

► Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$;

$$\text{on a : } 2 > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

$$\text{Or : } -1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\text{D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Exercice 34

1 Calculons u_2 :

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+2} = bu_{n+1} - (b-1)u_n$$

$$\begin{aligned} \text{Pour : } n = 0 ; \text{ on a : } u_2 &= bu_1 - (b-1)u_0 \\ &= b.a - (b-1).0 \\ &= ab \end{aligned}$$

$$u_2 = ab$$

2 Montrons que : (v_n) est une suite géométrique

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}; \text{ on a : } v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\
 &= (bu_{n+1} - (b-1)u_n) - u_{n+1} \\
 &= (b-1)u_{n+1} - (b-1)u_n \\
 &= (b-1)(u_{n+1} - u_n) \\
 &= (b-1)v_n
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = (b-1)v_n$$

D'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q = b-1$

$$\left(\text{remarquer que : } \begin{cases} q \neq 0 \\ q \neq 1 \end{cases} \right)$$

► Déterminons v_n en fonction de n :

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = v_0 \times q^{n-0}$$

$$\text{Or : } v_0 = u_1 - u_0 = a - 0 = a \text{ d'où : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = a(b-1)^n$$

3 Montrons que (w_n) est une suite constante.

$$\text{C'est-à-dire : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; w_n = \text{cte}$$

$$\text{Ou encore : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; w_{n+1} = w_n$$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}; \text{ on a : } w_{n+1} &= u_{n+2} - (b-1)u_{n+1} \\
 &= (bu_{n+1} - (b-1)u_n) - (b-1)u_{n+1} \\
 &= (b-b+1)u_{n+1} - (b-1)u_n \\
 &= u_{n+1} - (b-1)u_n \\
 &= w_n
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; w_{n+1} = w_n ; \text{ d'où : } (w_n) \text{ est une suite constante}$$

$$\text{On a alors : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; w_n = w_0$$

$$\text{Or : } w_0 = u_1 - (b-1)u_0 ; \text{ alors : } w_0 = a - (b-1) \times 0$$

$$\text{C'est-à-dire : } w_0 = a$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; w_n = a$$

4 Déterminons u_n en fonction de n :

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; \begin{cases} v_n = u_{n+1} - u_n \\ w_n = u_{n+1} - (b-1)u_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } v_n - w_n &= (u_{n+1} - u_n) - (u_{n+1} - (b-1)u_n) \\ &= -u_n + (b-1)u_n \\ &= (-1 + b - 1)u_n \\ &= (b-2)u_n \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } u_n = \frac{1}{b-2}(v_n - w_n) \text{ (car : } b \neq 2)$$

$$\text{Or : } v_n = a(b-1)^n \text{ et } w_n = a; \text{ donc : } u_n = \frac{1}{b-2}(a(b-1)^n - a)$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{a}{b-2}((b-1)^n - 1)$$

5 Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On a : $0 < b < 2$; d'où : $-1 < b-1 < 1$ et $b \neq 1$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (b-1)^n = 0; \text{ d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{a}{b-2}(0-1) = \frac{-a}{b-2}$$

$$\text{On obtient : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{a}{2-b}$$

Exercice 35

1 a. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 1$ et $1 > 0$ donc : $u_0 > 0$; d'où la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose que : $u_n > 0$ et on montre que : $u_{n+1} > 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_n > 0 &\Rightarrow \begin{cases} 2u_n^3 > 0 \\ 3u_n^2 + 1 > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

b. Montrons que (u_n) est une suite décroissante.

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}; \text{ on a : } u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} - u_n = \frac{2u_n^3 - u_n(3u_n^2 + 1)}{3u_n^2 + 1} \\ &= \frac{2u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3u_n^2 + 1} = \frac{-u_n^3 - u_n}{3u_n^2 + 1} = -\frac{u_n^3 + u_n}{3u_n^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} u_n^3 + u_n > 0 \\ 3u_n^2 + 1 > 0 \end{cases}; \text{ (car : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0)$$

D'où : $-\frac{u_n^3 + u_n}{3u_n^2 + 1} < 0$; donc : $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

Donc : (u_n) est une suite décroissante.

c. Déduisons que la suite (u_n) est convergente.

On a : (u_n) est décroissante et minorée par 0 (car : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$)

donc : la suite (u_n) est convergente.

2 a. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; étudions le signe de : $u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n &= \frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} - \frac{u_n}{2} \\ &= \frac{4u_n^3 - (3u_n^2 + 1)u_n}{2(3u_n^2 + 1)} = \frac{4u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{2(3u_n^2 + 1)} = \frac{u_n^3 - u_n}{2(3u_n^2 + 1)} \\ &= \frac{u_n(u_n^2 - 1)}{2(3u_n^2 + 1)} = \frac{u_n(u_n - 1)(u_n + 1)}{2(3u_n^2 + 1)} \end{aligned}$$

Or la suite (u_n) est décroissante, donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq u_0$, d'où : $u_n \leq 1$

$$\text{On a : } \begin{cases} u_n \leq 1 \\ u_n + 1 > 0 \\ u_n > 0 \\ 2(3u_n^2 + 1) > 0 \end{cases} \quad \text{d'où : } u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \leq 0 ; \text{ donc : } u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

b. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

On remplace n par 0 ; on a $(0 \leq) u_1 \leq \frac{1}{2} u_0$

On remplace n par 1 ; on a : $(0 \leq) u_2 \leq \frac{1}{2} u_1$

$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$

On remplace n par $n - 1$; on a : $(0 \leq) u_n \leq \frac{1}{2} u_{n-1}$

En multipliant membre à membre les inégalités précédentes et après simplification on obtient :

$$u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0 \text{ d'où : } u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

2ème méthode : On utilise le raisonnement par récurrence :

Pour : $u_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ d'où : $u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose que : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et on montre que : $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$;

$$\text{On a : } u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ donc : } \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{2}u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} ; \text{ et puisque } u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n ; \text{ alors : } u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{Or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ car } \left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

3 Montrons que (v_n) **est convergente et déterminons sa limite**

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$$

$$\text{d'où : } v_n = f(u_n) \text{ avec : } f(X) = \frac{X + 2}{X + 1}$$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et f est continue en 0 donc : (v_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(0)$$

$$= \frac{0 + 2}{0 + 1} = 2$$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$$

Infos:

$$\text{Si : } \begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \text{ alors : } a \leq c$$

infos:

$$\text{Si : } \lim u_n = \ell$$

et f continue en ℓ

alors (v_n) tel que : $v_n = f(u_n)$

converge vers $f(\ell)$.

Exercice 36

1 Calculons u_1 ; u_2 **et** u_3

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n-1}{2n(n+1)}$$

$$\text{pour } n = 1 ; \text{ on a : } u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1-1}{2 \times (1+1)} = \frac{1}{2}u_1 = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{pour } n = 2 ; \text{ on a : } u_3 &= \frac{1}{2}u_2 + \frac{2-1}{2 \times 2 \times (2+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{11}{24} \end{aligned}$$

On a : $u_1 > u_2 > u_3$ (car $\frac{3}{2} > \frac{3}{4} > \frac{11}{24}$)

2 a. Montrons que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{3-n}{2n(n-1)(n+1)}$$

Soit n de $\mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{2}u_n + \frac{n-1}{2n(n+1)} \right) - \left(\frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{n-1-1}{2(n-1)(n-1+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{n-1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2}u_{n-1} - \frac{n-2}{2(n-1)n} \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{n-1}{2n(n+1)} - \frac{n-2}{2n(n-1)} \\ &= \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{(n-1)^2 - (n-2)(n+1)}{2n(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{(n^2 - 2n + 1) - (n^2 + n - 2n - 2)}{2n(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{-n + 1 + 2}{2n(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{3-n}{2n(n+1)(n-1)} \end{aligned}$$

b. Montrons que (u_n) est décroissante

On utilise le raisonnement par récurrence et la relation :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{3-n}{2n(n-1)(n+1)}$$

On a : $u_3 \leq u_2$; car : $u_2 = \frac{3}{4}$ et $u_3 = \frac{11}{24}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 3$, on suppose que $u_n \leq u_{n-1}$, et on montre que $u_{n+1} \leq u_n$

$$\text{On a : } \begin{cases} u_n - u_{n-1} \leq 0 \\ 3 - n \leq 0 \\ 2n(n-1)(n+1) > 0 \end{cases}$$

donc : $\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{3-n}{2n(n-1)(n+1)} \leq 0$ (somme de deux nombres négatifs ou nuls)

D'où : $u_{n+1} - u_n \leq 0$; on obtient : $u_{n+1} \leq u_n$

D'après le principe de la récurrence $(\forall n \geq 3) u_n \leq u_{n-1}$

De plus on a : $u_3 \leq u_2 \leq u_1$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_{n+1} \leq u_n$
donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

a. Montrons que (v_n) est géométrique.

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}; \text{ on a : } v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{n-1}{2n(n+1)} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{n-1-2n}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}u_n + \frac{-1-n}{2n(n+1)} \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{n+1}{2n(n+1)} \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$; et de premier terme

$$v_1 = u_1 - \frac{1}{1} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

b. Déterminons v_n et u_n en fonction de n

Soit n de $\mathbb{N}^*$;

$$\text{On a : } v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Déterminons u_n en fonction de n

$$\text{Soit } n \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ on a : } v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

$$\text{d'où : } v_n + \frac{1}{n} = u_n \text{ donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{n}$$

c. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Puisque: $-1 < \frac{1}{2} < 1$; alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\text{d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{n} = 0 \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

1 Fonctions logarithmes népérien: définition et propriétés

Définition:

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; \infty[$ qui s'annule en 1.

Conséquences:

- ▶ L'ensemble de définition de la fonction $\ln$ est: $D =]0; +\infty[$
- ▶ $\ln(1) = 0$
- ▶ Il existe un seul réel strictement positif, noté e , tel que $\ln(e) = 1$ (c'est un nombre irrationnel tel que $e = 2,7182$).
- ▶ La fonction $\ln$ est dérivable sur l'intervalle $]0; \infty[$ et on a:
 $(\forall x \in]0; +\infty[) ; (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.
- ▶ Pour tout a et b de $]0; +\infty[$, on a: $a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$

$$a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$$

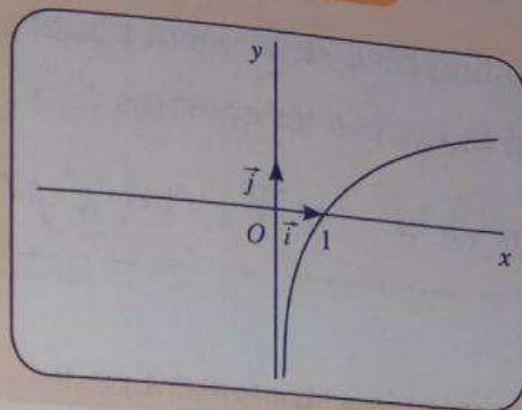
Propriétés algébriques:

Pour tout a et b de $]0; +\infty[$ et tout r de $\mathbb{Q}$, on a :

- ▶ $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
- ▶ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- ▶ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- ▶ $\ln(a^r) = r \ln(a)$
- ▶ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Signe de la fonction $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+



Exercices

Exercice 1

Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $\ln(p)$ tel que $p \in \mathbb{N}^*$:

- 1 $\ln\left(\frac{9}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{5}\right) + \ln\left(\frac{5}{3}\right)$
- 2 $-\ln(0,1) - \ln(0,001) + \frac{1}{2}\ln(10000)$
- 3 $4\ln\frac{1}{2} + 3\ln 2 + 3\ln(\sqrt[3]{8})$
- 4 $\ln(9 + 16) - 3\ln(2\sqrt[3]{5}) + \ln(12 - 4)$
- 5 $\ln\sqrt{\sqrt{7} + 2} + \ln\sqrt{\sqrt{7} - 2} + 3\ln\sqrt{3}$
- 6 $\ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$

Exercice 2

1 Écrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ chacun des nombres suivants :

$$A = \ln 16 - \ln(81^3); B = \ln(9\sqrt{2}); C = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right) \text{ et } D = \ln\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3^4\sqrt{2}}\right)$$

2 Calculer E et F sachant que :

$$E = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^2 - \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2 \text{ et } F = 2\ln(2 + \sqrt{5}) + \ln(2 - \sqrt{5})^2$$

Exercice 3

Calculer A et B sachant que :

- 1 $A = \ln(5 + 2\sqrt{6})^{20} + \ln(5 - 2\sqrt{6})^{20}$
- 2 $B = 2\ln(e\sqrt{e}) - 3\ln(e^5) - 2\ln(e^{-6})$

Exercice 4

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

Calculer en fonction de $\ln a$ et $\ln b$ les nombres X , Y , Z et T :

$$X = \ln\left(\frac{a^5}{b^3}\right); Y = \ln(a^2 \sqrt{b}); Z = \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right); T = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right) + \ln\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Exercice 5

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs, montrer que :

$$1 \quad \ln \sqrt{xy} = \frac{\ln x + \ln y}{2}$$

$$2 \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$3 \quad \ln(\sqrt[3]{xy}) - \frac{1}{3} \ln(x^2) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$4 \quad \ln x + \ln y \geq 2 \iff \sqrt{xy} \geq e$$

Exercice 6

Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas :

$$1 \quad f(x) = \ln(2x - 1)$$

$$2 \quad f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

$$3 \quad f(x) = \frac{\ln(x^2 + 4)}{x}$$

$$4 \quad f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)$$

$$5 \quad f(x) = \frac{\ln(2x-1)}{\ln(x-2)}$$

Exercice 7

Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas:

$$1 \quad f(x) = \ln((x-2)^2)$$

$$2 \quad f(x) = \ln(|x-2|)$$

$$3 \quad f(x) = \ln(1 - |x|)$$

$$4 \quad f(x) = \sqrt{\ln x}$$

$$5 \quad f(x) = \frac{x}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Exercice 8

Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas:

$$1 \quad f(x) = \ln(3x-6) + \ln(x+4)$$

$$2 \quad f(x) = \ln(|x^2 - 16|)$$

$$3 \quad f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$4 \quad f(x) = \ln(-x^2 + 6x - 5)$$

$$5 \quad f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 7x + 8}\right)$$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1 $1 - \ln x = 0$

3 $\ln x = 2$

5 $\ln^2 x - 3 \ln x = 0$

2 $\ln\left(\frac{x}{3}\right) = \ln(5)$

4 $x \ln(2x - 1) = 0$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $\ln(x - 2) + \ln(x + 1) = \ln(3x - 5)$

2 $2 \ln(x - 2) + \ln(3x + 1) = 2 \ln 2$

3 $6 \ln^2(x) + 7 \ln(x) - 3 = 0$

4 $\ln^3(x) - 2 \ln^2(x) - \ln x + 2 = 0$

5 $\ln x - \frac{1}{\ln x} = \frac{15}{4}$

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

1 $\ln(x) \leq 0$

2 $\ln(2x + 3) \geq 0$

3 $2 - \ln x \geq 0$

4 $\ln x \leq 2 \ln 3$

5 $\ln x \leq 2 \ln(x + 1)$

6 $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0$

7 $(1 + \ln x)(2 - \ln x) \geq 0$

8 $\frac{\ln x}{\ln x - 3} \leq 0$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

1 $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 \geq 0$

2 $\ln^2 x + \ln x < 0$

3 $\ln^2 x - 9 \geq 0$

4 $(\ln x)^2 + 5 \ln x - 6 < 0$

5 $\frac{2 \ln x - 1}{1 - \ln x} \leq 0$

6 $\ln(x^2 + 2x - 2) > 0$

Exercice 13

Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas:

1 $f(x) = \frac{x - 5}{\ln^2(x) - 4 \ln x + 3}$

2 $f(x) = \sqrt{3 - \ln x}$

3 $f(x) = \sqrt{(x - 1) \ln x}$

Exercice 1

infos:

$$\forall (a; b; c) \in (\mathbb{R}^+)^3$$

$$\ln a + \ln b + \ln c = \ln(abc)$$

1 On a : $\ln\left(\frac{9}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{5}\right) + \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \ln\left(\frac{9}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{3}\right) = \ln 3$

2 On a : $-\ln(0,1) - \ln(0,001) + \frac{1}{2}\ln(10000) = -\ln(10^{-1} \times 10^{-3}) + \ln\sqrt{10^4}$
 $= -\ln(10^{-4}) + \ln(10^2) = \ln\left(\frac{10^2}{10^{-4}}\right) = \ln(10^4 \times 10^2) = \ln(10^6)$

3 On a : $4\ln\frac{1}{2} + 3\ln 2 + 3\ln(\sqrt[3]{8}) = -4\ln 2 + 3\ln 2 + 3\ln 2 = 2\ln 2$

Donc : $4\ln\frac{1}{2} + 3\ln 2 + 3\ln(\sqrt[3]{8}) = \ln 4$

4 On a :

$$\ln(9+16) - 3\ln(2^3\sqrt{5}) + \ln(12-4) = \ln 25 - \ln(2^3\sqrt{5})^3 + \ln 8$$

$$= \ln(25 \times 8) - \ln(8 \times 5) = \ln\left(\frac{25 \times 8}{5 \times 8}\right)$$

Donc : $\ln(9+16) - 3\ln(2^3\sqrt{5}) + \ln(12-4) = \ln(5)$

5 On a :

$$\ln\sqrt{\sqrt{7}+2} + \ln\sqrt{\sqrt{7}-2} + 3\ln\sqrt{3} = \ln\sqrt{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)} + 3\ln\sqrt{3}$$

$$= \ln\sqrt{3} + 3\ln\sqrt{3} = 4\ln\sqrt{3} = 2\ln(3)$$

Donc : $\ln\sqrt{\sqrt{7}+2} + \ln\sqrt{\sqrt{7}-2} + 3\ln\sqrt{3} = \ln 9$

6 On a : $\ln(2+\sqrt{2}) + \ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$
 $= \ln(2+\sqrt{2}) + \ln((2-\sqrt{2+\sqrt{2}})(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}))$
 $= \ln(2+\sqrt{2}) + \ln(2-\sqrt{2}) = \ln((2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}))$
 $= \ln(2)$

Donc : $\ln(2+\sqrt{2}) + \ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}) = \ln(2)$

Exercice 2

Calculons A, B, C et D en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

► On a : $A = \ln 16 - \ln(81^3) = \ln 2^4 - \ln(3^4)^3$ donc : $A = 4\ln 2 - 12\ln 3$

► On a : $B = \ln(9\sqrt{2}) = \ln 3^2 + \ln\sqrt{2}$ donc : $B = 2\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 2$

► On a : $C = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right) = \ln\sqrt{3} - \ln 2^4$ donc : $C = \frac{1}{2}\ln 3 - 4\ln 2$

► On a : $D = \ln\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3^4\sqrt{2}}\right) = \ln\sqrt[3]{3} - \ln(3^4\sqrt{2}) = \frac{1}{3}\ln 3 - \left(\ln 3 + \frac{1}{4}\ln 2\right)$

Donc : $D = -\frac{2}{3}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2$

► Calculons E et F:

$$\text{On a : } E = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^2 - \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2 = 2\ln\frac{1}{e} - (-\ln e)^2 = -2\ln e - 1 = -3$$

$$\begin{aligned}\text{On a : } F &= 2\ln(2+\sqrt{5}) + \ln(2-\sqrt{5})^2 = \ln((2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}))^2 \\ &= \ln((\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2))^2 = \ln(\sqrt{5}^2 - 2^2) = \ln(5-4)\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } F = \ln(1) = 0$$

info:

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

Exercice 3

1 Calculons A:

$$\begin{aligned}A &= \ln(5+2\sqrt{6})^{20} + \ln(5-2\sqrt{6})^{20} = 20\ln(5+2\sqrt{6}) + 20\ln(5-2\sqrt{6}) \\ &= 20\ln(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6}) = 20\ln(25-24) = 20\ln(1)\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } A = 0 \text{ car } \ln(1) = 0$$

2 Calculons B:

$$\begin{aligned}\text{On a : } B &= 2\ln(e\sqrt{e}) - 3\ln(e^5) - 2\ln(e^{-6}) = 2\ln e^{\frac{3}{2}} - 3\ln e^5 - 2\ln e^{-6} \\ &= 2 \times \frac{3}{2}\ln e - 3 \times 5\ln e - 2(-6)\ln e = 3 - 15 + 12\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } B = 0$$

Exercice 4

► Calculons X:

$$\text{On a : } X = \ln\left(\frac{a^5}{b^3}\right) \quad \text{donc : } X = \ln(a^5) - \ln(b^3)$$

$$\left(\text{car : } \left(\forall (x,y) \in (IR_+^*)^2; \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y\right), \text{ d'où : } X = 5\ln a - 3\ln b\right)$$

► Calculons Y:

$$\text{On a : } Y = \ln(a^2\sqrt{b}) \quad \text{d'où : } Y = \ln a^2 + \ln\sqrt{b}$$

$$\text{C'est-à-dire : } Y = 2\ln a + \ln b^{\frac{1}{2}} \quad \left(\text{car : } \sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\text{Par suite : } Y = 2\ln a + \frac{1}{2}\ln b$$

► Calculons Z:

On a :

$$Z = \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right) = (\ln a - \ln b) - (\ln\sqrt{a} - \ln b) = \ln a - \ln b - \frac{1}{2}\ln a + \ln b$$

$$\text{Donc : } Z = \frac{1}{2}\ln a$$

► Calculons T:

$$\text{On a : } T = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right) + \ln\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Donc : $T = \ln\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} + 2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ (car : $((\forall x \in \mathbb{R}^+); \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}})$)

Par suite : $T = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{a}{b}\right) + 2 \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{3}(\ln a - \ln b) + 2(\ln a - \ln b)$

D'où : $T = \frac{7}{3} \ln a - \frac{7}{3} \ln b$

2^{ème} méthode:

On a : $T = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right) + \ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{a}{b}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{7}{3}}$

Donc : $T = \frac{7}{3} \ln a - \frac{7}{3} \ln b$

Exercice 5

1 Montrons que : $\ln \sqrt{xy} = \frac{\ln x + \ln y}{2}$

Soit x et y deux éléments de $]0; +\infty[$, on a :

$$\ln \sqrt{xy} = \frac{1}{2} \ln(xy) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln y)$$

Donc : $\ln \sqrt{xy} = \frac{\ln x + \ln y}{2}$

2 Montrons que : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

Soit x et y deux éléments de $]0; +\infty[$ on a :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\frac{x}{y} \times \frac{y}{x}\right) = \ln 1$$

Donc : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

3 Montrons que : $\ln(\sqrt[3]{xy}) - \frac{1}{3} \ln(x^2) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

Soit x et y deux éléments de $]0; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt[3]{xy}) - \frac{1}{3} \ln(x^2) &= \frac{1}{3} \ln(xy) - \frac{1}{3} \ln(x^2) \\ &= \frac{1}{3}(\ln(xy) - \ln(x^2)) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{xy}{x^2}\right) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc : $\ln(\sqrt[3]{xy}) - \frac{1}{3} \ln(x^2) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

4 Montrons que : $\ln x + \ln y \geq 2 \iff \sqrt{xy} \geq e$

Soit x et y deux éléments de $]0; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} \ln x + \ln y \geq 2 &\iff \ln(xy) \geq 2 \\ &\iff \frac{1}{2} \ln(xy) \geq 1 \\ &\iff \ln \sqrt{xy} \geq \ln e \\ &\iff \sqrt{xy} \geq e \end{aligned}$$

Exercice 6



Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas :

1 $f(x) = \ln(2x - 1)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow 2x - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow 2x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Donc : $D = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

2 $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+

Donc : $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

3 $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 4)}{x}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow (x^2 + 4 > 0 \text{ et } x \neq 0)$

puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 + 4 > 0$ alors $x \in D \Leftrightarrow x \neq 0$

Donc : $D =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

4 $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow \left(\frac{2x-1}{x-2} > 0 \text{ et } x-2 \neq 0\right)$

Tableau de signes de $\frac{2x-1}{x-2}$ est le suivant:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$2x - 1$	-	0	+		+
$x - 2$	-		-	0	+
$\frac{2x-1}{x-2}$	+	0	-		+

donc : $x \in D \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup]2; +\infty[\text{ et } x \neq 2$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup]2; +\infty[$$

Donc : $D = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup]2; +\infty[$

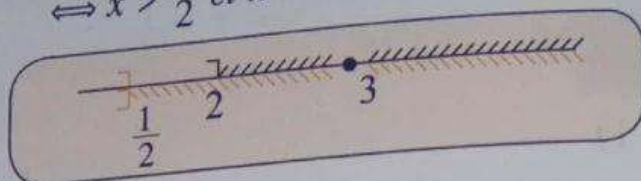
5 $f(x) = \frac{\ln(2x-1)}{\ln(x-2)}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow (2x-1) > 0 \text{ et } x-2 > 0 \text{ et } \ln(x-2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x > 1 \text{ et } x > 2 \text{ et } x-2 \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ et } x > 2 \text{ et } x \neq 3$$



Donc : $D =]2; 3[\cup]3; +\infty[$

Remarque: on remarque que les fonctions : $x \mapsto \ln\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)$ et $x \mapsto \frac{\ln(2x-1)}{\ln(x-2)}$ n'ont pas le même ensemble de définition.

Exercice 7

Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas :

1 $f(x) = \ln((x-2)^2)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow (x-2)^2 > 0$

et comme : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (x-2)^2 \geq 0$:

alors : $x \in D \Leftrightarrow (x-2)^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq 2$$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

2 $f(x) = \ln(|x-2|)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow |x-2| > 0$

puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; |x-2| \geq 0$, alors : $x \in D \Leftrightarrow |x-2| \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq 2$$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

3 $f(x) = \ln(1-|x|)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow 1-|x| > 0$

$$\Leftrightarrow |x| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1; 1[$$

Donc : $D =]-1; 1[$

infos:

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r \text{ avec } r > 0$$

4 $f(x) = \sqrt{\ln x}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } \ln x \geq 0)$
 $\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \geq 1$
 $\Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\ln x$	-	0	+

Donc : $D = [1; +\infty[$

5 $f(x) = \frac{x}{\ln(\frac{x}{2})}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow \frac{x}{2} > 0 \text{ et } \ln(\frac{x}{2}) \neq 0$
 $\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \frac{x}{2} \neq 1$
 $\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq 2$

Donc : $D =]0; 2[\cup]2; +\infty[$

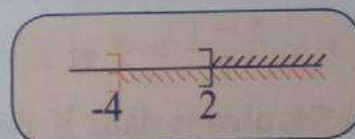
Exercice 8

Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas :

1 $f(x) = \ln(3x - 6) + \ln(x + 4)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} x \in D &\Leftrightarrow 3x - 6 > 0 \text{ et } x + 4 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 2 \text{ et } x > -4 \\ &\Leftrightarrow x > 2 \\ &\Leftrightarrow x \in]2; +\infty[\end{aligned}$$



Donc : $D =]2; +\infty[$

2 $f(x) = \ln(|x^2 - 16|)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow |x^2 - 16| > 0$

et comme : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; |x^2 - 16| \geq 0$ alors : $x \in D \Leftrightarrow |x^2 - 16| \neq 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 - 16 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 4)(x + 4) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq 4 \text{ et } x \neq -4 \end{aligned}$$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{-4; 4\} =]-\infty; -4[\cup]-4; 4[\cup]4; +\infty[$

3 $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} > 0 \text{ et } x \neq 0$

$$x \in \mathbb{D} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} \neq 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq 0$$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{-1, 0\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$

4 $f(x) = \ln(-x^2 + 6x - 5)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 > 0$

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2 + 6x - 5 = 0$

le discriminant de cette équation est : $\Delta = 36 - 20 = 16$

et les solutions sont : $x_1 = \frac{-6-4}{-2} = 5$ et $x_2 = \frac{-6+4}{-2} = 1$

Tableau de signe du trinôme $-x^2 + 6x - 5$ est le suivant :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$-x^2 + 6x - 5$	-	0	+	0	-

donc : $x \in D \Leftrightarrow x \in]1; 5[$

d'où : $D =]1; 5[$

5 $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 7x + 8}\right)$

Soit x un réel, on a : $x \in D \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 7x + 8} > 0$ et $-x^2 + 7x + 8 \neq 0$

► Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 5x + 6 = 0$

le discriminant de cette équation est : $\Delta = 25 - 24 = 1$ et les solutions sont :

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

► Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2 + 7x + 8 = 0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 49 + 32 = 81$ et les solutions sont :

$$x_1 = \frac{-7-9}{-2} = 8 \text{ et } x_2 = \frac{-7+9}{-2} = -1$$

Tableau de signe de l'expression $\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 7x + 8}$ est le suivant :

x	$-\infty$	-1	2	3	8	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	+	+	0	-	0	+	+
$-x^2 + 7x + 8$	-	0	+	+	+	0	-
$\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 7x + 8}$	-	+	0	-	0	+	-

donc : $x \in D \Leftrightarrow x \in]-1; 2[\cup]3; 8[$

d'où : $D =]-1; 2[\cup]3; 8[$

Exercice 9

Dans cet exercice, on désigne par D l'ensemble de définition de l'équation à résoudre et par S son ensemble des solutions.

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $1 - \ln x = 0$

On a : $D =]0; +\infty[$

Soit x un élément de D on a : $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln e$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

Donc : $S = \{e\}$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln\left(\frac{x}{3}\right) = \ln(5)$

On a : $D =]0; +\infty[$

Soit x un élément de D on a : $\ln\left(\frac{x}{3}\right) = \ln(5) \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 5$

$$\Leftrightarrow x = 15$$

Donc : $S = \{15\}$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln x = 2$

On a : $D =]0; +\infty[$

Soit x un élément de D on a : $\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2 \ln(e)$ (car $\ln(e) = 1$)

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln(e^2)$$

$$\Leftrightarrow x = e^2$$

Donc : $S = \{e^2\}$

4 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x \ln(2x - 1) = 0$

► Déterminons D :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow 2x - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Donc : $D = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

► Soit x un élément de D : $x \ln(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } \ln(2x - 1) = 0)$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

et comme $0 \notin D$ et $1 \in D$ alors : $S = \{1\}$

5 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln^2(x) - 3 \ln x = 0$

On a : $D =]0; +\infty[$

Soit x un élément de D , on a :

$$\ln^2(x) - 3 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x (\ln x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } (\ln x = 3 \ln e = \ln e^3)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e^3$$

Donc : $S = \{1, e^3\}$

Exercice 10

Dans cet exercice, on désigne par D l'ensemble de définition de l'équation à résoudre et par S son ensemble de solutions de cette équation.

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(3x-5)$

► Déterminons D :

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow x-2 > 0 \text{ et } x+1 > 0 \text{ et } 3x-5 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \text{ et } x > -1 \text{ et } x > \frac{5}{3}$$

Donc : $D =]2; +\infty[$

► Soit $x \in D$, on a :

$$\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(3x-5) \Leftrightarrow \ln((x-2)(x+1)) = \ln(3x-5)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 - x - 2) = \ln(3x-5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 3x - 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

et comme $1 \notin D$ et $3 \in D$ alors : $S = \{3\}$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2 \ln(x-2) + \ln(3x+1) = 2 \ln 2$

► Déterminons D :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x-2 > 0 \text{ et } 3x+1 > 0$

$$\Leftrightarrow x > 2 \text{ et } x > -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

Donc : $D =]2; +\infty[$

► Soit $x \in D$, on a :

$$\begin{aligned}
 2 \ln(x-2) + \ln(3x+1) &= 2 \ln 2 \iff \ln((x-2)^2) + \ln(3x+1) = \ln(4) \\
 &\iff \ln((x-2)^2(3x+1)) = \ln(4) \\
 &\iff 3x^3 - 12x^2 + 12x + x^2 - 4x + 4 = 4 \\
 &\iff 3x^3 - 11x^2 + 8x = 0 \\
 &\iff x(3x^2 - 11x + 8) = 0 \\
 &\iff x = 0 \text{ ou } 3x^2 - 11x + 8 = 0
 \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation : $3x^2 - 11x + 8 = 0$ est : $\Delta = 121 - 96 = 25$

Les solutions de cette équation sont : $x_1 = \frac{11-5}{6} = 1$ et $x_2 = \frac{11+5}{6} = \frac{8}{3}$

et comme : $0 \notin D$ et $1 \notin D$ et $\frac{8}{3} \in D$, alors : $S = \left\{ \frac{8}{3} \right\}$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E): $6 \ln^2(x) + 7 \ln(x) - 3 = 0$

On a : $D =]0; +\infty[$

Pour résoudre cette équation, on fait le changement de variable suivant, posons : $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $x > 0$.

L'équation (E) devient : (E'): $6X^2 + 7X - 3 = 0$

Le discriminant de (E') est $\Delta = 49 + 72 = 121$

et les solutions sont : $X_1 = \frac{-7-11}{12} = -\frac{3}{2}$ et $X_2 = \frac{-7+11}{12} = \frac{1}{3}$

et comme $X = \ln x$; alors : $\ln x = -\frac{3}{2}$ ou $\ln x = \frac{1}{3}$

C'est-à-dire : $\ln x = -\frac{3}{2} \ln e$ ou $\ln x = \frac{1}{3} \ln e$

C'est-à-dire : $\ln x = \ln(e^{-\frac{3}{2}})$ ou $\ln x = \ln(e^{\frac{1}{3}})$

donc : $x = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}$ ou $x = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$

D'où : $S = \left\{ \sqrt[3]{e}; \frac{1}{e\sqrt{e}} \right\}$

4 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\ln^3(x) - 2 \ln^2(x) - \ln(x) + 2 = 0$

► On a : $D =]0; +\infty[$

► Résolvons l'équation à l'aide d'un changement de variable.

On pose : $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $x > 0$.

L'équation (E) devient (E'): $X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0$

On a : $X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0 \iff (X^3 - X) - 2(X^2 - 1) = 0$
 $\iff X(X^2 - 1) - 2(X^2 - 1) = 0$

$$(E') \Leftrightarrow (X^2 - 1)(X - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 1 = 0 \text{ ou } X - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -1 \text{ ou } X = 2$$

d'où : $\ln x = 1$ ou $\ln x = -1$ ou $\ln x = 2$

C'est-à-dire : $x = e$ ou $\ln x = \ln(e^{-1})$ ou $\ln x = \ln(e^2)$

donc : $x = e$ ou $x = e^{-1}$ ou $x = e^2$

d'où : $S = \{e, e^2, e^{-1}\}$

5 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\ln x - \frac{1}{\ln x} = \frac{15}{4}$

Déterminons D :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0)$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq 1$$

donc : $D =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

Soit $x \in D$, on a : $\ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 1 = \frac{15}{4} \ln x$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^2 - \frac{15}{4} \ln x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(\ln x)^2 - 15 \ln x - 4 = 0$$

Posons $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$.

L'équation (E) devient : (E') : $4X^2 - 15X - 4 = 0$

le discriminant de (E') est : $\Delta = 225 + 64 = 289$

et les solutions de cette équation sont :

$$X_1 = \frac{15 - 17}{8} = -\frac{1}{4} \text{ et } X_2 = \frac{15 + 17}{8} = 4$$

D'où : $\ln x = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \ln e = \ln(e^{-\frac{1}{4}})$ ou $\ln x = 4 = 4 \ln e = \ln e^4$

C'est-à-dire : $x = e^{-\frac{1}{4}}$ ou $x = e^4$ d'où : $S = \{e^4, e^{-\frac{1}{4}}\}$.

Exercice 11

Dans cet exercice, on désigne par D l'ensemble de définition de l'inéquation à résoudre par et par S son ensemble de solutions de cette inéquation.

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln x \leq 0$

On a : $D =]0; +\infty[$

Soit $x \in D$; on a : $\ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln(1)$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq 1$$

d'où : $S =]0; 1]$

 **2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln(2x+3) \geq 0$**

► Déterminons D :

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow 2x+3 > 0$

$$\text{Donc : } D = \left] -\frac{3}{2}; +\infty[\quad \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$$

► Soit x un élément de D , on a :

$$\ln(2x+3) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(2x+3) \geq \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -2$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

$$\text{Donc : } S = [-1; +\infty[$$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2 - \ln x \geq 0$

$$\text{On a : } D =]0; +\infty[$$

Soit x un élément de D , on a :

$$2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq 2 \ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq \ln(e^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq e^2$$

$$\text{Donc : } S =]0; e^2]$$

4 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln x \leq 2 \ln 3$

$$\text{On a : } D =]0; +\infty[$$

Soit x un élément de D , on a :

$$\ln x \leq 2 \ln 3 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln(3^2)$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq \ln(9)$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq 9$$

$$\text{Donc : } S =]0; 9]$$

5 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln x \leq 2 \ln(x+1)$

► Déterminons D , on a : $x \in D \Leftrightarrow x > 0$ et $x+1 > 0$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x > -1$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Donc : } D =]0; +\infty[$$

Soit x un élément de D , on a : $\ln x \leq 2 \ln(x+1) \Leftrightarrow \ln(x) \leq \ln((x+1)^2)$
 $\Leftrightarrow x \leq (x+1)^2$
 $\Leftrightarrow x^2 + x + 1 \geq 0$

et comme $(\forall x \in]0; +\infty[) ; x^2 + x + 1 > 0$, donc : $S =]0; +\infty[$

6 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0$

► Déterminons D .

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 0$ et $x \neq 1$

Dressons le tableau de signes de l'expression $\frac{x+1}{x-1}$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x-1}$	+	0	-	+

d'où : $x \in D \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1; +\infty[$

Ainsi : $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

Soit x un élément de D , on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq \ln(1) \\ &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

Donc : $S =]1; +\infty[$

7 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(1 + \ln x)(2 - \ln x) \geq 0$

On a : $D =]0; +\infty[$

Soit $x \in D$,

on a : $1 + \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq -\ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$$

et on a :

$$2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq 2 \ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq e^2$$

et on a : $1 + \ln x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{e}$ et $2 - \ln x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq e^2$
 d'où le tableau de signes de l'expression $(1 + \ln x)(2 - \ln x)$:

x	0	$\frac{1}{e}$	e^2	$+\infty$
$1 + \ln x$		-	0	+
$2 - \ln x$		+	+	0
$(1 + \ln x)(2 - \ln x)$		-	0	-

On déduit que : $S = \left[\frac{1}{e}; e^2 \right]$

8 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{\ln x}{\ln x - 3} \leq 0$

► Déterminons D :

- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x \neq 3$
 $\Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x \neq \ln(e^3)$
 $\Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq e^3$

Donc : $D =]0; e^3[\cup]e^3; +\infty[$

- Soit $x \in D$; on a : $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$
 $\ln x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$

► Soit $x \in D$; on a : $\ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 3$
 $\Leftrightarrow \ln x > \ln(e^3)$
 $\Leftrightarrow x > e^3$

et on a : $\ln x - 3 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^3$

d'où le tableau de signes de l'expression $\frac{\ln x}{\ln x - 3}$:

x	0	1	e^3	$+\infty$
$\ln x$		-	0	+
$\ln x - 3$		-	-	0
$\frac{\ln x}{\ln x - 3}$		+	0	-

Donc : $S = [1; e^3[$

Exercice 12

On désigne par D l'ensemble de définition de l'inéquation et par S son ensemble de solutions.

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $(E): 2(\ln x)^2 - \ln x - 1 \geq 0$

- On a : $D =]0; +\infty[$

- Soit $x \in D$; posons $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$

L'inéquation (E) devient : $2X^2 - X - 1 \geq 0$

le discriminant de l'équation (E') : $2X^2 - X - 1 = 0$ est : $\Delta = 9$ et ses

solutions sont : $X_1 = \frac{1+3}{4} = 1$ et $X_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

Tableau de signe du trinôme $2X^2 - X - 1$ est le suivant :

X	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$2X^2 - X - 1$	+	0	-	0	+

donc : $2X^2 - X - 1 \geq 0 \Leftrightarrow X \leq -\frac{1}{2}$ ou $X \geq 1$

d'où : $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq -\frac{1}{2}$ ou $\ln x \geq 1$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq -\frac{1}{2} \ln e \text{ ou } \ln x \geq \ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \text{ ou } \ln x \geq \ln e$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ ou } x \geq e$$

Ainsi : $S = \left]0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right] \cup [e; +\infty[$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(\ln x)^2 + \ln x < 0$

on a : $(\ln x)^2 + \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x + 1) < 0$,

et on a : $D =]0; +\infty[$

Soit : $x \in D$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{- Soit } x \in D: \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x > \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

$$\text{et } \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{et } \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

d'où le tableau de signes de l'expression $\ln x(\ln x + 1)$:

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$\ln x$	-	-	0	+
$\ln x + 1$	-	0	+	+
$\ln(x)(\ln x + 1)$	+	0	-	+

Donc : $S = \left[\frac{1}{e}; 1\right[$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(\ln x)^2 - 9 \geq 0$

- On a : $D =]0; +\infty[$

- Soit x un élément de D , on a :

$$(\ln x)^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow |\ln x| \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq 3 \text{ ou } \ln x \leq -3$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq 3 \ln e \text{ ou } \ln x \leq -3 \ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln(e^3) \text{ ou } \ln x \leq \ln(e^{-3})$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^3 \text{ ou } 0 < x \leq e^{-3}$$

Infos :

$$|x| \geq r \Leftrightarrow x \geq r \text{ ou } x \leq -r$$

avec $r > 0$

Donc : $S =]0; e^{-3}] \cup [e^3; +\infty[$

4 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (E) $(\ln x)^2 + 5 \ln x - 6 < 0$

- On a : $D =]0; +\infty[$

posons : $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $x > 0$.

le discriminant de l'équation $X^2 + 5X - 6 = 0$ est $\Delta = 49$ et les solutions de cette équation sont : $X_1 = \frac{-5-7}{2} = -6$ et $X_2 = \frac{-5+7}{2} = 1$

d'où le tableau de signes du trinôme $X^2 + 5X - 6$:

X	$-\infty$	-6	1	$+\infty$	
$X^2 - 5X - 6$	+	0	-	0	+

$$\text{d'où : } X^2 + 5X - 6 < 0 \Leftrightarrow -6 < X < 1$$

$$\text{donc : } (\ln x)^2 + 5 \ln x - 6 < 0 \Leftrightarrow -6 < \ln x < 1$$

$$\Leftrightarrow -6 \ln e < \ln x < \ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-6}) < \ln x < \ln e$$

$$\Leftrightarrow e^{-6} < x < e$$

Donc : $S =]e^{-6}; e[$

5 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{2 \ln x - 1}{1 - \ln x} \leq 0$

- Déterminons D :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x > 0$ et $1 - \ln x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln e$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq e$$

Donc : $D =]0; e[\cup]e; +\infty[$

► Soit x un élément de D

On a :

$$\begin{aligned} 2 \ln x - 1 > 0 &\Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \ln e \\ &\Leftrightarrow \ln x > \ln(e^{\frac{1}{2}}) \\ &\Leftrightarrow \ln x > \ln(\sqrt{e}) \\ &\Leftrightarrow x > \sqrt{e} \end{aligned}$$

et $2 \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

on a :

$$\begin{aligned} 1 - \ln x > 0 &\Leftrightarrow \ln x < 1 \\ &\Leftrightarrow \ln x < \ln e \\ &\Leftrightarrow 0 < x < e \\ \text{et } 1 - \ln x = 0 &\Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

Le tableau de signes de l'expression $\frac{2 \ln x - 1}{1 - \ln x}$ est le suivant:

x	0	$\sqrt{e}$	e	$+\infty$
$2 \ln x - 1$	-	0	+	+
$1 - \ln x$	+	+	0	-
$\frac{2 \ln x - 1}{1 - \ln x}$	-	0	+	-

Donc : $S =]0; \sqrt{e}] \cup]e; +\infty[$

6 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: (E): $\ln(x^2 + 2x - 2) > 0$

- Déterminons D :

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 > 0$

le discriminant de l'équation : $x^2 + 2x - 2 = 0$ est $\Delta = 12$ et ses solutions sont :

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

Donc le tableau de signes du trinôme $x^2 + 2x - 2$ est :

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{3}$	$-1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 + 2x - 2$	+	0	-	+

Ainsi : $D =]-\infty; -1 - \sqrt{3}[\cup]-1 + \sqrt{3}; +\infty[$

Soit x un élément de D , on a :

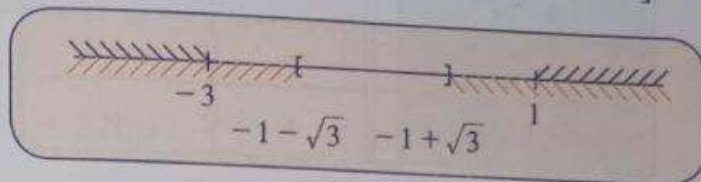
$$\begin{aligned} \ln(x^2 + 2x - 2) > 0 &\Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x - 2) > \ln(1) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 > 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \end{aligned}$$

le discriminant de l'équation : $x^2 + 2x - 3 = 0$ est : $\Delta = 16$ et les solutions de

l'équation : $x^2 + 2x - 3 = 0$ sont : $x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$
donc le tableau de signes du trinôme $x^2 + 2x - 3$ est :

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	+	0	-	0	+

D'où : $x \in S \Leftrightarrow (x \in]-\infty; -1[\cup]-1 + \sqrt{3}; +\infty[) \cap (x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[)$



donc : $S =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$

Remarque : $x \in S \Leftrightarrow x \in D$ et $x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$
 $\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$

Exercice 13

Déterminons D l'ensemble de définition de f dans chaque cas:

1 $f(x) = \frac{x-5}{\ln^2 x - 4 \ln x + 3}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln^2 x - 4 \ln x + 3 \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{et on a : } \ln^2 x - 4 \ln x + 3 &= \ln^2 x - 4 \ln x + 4 - 1 \\ &= (\ln(x) - 2)^2 - 1 \\ &= (\ln(x) - 2 - 1)(\ln(x) - 2 + 1) \\ &= (\ln(x) - 3)(\ln(x) - 1) \end{aligned}$$

D'où : $\ln^2 x - \ln x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq 3$ et $\ln x \neq 1$

$$\Leftrightarrow x \neq e^3 \text{ et } x \neq e$$

donc : $x \in D \Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq e^3$ et $x \neq e$

Ainsi : $D =]0; e[\cup]e; e^3[\cup]e^3; +\infty[$

2 $f(x) = \sqrt{3 - \ln x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x > 0$ et $3 - \ln x \geq 0$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \leq 3 \ln e$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \leq \ln(e^3)$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \leq e^3$$

Donc : $D =]0; e^3]$

3 $f(x) = \sqrt{(x-1)\ln x}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x > 0$ et $(x-1)\ln x \geq 0$

Dressons le tableau de signes de $(x-1)\ln x$:

x	0	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
$\ln x$	-	0	+
$(x-1)\ln x$	+	0	+

D'où : $D =]0; +\infty[$

2 Limites usuelles

en 0^+

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^-$
($n \in \mathbb{N}^*$)

en $+\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$
 $n \in \mathbb{N}^*$

en 0 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

en 1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Exercices

Exercice 14

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} + x$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 - \frac{\ln x}{x^3}$

3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{4x}$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 - \ln x + 3$

5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 \ln x$

6 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$

Exercice 15

Calculer les limites suivantes:

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 - \ln x$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x}$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x$

5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)\ln x}{x^2}$

Exercice 16

Calculer les limites suivantes, en utilisant le changement de variable donné :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{4}{x}\right) \quad (\text{poser } X = \frac{4}{x})$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2 - x^2)}{x^2 - 1} \quad (\text{poser } X = 1 - x^2)$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(1 + \sqrt{x - 2})}{x - 2} \quad (\text{poser } X = \sqrt{x - 2})$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad (\text{poser } X = \frac{x+1}{x-1})$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 2) \ln(x - 1) \quad (\text{poser } X = x - 1)$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x - e} \quad (\text{poser } X = \frac{x}{e})$$

Exercice 17

Calculer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\ln x - 2} \quad 2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)} \quad (\text{poser: } x = t^{\frac{3}{2}})$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3} \quad 4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{x} \quad 6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) \quad 8 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

Solutions

Exercice 14

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln x} + x\right)$:

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$ (car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$) et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln x} + x\right) = 0$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 - \frac{\ln x}{x^3}$:

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 1 - \frac{\ln x}{x^3}\right) = +\infty$

3 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{4x}$:

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{4}$ (car : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$)

4 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 - \ln x + 3$:

Soit $x \in]1; +\infty[$, on a : $(\ln x)^2 - \ln x + 3 = \ln x \left(\ln x - 1 + \frac{3}{\ln x} \right)$

et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - 1 + \frac{3}{\ln x} \right) = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 - \ln x + 3 = +\infty$

Autre méthode : On peut poser : $t = \ln x$, on a : $x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2 x - \ln x + 3 = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 - t + 3 = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$$

5 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x)$:

Soit $x \in \mathbb{R}^{++}$, on a : $x - 2 \ln x = x \left(1 - 2 \cdot \frac{\ln x}{x} \right)$

et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 2 \cdot \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$

6 Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

Soit $x \in (\mathbb{R}^{++} - \{1\})$, on a : $\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{\ln x}{(x-1)(x+1)} = \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x+1}$

et comme : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$; Alors : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$

Exercice 15

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 - \ln x$:

Soit : $x \in]0; +\infty[$, on a : $x^2 + x + 1 - \ln x = x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right)$

et comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right) = 1$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 - \ln x = +\infty$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$:

soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\frac{x - \ln x}{x + \ln x} = \frac{x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right)} = \frac{1 - \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{\ln x}{x}}$

et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{\ln x}{x}} = 1$

3 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x}$:

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ et $(\forall x \in]1; +\infty[)$; $\frac{\ln x}{x^2} > 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = +\infty$

4 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x$:

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \ln(x^2 + 1) - x &= \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) - x = \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - x \\ &= 2 \ln(x) - x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = x\left(2 \cdot \frac{\ln x}{x} - 1\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

et comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ et la fonction $\ln$ est continue en 1 ;

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$$

$$\text{et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(2 \cdot \frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x = -\infty$$

5 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$:

$$\text{Soit } x \text{ un élément de }]1; +\infty[, \text{ on a : } \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{\ln x}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$\text{et comme : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 ; \text{ Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = 0$$

6 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)\ln x}{x^2}$:

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on a :

$$\frac{(x+1)\ln x}{x^2} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{\ln x}{x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{et comme : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)\ln x}{x^2} = 0$$

Exercice 16

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{4}{x}\right)$: à l'aide du changement de variable $X = \frac{4}{x}$

$$\text{On a : } x \rightarrow +\infty \Rightarrow X \rightarrow 0 \text{ et } x = \frac{4}{X}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{4}{x}\right) &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{4}{X} \ln(1 + X) = \lim_{X \rightarrow 0} 4 \times \frac{\ln(1 + X)}{X} = 4 \\ &\quad (\text{car : } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1) \end{aligned}$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{4}{x}\right) = 4$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2 - x^2)}{x^2 - 1}$: en posant : $X = 1 - x^2$

On a : $x \rightarrow 1 \Rightarrow X \rightarrow 0$ et : $x^2 = 1 - X$

donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2 - x^2)}{x^2 - 1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - (1 - X))}{1 - X - 1} = \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{\ln(1 + X)}{X}$
 $= -1$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2 - x^2)}{x^2 - 1} = -1$

3 Calculons $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(1 + \sqrt{x - 2})}{x - 2}$: en posant : $X = \sqrt{x - 2}$

On a : $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow X \rightarrow 0^+$ et $x - 2 = X^2$

donc : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(1 + \sqrt{x - 2})}{x - 2} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X^2}$
 $= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} \times \frac{1}{X}$ (car $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$
 $= +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} = +\infty$)

D'où : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(1 + \sqrt{x - 2})}{x - 2} = +\infty$

4 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$: en posant : $X = \frac{x+1}{x-1}$

On a d'une part : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$

donc : $x \rightarrow +\infty \Rightarrow X \rightarrow 1$

et d'autre part : $X = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow x+1 = X(x-1)$

$\Leftrightarrow x+1 = Xx - X$

$\Leftrightarrow x - Xx = -1 - X$

$\Leftrightarrow x(1 - X) = -(1 + X)$

$\Leftrightarrow x = \frac{X+1}{X-1}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{X \rightarrow 1} \frac{X+1}{X-1} \ln(X) = \lim_{X \rightarrow 1} (X+1) \times \frac{\ln(X)}{X-1}$
 $= 2$

car : $\lim_{X \rightarrow 1} \frac{\ln(X)}{X-1} = 1$ et $\lim_{X \rightarrow 1} (X+1) = 2$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2$

5 Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 2) \ln(x - 1)$: en posant : $X = x - 1$

On a d'une part : $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow X \rightarrow 0^+$

et d'autre part : $x = X + 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (X + 1)^2 - 3(X + 1) + 2$
 $= X^2 - X = X(X - 1)$

donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 2) \ln(x - 1) = \lim_{X \rightarrow 0^+} (X - 1)X \ln(X) = 0$

car : $\lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} (X - 1) = -1$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 2) \ln(x - 1) = 0$

6 Calculons $\lim_{x \rightarrow e} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x - e}$: en posant : $X = \frac{x}{e}$

On a : $x \rightarrow e \Rightarrow X \rightarrow 1$ et $x = eX$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x - e} &= \frac{(\ln(eX))^2 + 2 \ln(eX) - 3}{eX - e} = \frac{(\ln X + 1)^2 + 2(1 + \ln X) - 3}{e(X - 1)} \\ &= \frac{(\ln X)^2 + 2 \ln X + 1 + 2 + 2 \ln X - 3}{e(X - 1)} = \frac{(\ln X)^2 + 4 \ln X}{e(X - 1)} \\ &= \frac{\ln X}{X - 1} \times \frac{\ln X + 4}{e} \end{aligned}$$

et comme : $\lim_{X \rightarrow 1} \frac{\ln X}{X - 1} = 1$ et $\lim_{X \rightarrow 1} \frac{\ln X + 4}{e} = \frac{4}{e}$

alors : $\lim_{x \rightarrow e} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x - e} = \frac{4}{e}$

Exercice 17

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\ln x - 2}$:

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 2) = -\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\ln x - 2} = 0$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)}$:

Soit $x \in]0; 1[$, on a : $1 - \ln x > 0$ et $x > 0$ donc : $x(1 - \ln x) > 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - x \ln x = 0^+$, car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = +\infty$

3 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3}$:

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{x} = 0$ (car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$)

4 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$: en posant : $x = t^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{t})^3$

on a : $t \rightarrow +\infty \iff x \rightarrow +\infty$

$$\text{donc : } \frac{(\ln x)^3}{x^2} = \frac{(\ln(t^{\frac{3}{2}}))^3}{(t^{\frac{3}{2}})^2} = \frac{\left(\frac{3}{2} \ln(t)\right)^3}{t^3} = \frac{27}{8} \left(\frac{\ln t}{t}\right)^3 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{27}{8} \left(\frac{\ln t}{t}\right)^3 = 0$$

5 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{x}$:

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{x} &= \frac{\ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} = \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \\ &= \frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \end{aligned}$$

et comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ et la fonction $\ln$ est continue en 1 ;

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0, \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{x} = 0$$

6 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in]-1, 0[\cup]0, 1[, \text{ on a : } \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \frac{1}{x} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) \\ &= \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x} \\ &= \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+(-x))}{(-x)} \end{aligned}$$

$$\text{et comme : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+(-x))}{(-x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \quad (\text{on pose : } t = -x)$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2$$

7 Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$:

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$$

et la fonction $\ln$ est continue en 2 ;

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \ln 2$$

8 Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$:

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+2}{x-1}\right) = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow 1^+} x+2 = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0$ et $x-1 > 0$ pour tout x de l'intervalle $]1; +\infty[$).

et comme : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$; alors : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = +\infty$

3 La dérivée logarithmique - la dérivée de la fonction composée $\ln(u)$

Définition:

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que : $(\forall x \in I) ; u(x) \neq 0$

La fonction : $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction u sur l'intervalle I .

Propriété:

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que :

$(\forall x \in I) ; u(x) \neq 0$, alors la fonction : $f: x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et

on a : $(\forall x \in I) ; f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exercices

Exercice 18

1 Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 \ln x}{1 + \ln x} & ; x \in \left[0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a. Montrer que f est continue à droite en 0.

b. Montrer que f est dérivable à droite en 0.

2 Soit g la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{x \ln(1+x)}$

a. Étudier la dérivabilité de g à droite et à gauche en 0

b. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

Exercice 19

Étudier la dérivabilité de f sur l'intervalle I , puis calculer $f'(x)$ dans chaque cas :

1 $f(x) = x^2 - \ln x$; $I =]0; +\infty[$

4 $f(x) = (\ln x)^4$; $I =]0; +\infty[$

2 $f(x) = \ln(2x + 1)$; $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

5 $f(x) = \frac{1}{\ln x}$; $I =]1; +\infty[$

3 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $I =]0; +\infty[$

6 $f(x) = \sqrt{\ln x}$; $I =]1; +\infty[$

Exercice 20

Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = x^2 \ln x$

5 $f(x) = (x^2 - x) \ln(x)$

2 $f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$

6 $f(x) = (1 - 2 \ln x)^3$

3 $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

7 $f(x) = \frac{2x - \ln x}{\ln x - 2}$

4 $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)$

Exercice 21

Étudier les variations de la fonction f (Ensemble de définition - limites - la fonction dérivée et le tableau de variations) dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = x^2 - \ln x$

3 $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

2 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

4 $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 Montrer que f est une fonction paire.

2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3 a. Montrer que f est continue en 0.

b. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1 Montrer que f est continue à droite en 0.
- 2 Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
- 3 Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- 4 Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.

Solutions

Exercice 18

1 a. Étudions la continuité de f à droite en 0.

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x}{1 + \ln x} = 0 = f(0)$

Donc f est continue à droite en 0.

b. Étudions la dérivabilité de f à droite en 0.

Soit $x \in]0, \frac{1}{e}[$, on a : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$

et comme : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

Donc f est dérivable à droite en 0 et : $f'_d(0) = 0$

2 a. Étudions la dérivabilité de g à droite en $x_0 = 0$.

On a : $g(0) = 0$

Soit : $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\sqrt{x \ln(1+x)}}{x} = \sqrt{\frac{x \ln(1+x)}{x^2}} = \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et la fonction racine carrée est continue en 1,

alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \sqrt{1} = 1$

donc g est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et on a : $g'_d(0) = 1$.

► Étudions la dérivabilité de f à gauche en 0.

Soit $x \in]-1; 0[$, on a : $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x \ln(1+x)}}{x}$

$$= -\sqrt{\frac{x \ln(1+x)}{x^2}} = -\sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, alors : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}} = 1$
 donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}} \right) = -1$
 d'où g est dérivable à gauche en 0, et on a : $g'_g(0) = -1$
 Ainsi g est non dérivable en 0, car : $g'_g(0) \neq g'_d(0)$

infos:

$$\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

équation de la demi-tangente au point:

$M_0(x_0; f(x_0))$ à droite.

b. L'interprétation géométrique :

La courbe de la fonction g admet deux demi-tangentes (T_1) et (T_2) au point O de coefficients directeurs respectifs 1 et -1, et ayant pour équations:

$$(T_1): \begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases} ; \quad (T_2): \begin{cases} y = -x \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 19

Étudions la dérivabilité de f sur I , puis calculons $f'(x)$.

1 $f(x) = x^2 - \ln(x)$; $I =]0; +\infty[$

► La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) en particulier sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.

► La fonction $x \mapsto -\ln x$ est dérivable sur $I =]0; +\infty[$,
 donc f est dérivable sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} \text{ pour tout } x \in I.$$

infos:

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$

2 $f(x) = \ln(2x + 1)$; $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

On a : $x \mapsto 2x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction affine) en particulier sur l'intervalle $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

et on a : $(\forall x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[); 2x + 1 > 0$

donc la fonction $x \mapsto \ln(2x + 1)$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

c'est-à-dire la fonction f est dérivable sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

$$\text{et on a : } f'(x) = \frac{(2x+1)'}{2x+1} = \frac{2}{2x+1} \text{ pour tout } x \in I ..$$

3 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $I =]0; +\infty[$

On a : f est dérivable sur I car c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur I : ($x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x$).

et on a : $(\forall x \in I); f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

4 $f(x) = (\ln x)^4; I =]0; +\infty[$

infos:

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

f est une fonction dérivable sur $I =]1; +\infty[$ car la fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $I : (\forall x \in I); f'(x) = 4(\ln x)'(\ln x)^3 = \frac{4}{x} \cdot (\ln x)^3$

5 $f(x) = \frac{1}{\ln x}; I =]1; +\infty[$

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, en particulier sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$:

et $(\forall x \in]1; +\infty[); \ln x \neq 0$

donc la fonction f est dérivable sur I (car c'est l'inverse d'une fonction dérivable non nulle).

et on a : $f'(x) = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$ pour tout $x \in I$.

6 $f(x) = \sqrt{\ln x}; I =]1; +\infty[$

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ en particulier sur I ;

et comme : $(\forall x \in]1; +\infty[); \ln x > 0$ alors la fonction f est dérivable sur

$]1; +\infty[$, et on a : $(\forall x \in]1; +\infty[); f'(x) = \frac{(\ln x)'}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

Donc : $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ pour tout $x \in I$.

Exercice 20

Calculons $f'(x)$ dans chaque cas:

1 $f(x) = x^2 \ln x$

On a : $D_f =]0; +\infty[$, et $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$

Donc : $f'(x) = x(2 \ln(x) + 1)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

2 $f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$

On a : $D_f =]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x + 1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$

Donc : $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

3 $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

On a : $D_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)'}{x^2 + x + 1} = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$ Donc : $f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$

4 $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)$

On a : $D_f =]-\frac{1}{2}; 4[$

et $f'(x) = \frac{\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)'}{\frac{2x+1}{4-x}} = \frac{\frac{9}{(4-x)^2}}{\frac{2x+1}{4-x}} = \frac{9}{(4-x)^2} \times \frac{4-x}{2x+1} = \frac{9}{(4-x)(1+2x)}$

Donc : $f'(x) = \frac{9}{(4-x)(2x+1)}$ pour tout x de $]-\frac{1}{2}; +4[$.

5 $f(x) = (x^2 - x) \ln x$

on a : $D_f =]0; +\infty[$

et : $f'(x) = (2x-1) \ln x + (x^2 - x) \times \frac{1}{x} = (2x-1) \ln x + x(x-1) \times \frac{1}{x}$
 $= (2x-1) \ln(x) + x - 1$

Donc : $(\forall x \in D_f) ; f'(x) = (2x-1) \ln(x) + x - 1$

6 $f(x) = (1 - 2 \ln x)^3$

On a : $D_f =]0; +\infty[$,

et $f'(x) = 3(1 - 2 \ln x)' (1 - 2 \ln x)^2 = 3\left(-\frac{2}{x}\right)(1 - 2 \ln x)^2$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = -\frac{6}{x}(1 - 2 \ln x)^2$

7 $f(x) = \frac{2x - \ln x}{\ln x - 2}$

On a : $D_f =]0; e^2[\cup]e^2; +\infty[$, et

$f'(x) = \frac{\left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) - (2x - \ln x) \times \frac{1}{x}}{(\ln x - 2)^2} = \frac{2 \ln x - 4 - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2 + \frac{\ln x}{x}}{(\ln x - 2)^2}$
 $= \frac{2 \ln x + \frac{2}{x} - 6}{(\ln x - 2)^2} = \frac{2x \ln x - 6x + 2}{x(\ln x - 2)^2}$

Donc : $(\forall x \in D_f) ; f'(x) = \frac{2(x \ln x - 3x + 1)}{x(\ln x - 2)^2}$

Exercice 21

Étudions les variations de f dans chaque cas :

1 $f(x) = x^2 - \ln x$

- déterminons l'ensemble de définition D :

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x > 0$

donc : $D =]0; +\infty[$

- Calculons les limites de f aux bornes de D :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - \ln x = +\infty$

Soit $x > 0$, on a : $f(x) = x^2 - \ln x = x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right)$ et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$,

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- Calcul de la fonction dérivée :

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

- Tableau de variations.

On a le signe de $f'(x)$ est celui de $2x^2 - 1$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$,

Soit $x > 0$, on a : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d'où le tableau de variations de f est le suivant:

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	$\frac{1 + \ln 2}{2}$	$+\infty$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \ln(\sqrt{2}) = \frac{1 + \ln 2}{2}$$

2 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

- Déterminons l'ensemble de définition D :

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } x \neq 0)$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$$

Donc : $D =]0; +\infty[$

- Calculons les limites de f aux bornes de D :

▶ On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

▶ On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- Calcul de la fonction dérivée:

f est dérivable sur $]0; +\infty[$;

$$\text{On a : } (\forall x > 0) f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

- Tableau de variations :

On a le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\text{Donc : } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \quad \text{et } 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq \ln e$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq e$$

D'où le tableau de variations de f est le suivant :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

3 $f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

- Déterminons l'ensemble de définition D .

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0$ et $x \neq 0$

Dressons le tableau de signe de $\frac{x+1}{x}$:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
x	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x}$	+	0	-	+

$$\text{d'où : } x \in D \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

$$\text{Donc : } D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

Calculons les limites aux bornes de D :

► au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

On a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et la fonction $\ln$ continue au point 1;

Donc : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1) = 0$

► à gauche en -1:

On a : $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{x} = 0$ et $(\forall x \in]-\infty, -1[); \frac{x+1}{x} > 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty$;

Alors : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\infty$

► à droite en 0:

on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = +\infty$

- Calculons $f'(x)$:

Pour tout x de $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

- Tableau de variations de f :

On a : $(\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[); f'(x) < 0$, d'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-			-
f	1 ↘ -	$-\infty$	$+\infty$ ↘ 1	

4 $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$

- Déterminons l'ensemble de définition D :

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0$

le discriminant du trinôme $x^2 - x + 1$ est : $\Delta = -3$

on a : $\Delta < 0$ et $(a > 0)a = 1$, alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - x + 1 > 0$

Donc : $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

- Calculons les limites aux bornes de D .

on a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 - x + 1 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$

Donc : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty$

- Calculons $f'(x)$:

On a : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto x^2 - x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 - x + 1 > 0$.

et on a : $f'(x) = \frac{(x^2 - x + 1)'}{x^2 - x + 1} = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

- Tableau de variations de f :

on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 - x + 1 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2x - 1$.

D'où le tableau de variations de f est comme suite:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$-\infty$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$+\infty$

Exercice 22

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right); x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 Montrons que f est une fonction impaire.

- On a : $D = \mathbb{R}$ alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; -x \in \mathbb{R}$

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(-x) = -x \ln\left(1 + \frac{1}{(-x)^2}\right) = -x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -f(x)$
et $f(0) = 0$.

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = -f(x)$

D'où f est une fonction impaire.

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f(x) &= x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x} \times x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ (on pose $X = \frac{1}{x^2}$)

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3 a. Montrons que f est continue en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = x \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$
 $= x \ln(x^2+1) - x \ln(x^2)$
 $= x \ln(x^2+1) - 2x \ln(|x|)$

à droite en 0 : on a, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x^2+1) - 2x \ln x = 0 = f(0)$

car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2+1) = 0$

Donc f est continue à droite en 0.

à gauche en 0 : on a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \ln(x^2+1) - 2x \ln(-x)$
 $= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln(t^2+1) + 2t \ln(t) = 0 = f(0)$

(on pose : $t = -x$, on a : $x \rightarrow 0^- \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$)

donc f est continue à gauche en 0.

Remarque: on peut étudier la continuité de f à gauche en 0, sachant que f est impaire, en effet on a :

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -f(-x)$
 $= \lim_{t \rightarrow 0^+} -f(t)$ (on pose : $t = -x$)
 $= 0 = f(0)$

Conclusion : f est continue en 0.

b. Étudions la dérivabilité de f en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

et comme : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 23

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 Montrons que f est continue à droite en 0.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f(x) &= \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\ln(1+x)}{x} \times \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\text{et comme } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$$

Donc f est continue à droite en 0.

2 Étudions la dérivabilité de f à droite en 0.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{et comme : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

3 Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f(x) &= \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} = \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{et comme : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \text{ (on pose : } t = \sqrt{x} \text{)}$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

4 Calculons $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$:

$$f \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[, \text{ et on a : } f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(1+x)}{x}$$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{2x - \ln(1+x)}{2x\sqrt{x}(1+x)}$

4 Fonctions logarithmes de base a avec $a \in \mathbb{R}^{++} - \{1\}$

Définition:

Soit $a \in \mathbb{R}^{++} - \{1\}$.

La fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ est appelée la fonction logarithme de base a , et on la note $\log_a$.

Conséquences:

$\triangleright \log_a(1) = 0$; $\triangleright D_{\log_a} =]0; +\infty[$; $\triangleright \log_a(a) = 1$; $\triangleright \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

Propriétés:

Pour tout x et y de $]0; +\infty[$ et pour tout élément r de $\mathbb{Q}$ on a :

$\triangleright \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ $\triangleright \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
 $\triangleright \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ $\triangleright \log_a(x^r) = r \log_a(x)$

Logarithme de base 10:

$\triangleright (\forall x \in]0; +\infty[) \log(x) = \frac{\ln x}{\ln(10)}$ $\triangleright \log(10) = 1$
 $\triangleright \log(10^r) = r$ pour tout r élément de $\mathbb{Q}$

Exercices

Exercice 24

- 1 Simplifier les nombres $a = \log_2 4$; $b = \log_{\frac{1}{2}}(2)$ et $c = \log_8 64$
- 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(\log_3 x) \cdot (\log_{27} x) = \frac{1}{3}$

Exercice 25

- 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a. $\log(x+2) + \log x = 1$
- b. $\log_{\sqrt{2}}(x-1) - \log_{\sqrt{2}}(2x+1) = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)$
- c. $\log_3(2-x) + \log_9(x+3) = \log_3(\sqrt{2-x})$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\log_a x = \log_x a$; avec $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\log_3 x)^2 + 4 \log_3 x = 5$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $\log_5(x+3) < \log_5(2x)$

b. $\log_{0,5}(3x-1) > \log_{0,5}(x+1)$

Exercice 26

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(E): \begin{cases} x + y = 1 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$$

$$(F): \begin{cases} 3 \log x - \log y = -2 \\ \log(xy) = 6 \end{cases}$$

Solutions

Exercice 24

1 Simplifions a , b et c

On a :

$$\begin{aligned} a &= \log_2 4 \\ &= \log_2 2^2 \\ &= 2 \log_2(2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \log_{\frac{1}{2}}(2) \\ &= \frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{2}} \\ &= -\frac{\ln 2}{\ln 2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$b = -\log_{\frac{1}{2}}(2) = -1$$

$$\begin{aligned} c &= \log_8 64 \\ &= \log_8 8^2 \\ &= 2 \log_8 8 \\ &= 2 \end{aligned}$$

infos:

On a :

aussi $\log_a(a) = 1$ et toutes les propriétés de la fonction $\ln$ restent valables pour la fonction $\log_a$.

2 Déterminons les solution de l'équation : (E) $\log_3 x \cdot \log_{27} x = \frac{1}{3}$

L'ensemble de définition de l'équation est $]0; +\infty[$;

Soit x de $]0; +\infty[$, on a :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 3} \times \frac{\ln x}{\ln 27} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^2 = \frac{1}{3} \ln 3 \ln 3^3 = (\ln 3)^2$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln 3 \text{ ou } \ln x = -\ln 3$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln 3 \text{ ou } \ln x = \ln \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{3}$$

infos:

$$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$$

$$\log x = y \Leftrightarrow x = 10^y$$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

avec : $a > 0$ et $a \neq 1$

Les solutions de l'équation (E) sont 3 et $\frac{1}{3}$ donc : $S = \left\{ \frac{1}{3}; 3 \right\}$

1 a. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E_1): \log(x+2) + \log x = 1$

Soit D l'ensemble de définition de l'équation (E_1) .

$$\begin{aligned} \text{On a : } x \in D &\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } x+2 > 0 \text{ et } x > 0) \\ &\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } x > -2 \text{ et } x > 0) \\ &\Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc : } D =]0; +\infty[$$

Soit x un élément de D on a :

$$\begin{aligned} \log(x+2) + \log x = 1 &\Leftrightarrow \log(x(x+2)) = 1 \\ &\Leftrightarrow \log(x(x+2)) = \log 10 \\ &\Leftrightarrow x(x+2) = 10 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 10 = 0 \end{aligned}$$

et puisque le discriminant de l'équation $x^2 + 2x - 10 = 0$ est $\Delta = 44$

alors les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 10 = 0$ sont : $-1 + \sqrt{11}$ et $-1 - \sqrt{11}$

et puisque : $-1 + \sqrt{11} > 0$ et $-1 - \sqrt{11} < 0$

alors l'ensemble de solutions de l'équation (E_1) est : $S = \{-1 + \sqrt{11}\}$

b. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E_2): \log_{\sqrt{2}}(x-1) - \log_{\sqrt{2}}(2x+1) = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)$

Soit D l'ensemble de définition de l'équation (E_2) , on a :

$$\begin{aligned} x \in D &\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } x-1 > 0 \text{ et } 2x+1 > 0) \\ &\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } x > 1 \text{ et } x > -\frac{1}{2}) \\ &\Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } D =]1; +\infty[$$

Soit x un élément de D , on a :

$$\begin{aligned} \text{L'équation } (E_2) &\Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right) = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x+1} = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow 3x-3 = 2x+1 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

et puisque : $4 \in D$ alors : $S = \{4\}$

c. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E_3): \log_3(2-x) + \log_9(x+3) = \log_3(\sqrt{2-x})$

Soit D l'ensemble de définition de l'équation (E_3) , on a :

$$x \in D \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } 2-x > 0 \text{ et } x+3 > 0)$$

$$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } x < 2 \text{ et } x > -3)$$

$$\Leftrightarrow x \in]-3; 2[$$

$$\text{d'où : } D =]-3; 2[$$

$$\text{Soit } x \text{ un élément de } D, \text{ on a : } \log_3(2-x) = \frac{\ln(2-x)}{\ln 3}$$

$$\text{et } \log_9(x+3) = \frac{\ln(x+3)}{\ln 9} = \frac{\ln(x+3)}{2 \ln 3}$$

$$\text{et } \log_3(\sqrt{2-x}) = \frac{\ln(\sqrt{2-x})}{\ln 3} = \frac{\ln(2-x)}{2 \ln 3}$$

$$\text{donc : } (E_3) \Leftrightarrow \frac{\ln(2-x)}{\ln 3} + \frac{\ln(x+3)}{2 \ln 3} = \frac{\ln(2-x)}{2 \ln 3}$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln(2-x) + \ln(x+3) = \ln(2-x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2-x) + \ln(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln((2-x)(x+3)) = \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow (2-x)(x+3) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 5 = 0$$

et comme les solutions de l'équation $x^2 + x - 5 = 0$ sont :

$$\frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \text{ et } \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \text{ et on a : } -3 < \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} < 2 \text{ et } -3 < \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} < 2$$

Alors l'ensemble de solutions de l'équation (E_3) est : $S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \right\}$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E_4): \log_a x = \log_x a$

L'équation (E_4) est définie sur $D = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

$$\text{Soit } x \text{ un élément de } D, \text{ on a : } \log_a x = \log_x a \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln a}{\ln x}$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^2 = (\ln a)^2$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln a \text{ ou } \ln x = -\ln a$$

$$\Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = \frac{1}{a}$$

et puisque : $a \in D$ et $\frac{1}{a} \in D$, alors : $S = \left\{ a; \frac{1}{a} \right\}$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E_5): (\log_3 x)^2 + 4 \log_3 x = 5$

L'équation (E_5) est définie sur $D =]0; +\infty[$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on pose : $X = \log_3 x$

L'équation (E_5) devient : $X^2 + 4X = 5$ c'est-à-dire : $X^2 + 4X - 5 = 0$

on a : $X^2 + 4X - 5 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = -5$

et on a : $\log_3 x = 1 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 3$
 $\Leftrightarrow x = 3$

$$\log_3 x = -5 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 3^{-5}$$

$$\Leftrightarrow x = 3^{-5} = \frac{1}{243}$$

Donc : $S = \left\{3; \frac{1}{243}\right\}$

4 a. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(S_1): \log_5(x+3) < \log_5(2x)$

L'inéquation (S_1) est définie si et seulement si $x+3 > 0$ et $2x > 0$;

c'est-à-dire : $x > -3$ et $x > 0$.

d'où : $x > 0$, donc $D =]0; +\infty[$.

or la fonction $\log_5$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

donc : $\log_5(x+3) < \log_5(2x) \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } x+3 < 2x)$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 3 < x$$

$$\Leftrightarrow x \in]3; +\infty[$$

donc l'ensemble de solutions de l'inéquation (S_1) est : $S =]3; +\infty[$

b. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(S_2): \log_{0,5}(3x-1) > \log_{0,5}(x+1)$

L'inéquation (S_2) est définie sur $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$

et puisque la fonction $\log_{0,5}$ est strictement décroissante sur l'intervalle

$]0; +\infty[$; alors $(S_2) \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$ et $3x-1 < x+1$

$$\Leftrightarrow x < 1 \text{ et } x > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{3}; 1\right[$$

D'où l'ensemble de solutions de l'inéquation (S_2) est : $\left]\frac{1}{3}; 1\right[$

infos:

► $\log_a$ est strictement croissante si $a > 1$

► $\log_a$ est strictement décroissante si $0 < a < 1$

Exercice 26

► Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (E) :

les conditions d'existence du système (E) est : $x > 0$ et $y > 0$

$$\begin{aligned} \text{on a : (E)} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{y} = 10^{-1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 10x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{11} \\ y = \frac{10}{11} \end{cases} \end{aligned}$$

et comme : $\frac{1}{11} > 0$ et $\frac{10}{11} > 0$ alors la solution du système (E) est le couple $\left(\frac{1}{11}; \frac{10}{11}\right)$

$$\text{Donc : } S = \left\{\left(\frac{1}{11}; \frac{10}{11}\right)\right\}$$

► Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (F) :

les conditions d'existence du système (F) est : $x > 0$ et $y > 0$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \log x = 4 & (1) + (2) \\ \log y = 6 - \log x & (2) \end{cases} \\ (F) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \log x - \log y = -2 & (1) \\ \log x + \log y = 6 & (2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10^5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^1 \\ \log y = 6 - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

et puisque $10 > 0$ et $10^5 > 0$ alors la solution du système (F) est le couple $(10; 10^5)$.

$$\text{Finalement : } S = \left\{\left(\frac{1}{11}; \frac{10}{11}\right)\right\}$$

Exercices de synthèse

Exercices

Exercice 27

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln(x)}$

2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln(x)}$

4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x}$

5 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+8}{1-x^2}\right)$

6 $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3-8)$

7 $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2-1) \ln(7x^3+4x^2+3)$

8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) - x \ln(x+2)$

9 $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \ln(\ln x)$

Exercice 28

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \ln(1+x^2)$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2 a. Vérifier que : $f(x) = x + 2 \ln|x| + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

b. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

3 Étudier les branches infinies de la courbe (C) .

Exercice 29

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1 Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2 Étudier les branches infinies de (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

3 Étudier la position relative de la courbe (C) avec la droite (D) d'équation $y = x - 1$.

Exercice 30

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

- 1 Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- 3 a. Montrer que f est une fonction impaire.
 b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = -\frac{1}{2} \ln(3 - 2\sqrt{2})$
 c. Montrer que pour tout r appartenant à $\mathbb{Q}$ on a : $f\left(\frac{e^r - e^{-r}}{2}\right) = r$

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$

- 1 a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 b. Montrer que : $f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.
- 2 a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
 b. Montrer que : $1,3 < \alpha < 1,35$.
- 3 Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice 32

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln|x^2 - 2x - 3|$

- 1 a. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f .
 b. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- 2 Soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 a. Montrer que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe (C) .
 b. Étudier les branches infinies de la courbe (C) .

Exercice 33

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 3 \ln(x) + 1 - x^3$

Soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1 a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 b. Étudier les branches infinies de la courbe (C) .

- 2 a.** Calculer $f'(x)$ pour tout élément x de $]0; +\infty[$; puis donner le tableau de variations de f .
- b.** Construire la courbe (C) .
- 3** Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par : $g(x) = f(x)$
- a.** Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b.** Construire dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .

Exercice 34

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (2 - \ln x) \ln x$
 Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1 a.** Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b.** Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$
- c.** Étudier les branches infinies de la courbe (C) .
- 2 a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$
- b.** Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 3 a.** Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{2}{x}(1 - \ln x)$.
- b.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f .
- 4 a.** Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); f''(x) = \frac{2}{x^2}(\ln(x) - 2)$
- b.** Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion A dont on déterminera les coordonnées;
- c.** Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A .
- 5** Construire (T) et (C) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 35

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$

- 1 a.** Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- b.** Montrer que : $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$:
- c.** Donner le tableau de variations de f .

2 a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$

b. Montrer que : $f([0; 1]) \subset [0; 1]$

3 On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a. Montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante;

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 36

I Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - x - \ln(x)$

1 Montrer que : $g'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$

2 Donner le tableau de variations de g .

3 En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

II Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$ et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

b. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

c. En déduire la nature de la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

2 a. Montrer que : $f'(x) = 2\left(\frac{x^2 - \ln x}{x}\right)$ pour tout x de $]0; +\infty[$

b. Vérifier que $g(x) + x = x^2 - \ln x$ pour tout x de $]0; +\infty[$, puis donner le tableau de variations de f .

3 a. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point $A(1; 0)$

b. Construire dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la tangente (T) et la courbe (C)

(On admet que (C) admet un seul point d'inflexion A).

Exercice 37

I Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

1 Montrer que g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2 En déduire que : $(\forall x \in]0; 1]) ; g(x) \geq 0$ et $(\forall x \in]1; +\infty[) ; g(x) < 0$

II Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -x + \frac{\ln x}{x}$

Soit (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, puis donner une interprétation graphique à ce résultat;

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que la courbe (C) admet une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = -x$ au voisinage de $+\infty$;

c. Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) .

2 a. Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b. Dresser le tableau de variations de f .

3 a. Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f''(x) = \frac{2 \ln(x) - 3}{x^3}$

b. Montrer que (C) admet un point d'inflexion que l'on déterminera.

4 Tracer la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice 38

1 Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + \ln(x)$

1 Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g'(x) = \frac{x-2}{x^2}$

2 Dresser le tableau de variations de la fonction g .

3 Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) > 0$

II On considère la fonction f définie sur $D = [0; 1[\cup]1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-2}{\ln(x)} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 a. Montrer que f est continue à droite en zéro.

b. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

2 a. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

b. Étudier les branches infinies de la courbe (C) .

3 a. Montrer que : $(\forall x \in D - \{0\}) ; f'(x) = \frac{g(x)}{(\ln x)^2}$

b. Dresser le tableau de variations de f .

c. Tracer la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 39

- I Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$
- Montrer que : $g'(x) = \frac{x-1}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; 1]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
 - En déduire que : $g(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
- II a. Montrer que $(x-1)\ln x \geq 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
- b. En déduire que $g(x) + (x-1)\ln x > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
- III Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
- $$f(x) = 1 + x \ln(x) - (\ln x)^2$$
- et soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat.
 - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
En déduire la nature de la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.
- 2 a. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x) + (x-1)\ln x}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
- b. En déduire que la fonction f est strictement croissante de l'intervalle $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau des variations de f .
- 3 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; +\infty[$ et que $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$.
- 4 Tracer dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe (C) (On admet que (C) admet un point d'inflexion d'abscisse compris entre 1 et 1,5, on prend $\alpha \simeq 0,4$).

Exercice 40

- I Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :
- $$g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$$
- Montrer que $g'(x) = \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
 - Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

- 1 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
- $$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x} \ln(x); & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1 a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$; (on peut poser $t = \sqrt{x}$).
- b. Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.
- 2 Étudier la dérivabilité de f à droite de 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 3 a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, en déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$.
- c. Préciser la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
- 4 Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) d'équation : $y = x$.
- 5 a. Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$ pour tout x de $]0; +\infty[$;
- b. Dresser le tableau de variations de f .
- c. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe (C) .

Exercice 41

- 1 Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln(x) + 1$

1 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2 Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction g .

3 En déduire que $(\forall x \in]0; 1[); g(x) - 2 < 0$ et $(\forall x \in]1; +\infty[); g(x) - 2 > 0$

- 2 Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$
Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b. Étudier les branches infinies de la courbe (C) .

c. Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$.

2 a. Montrer que : $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x) - 2}{x^2}$.

- b. Dresser le tableau de variations de f .
- 3 Tracer dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe (C) .
- 4 Soit h la fonction numérique définie sur $[1; +\infty[$ par : $h(x) = f(x)$
- a. Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera;
- b. Calculer $h(e)$, et montrer que h^{-1} est dérivable au point $e - \frac{1}{e}$ et calculer $(h^{-1})'(e - \frac{1}{e})$;
- c. Tracer dans le même repère la courbe $(C_{h^{-1}})$ de la fonction h^{-1} .

Exercice 42

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1; e]$ par : $f(x) = x + 1 - \ln x$

- 1 a. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[1; e]$ puis montrer que f est strictement croissante sur $[1; e]$.
- b. Dresser le tableau de variations de f sur $[1; e]$ puis montrer que $f([1; e]) \subset [1; e]$
- 2 On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- a. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq e$
- b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante, en déduire qu'elle est convergente.
- c. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$

Exercice 43

1 Soit g la fonction numérique définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$g(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(x+1)$$

1 Montrer que $g'(x) = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$ pour tout x de l'intervalle $] -1; +\infty[$

2 Dresser le tableau de variations de la fonction g .

3 En déduire que : $(\forall x \in] -1; 0]) ; g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [0; +\infty[) ; g(x) \geq 0$

4 Soit f la fonction numérique définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter graphiquement ce

résultat.

2 a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

a. Préciser la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

3 Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

4 a. Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ pour tout x de $] -1; +\infty[$.

b. Dresser le tableau de variations de f .

c. Montrer que : $f([0; 4]) \subset [0; 4]$

5 Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) .

6 On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 4$

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente, puis calculer sa limite.

Exercice 44

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + (\ln x)^2} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 a. Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro.

b. Montrer que la fonction f est dérivable à droite en zéro, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2 a. Montrer que : $(\forall x > 0) ; f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$

b. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

c. Préciser la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3 a. Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{(\ln(x) - 1)^2}{(1 + \ln^2(x))^2}$

b. Dresser le tableau de variations de f .

c. Montrer que l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point

d'abscisse 1 est : $y = x$.

d. Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (T) .

4 Tracer dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe (C) (on admet que la courbe (C) admet trois points d'inflexion d'abscisses: e , $\alpha \simeq 0,7$ et $\beta \simeq 11$).

5 On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq e$

b. Étudier la monotonie de la suite (u_n) (On peut utiliser la question 3)d)

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente, puis calculer sa limite.

Solutions

Exercice 27

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln(x)}$:

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0$ et $x^2 \ln(x) < 0$ pour tout x de l'intervalle $]0; 1[$.

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 \ln x} = -\infty$$

et comme : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + 2 = 2$, alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x} = -\infty$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$:

Soit x de $]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \text{on a : } \ln(x + \sqrt{x}) &= \ln(\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)) \\ &= \ln(\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x} + 1) = \frac{1}{2} \ln(x) + \ln(\sqrt{x} + 1) \end{aligned}$$

$$\text{donc : } 2x \ln(x + \sqrt{x}) = x \ln(x) + 2x \ln(\sqrt{x} + 1)$$

et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} + 1 = 1$ et la fonction $\ln$ continue en 1,

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sqrt{x} + 1) = \ln(1) = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(\sqrt{x} + 1) = 0$$

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) + 2x \ln(\sqrt{x} + 1) = 0$$

$$\text{par suite : } \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x}) = 0$$

3 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln(x)}$:

Soit x de $]1; +\infty[$,

$$\text{On a : } \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln(x)} = \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}}{\frac{\ln(x)}{x^2}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} = 1$$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et $\frac{\ln(x)}{x^2} > 0$ pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}}{\frac{\ln(x)}{x^2}} = +\infty, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln(x)} = +\infty$$

4 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{2x}$:

Soit x un réel tel que $x > -\frac{1}{3}$ et $x \neq 0$, on a : $\frac{\ln(1 + 3x)}{2x} = \frac{\ln(1 + 3x)}{3x} \times \frac{3}{2}$

on pose : $X = 3x$: $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow X \rightarrow 0$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{3x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1 \text{ (on pose : } X = 3x \text{)}$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{2x} = \frac{3}{2}$$

5 Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+8}{1-x^2}\right)$:

Soit x un réel tel que $x < -2$; on a :

$$\frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+8}{1-x^2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{x^3+8}{1-x^2}\right)}{\frac{x^3+8}{1-x^2}} \times \frac{x^3+8}{1-x^2} \times \frac{2}{x+1}$$

posons : $X = \frac{x^3+8}{1-x^2}$ on a : $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow X \rightarrow +\infty$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^3+8}{1-x^2}\right)}{\frac{x^3+8}{1-x^2}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+8}{1-x^2} \times \frac{2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2 = -2$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+8}{1-x^2}\right) = 0$$

6 Calculons $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3-8)$:

Soit x un réel tel que $x > 2$ on a : $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

$$\begin{aligned} \text{donc : } (x-2)^2 \ln(x^3-8) &= (x-2)^2 \ln((x-2)(x^2+2x+4)) \\ &= (x-2)^2 \ln(x-2) + (x-2)^2 \ln(x^2+2x+4) \end{aligned}$$

posons : $X = x - 2$, on a : $x \rightarrow 2^+ \iff X \rightarrow 0^+$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x-2) = \lim_{X \rightarrow 0^+} X^2 \ln X = 0$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + 2x + 4 = 12 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x^2 + 2x + 4) = \ln(12)$$

$$\text{et comme : } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 = 0 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x-2) + (x-2)^2 \ln(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3-8) = 0$$

7 Calculons $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2-1) \ln(7x^3+4x^2+3)$:

On remarque que (-1) est une racine du polynôme : $P(x) = 7x^3 + 4x^2 + 3$
factorisons $P(x)$;

$$\begin{aligned} \text{on a : } P(x) &= 7x^3 + 4x^2 + 3 \\ &= 7x^3 + 7 + 4x^2 - 4 \\ &= 7(x^3 + 1) + 4(x^2 - 1) \\ &= 7(x+1)(x^2-x+1) + 4(x+1)(x-1) \\ &= (x+1)(7x^2-7x+7+4x-4) \\ &= (x+1)(7x^2-3x+3) \end{aligned}$$

infos:

On peut utiliser la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x - (-1)$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 7x^2 - 3x + 3 > 0$; car le discriminant du trinôme $7x^2 - 3x + 3$ est négatif et le coefficient de x^2 est positif.

donc, pour tout x de l'intervalle $] -1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} (x^2-1) \ln(7x^2+4x+3) &= (x-1)(x+1) \ln((x+1)(7x^2-3x+3)) \\ &= (x-1)(x+1) \ln(x+1) + (x-1)(x+1) \ln(7x^2-3x+3) \end{aligned}$$

$$\text{et comme : } \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) \ln(x+1) = \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0 \text{ (En posant : } X = x+1)$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1)(x+1) \ln(x+1) = 0$$

$$\text{et comme : } \lim_{x \rightarrow -1^+} 7x^2 - 3x + 3 = 13 \text{ et la fonction } \ln \text{ est continue en } 13$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(7x^2 - 3x + 3) = \ln(13)$$

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1)(x+1) = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2-1) \ln(7x^3+4x^2+3) = 0$$

8 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - x \ln(x+2)$:

Soit x un élément de $]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } x \ln x - x \ln(x+2) &= x(\ln(x) - \ln(x+2)) \\
 &= x(\ln x - \ln(x(1 + \frac{2}{x}))) \\
 &= x(\ln x - \ln x - \ln(1 + \frac{2}{x})) \\
 &= -x \ln(1 + \frac{2}{x}) \\
 &= -2 \cdot \frac{\ln(1 + \frac{2}{x})}{\frac{2}{x}}
 \end{aligned}$$

on pose : $X = \frac{2}{x}$

on a : $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2)) = \lim_{X \rightarrow 0^+} -2 \times \frac{\ln(1+X)}{X} = -2$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - x \ln(x+2) = -2$

9 Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \ln(\ln x)$:

Soit x un élément de $]1; +\infty[$, on a : $(x-1) \ln(\ln x) = \frac{x-1}{\ln x} \times \ln(x) \times \ln(\ln x)$

on pose : $X = \ln x$ on a : $x \rightarrow 1^+ \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

d'où : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \times \ln(\ln x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln x} = 1$ (car : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$)

Alors : $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \ln(\ln x) = 0$

Exercice 28

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(1 + x^2) = +\infty$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2 a. Vérifions que : $f(x) = x + 2 \ln|x| + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $1 + x^2 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

donc : $\ln(1 + x^2) = \ln\left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

et puisque : $x^2 = |x|^2$ alors : $\ln(x^2) = \ln(|x|^2) = 2 \ln(|x|)$

donc : $f(x) = x + \ln(1 + x^2) = x + 2 \ln(|x|) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f(x) = x + 2 \ln(|x|) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

a. Montrons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$:

Soit x un élément de $] -\infty ; 0[$, on a : $|x| = -x$

d'où : $f(x) = x + 2 \ln(-x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$
 $= x \left(1 + 2 \frac{\ln(-x)}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ et la fonction $\ln$ est continue au point 1 alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$$

et on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$ (En posant : $X = -x$)

et : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2 \ln(-x)}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{2 \ln(-x)}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

3 Étude des branches infinies:

► on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x > 0$, on a : $f(x) = x + 2 \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

donc : $\frac{f(x)}{x} = 1 + 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$,

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$:

Soit $x > 0$, on a : $f(x) - x = \ln(1 + x^2)$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$

Par suite la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Déterminons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x < 0$, on a : $f(x) = x + 2 \ln(-x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$$\text{donc : } \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2 \ln(-x)}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

et comme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \frac{\ln(-x)}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$:

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty$$

finalement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = +\infty$

Par suite la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation : $y = x$ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 29

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$

on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

Soit $x > 0$; on a : $\ln x = 2 \ln \sqrt{x}$ d'où : $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2 \ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

On pose : $X = \sqrt{x}$; $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow +\infty$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln X}{X} = 0$$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$

Finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2 Étude des branches infinies :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (C).

► Soit $x > 0$; on a : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ et : $f(x) - (x - 1) = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$

Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3 Étude de la position relative :

Soit $x > 0$; on a : $f(x) - (x - 1) = \frac{-\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et $\sqrt{x} > 0$

d'où le signe de $f(x) - (x - 1)$ est celui de $-\ln(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\text{on a : } \begin{cases} -\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ -\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1[\\ -\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

Position relative de (C) avec (D) :

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		0	-
Position relative	(C) est au dessus de (D)		(C) est au dessous de (D)

La courbe (C) et la droite (D) se coupent au point $A(1;0)$.

Exercice 30

1 Montrons que : $D = \mathbb{R}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$; on a : $x \in D \Leftrightarrow (x + \sqrt{1+x^2} > 0 \text{ et } 1+x^2 \geq 0)$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 0$$

$$\text{on a : } 0 \leq x^2 < 1+x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow |x| < \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow -x < \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} + x > 0 \quad (\text{car : } (\forall x \in \mathbb{R}; -x \leq |x|)$$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x + \sqrt{1+x^2} > 0$, donc : $D = \mathbb{R}$.

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{1+x^2} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = +\infty$

► Montrons que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } f(x) &= \ln(\sqrt{x^2+1} + x) \\ &= \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{\sqrt{x^2+1} - x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}\right) = -\ln(\sqrt{x^2+1} - x) \end{aligned}$$

$$\text{et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = +\infty$$

$$\text{Finalement : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

8 a. Montrons que la fonction f est impaire.

► pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$

► pour tout x de $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(\sqrt{(-x)^2+1} + (-x)) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) \\ &= \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right) \\ &= -\ln(\sqrt{x^2+1} + x) = -f(x) \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = -f(x)$$

donc f est une fonction impaire.

infos:

On peut aussi montrer que:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} ; -x \in \mathbb{R} \\ (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) + f(x) = 0 \end{cases}$$

b. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = -\frac{1}{2} \ln(3 - 2\sqrt{2})$

► Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = -\frac{1}{2} \ln(3 - 2\sqrt{2}) &\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2+1} + x) = -\frac{1}{2} \ln(3 - 2\sqrt{2}) \\ &\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2+1} + x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}\right) \\ &\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2+1} + x) = \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}) \\ &\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2+1} + x) = \frac{1}{2} \ln((\sqrt{2} + 1)^2) \\ &\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2+1} + x) = \ln(\sqrt{2} + 1) \\ &\Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2} + 1 - x \\ &\Rightarrow x^2 + 1 = (\sqrt{2} + 1 - x)^2 \\ &\Rightarrow x^2 + 1 = 2 + 1 + x^2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}x - 2x \\ &\Rightarrow 2x(\sqrt{2} + 1) = 2 + 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{2} + 1) \\ &\Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

On a : $f(1) = \ln(1 + \sqrt{2})$
 $= \frac{1}{2} \ln((1 + \sqrt{2})^2) = \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2})$
 $= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}\right)$
 $= -\frac{1}{2} \ln(3 - 2\sqrt{2})$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$

c. Montrons que pour tout r de $\mathbb{Q}$, on a : $f\left(\frac{e^r - e^{-r}}{2}\right) = r$

Soit $r \in \mathbb{Q}$, on a : $f\left(\frac{e^r - e^{-r}}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{(e^r - e^{-r})^2}{4} + 1} + \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)$
 $= \ln\left(\sqrt{\frac{(e^r)^2 - 2 + (e^{-r})^2}{4} + 1} + \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)$
 $= \ln\left(\sqrt{\frac{(e^r)^2 + 2 + (e^{-r})^2}{4}} + \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)$
 $= \ln\left(\sqrt{\frac{(e^r)^2 + 2 \cdot e^r \cdot e^{-r} + (e^{-r})^2}{4}} + \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)$
 $= \ln\left(\sqrt{\frac{(e^r + e^{-r})^2}{4}} + \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)$
 $= \ln\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} + \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)$
 $= \ln(e^r) = r$

Donc : $(\forall r \in \mathbb{Q}) ; f\left(\frac{e^r - e^{-r}}{2}\right) = r$

Exercice 31

1 a. Montrons que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ (car les fonctions $x \mapsto x^2 - 2$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$).

et on a : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$

on a : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) > 0$

Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b. Montrons que : $f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$

On a : f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc f est continue sur $]0; +\infty[$, et puisqu'elle est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, alors:

$$f(]0; +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

► **Calculons les limites:** $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2 + \ln x = -\infty$

(car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$)

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 + \ln x = +\infty$

(car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$)

Finalement : $f(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

2a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

On a : f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.

et puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un élément unique α dans $\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b. Montrons que $1,30 < \alpha < 1,35$:

On a : $f(\alpha) = 0$

et : $f(1,3) = -0,05$ et $f(1,35) \simeq 0,12$

donc : $f(1,3) < f(\alpha) < f(1,35)$

Et puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ alors : $1,3 < \alpha < 1,35$

3 Déterminons le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

Dressons le tableau de variations de f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	
f		0	$+\infty$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a :

$x \in [\alpha; +\infty[\Leftrightarrow x \geq \alpha$

$\Leftrightarrow f(x) \geq f(\alpha)$

$\Leftrightarrow f(x) \geq 0$

$x \in]0; \alpha] \Leftrightarrow x \leq \alpha$

$\Leftrightarrow f(x) \leq f(\alpha)$

$\Leftrightarrow f(x) \leq 0$

d'où le tableau de signe de f :

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$		0	+

Exercice 32

1a. Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow |x^2 - 2x - 3| > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \neq 0$

le discriminant du trinôme : $x^2 - 2x - 3$ est $\Delta = 16$ et les solutions sont :

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

donc : $x \in D \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq 3$

Finalement : $D = \mathbb{R} - \{-1, 3\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 3[\cup]3; +\infty[$

b. Calculons les limites :

► On a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 - 2x - 3 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

donc : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x^2 - 2x - 3| = +\infty$

et on a : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$

d'où : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln|x^2 - 2x - 3| = +\infty$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

► On a : $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 2x - 3 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3 = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow -1} |x^2 - 2x - 3| = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 3} |x^2 - 2x - 3| = 0^+$

et puisque : $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \ln|x^2 - 2x - 3| = -\infty$

et de même $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \ln|x^2 - 2x - 3| = -\infty$

2 a. Montrons que la droite (Δ) d'équation : $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe (C).

► Montrons d'abord que pour tout x de D , on a : $2-x \in D$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \notin D \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3$

$$\Leftrightarrow -x = 1 \text{ ou } -x = -3$$

$$\Leftrightarrow 2-x = 3 \text{ ou } 2-x = -1$$

$$\Leftrightarrow 2-x \notin D$$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x \in D \Leftrightarrow 2-x \in D$

donc $(\forall x \in D) ; 2-x \in D$.

Soit $x \in D$, on a :
$$\begin{aligned} f(2-x) &= \ln|(2-x)^2 - 2(2-x) - 3| \\ &= \ln|4 - 4x + x^2 - 4 + 2x - 3| \\ &= \ln|x^2 - 2x - 3| \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc : $(\forall x \in D) ; f(2-x) = f(x)$

on a : $(\forall x \in D); 2 - x \in D$ et $f(2 - x) = f(x)$
donc la droite (D) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe (C) .

b. Étudions les branches infinies de (C)

On a : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$

donc les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 3$ sont deux asymptotes verticales à la courbe (C) .

Au voisinage de $+\infty$:

on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

et : $(\forall x \in]3; +\infty[) : x^2 - 2x - 3 > 0$

d'où pour tout x de l'intervalle $]3; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{on a : } \frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln(x^2 - 2x - 3)}{x} = \frac{\ln\left(x^2\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)\right)}{x} \\ &= \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{x} \\ &= 2\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{x} \end{aligned}$$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{x} = 0$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; donc : (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $-\infty$:

on a : (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ et on sait que la droite (Δ) d'équation : $x = 1$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) , donc : (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.

Exercice 33

1 a. Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x^3 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$,

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3 \ln(x) + 1 - x^3 = -\infty$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

infos :

$(D) : x = a$ est un axe de symétrie pour (C) , équivaut à :
 $\begin{cases} (\forall x \in D_f) : 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

► **Calculons** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) = x^3 \left(3 \frac{\ln x}{x^3} - 1 \right) + 1$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(x)}{x^3} - 1 = -1$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{3 \ln(x)}{x^3} - 1 \right) = -\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{3 \ln(x)}{x^3} - 1 \right) + 1 = -\infty$, finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b. Étudions les branches infinies de la courbe (C) :

► On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

► On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

pour tout x un élément de l'intervalle $]0, +\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{3 \ln(x) + 1 - x^3}{x} = 3 \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} - x^2$$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} - x^2 = -\infty$, finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

2 a. Calculons $f'(x)$:

On a : $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto 1 - x^3$ sont dérivables sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{et on a : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) &= (3 \ln(x) + 1 - x^3)' \\ &= 3 \times \frac{1}{x} - 3x^2 = \frac{3}{x}(1 - x^3) \end{aligned}$$

Dressons le tableau de variations de la fonction f :

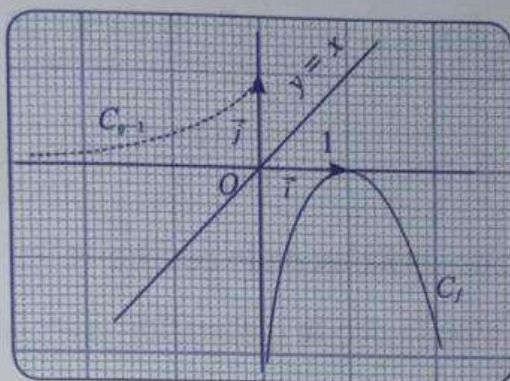
on a : le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x^3$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

et on a : $(1 - x^3) = (1 - x)(1 + x + x^2)$ et $1 + x + x^2 > 0$, car le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ est $\Delta = -3$ et $\begin{cases} a = 1 \\ a > 0 \end{cases}$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

d'où le tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
f	$-\infty$	0	$-\infty$

b. Construction de la courbe (C) :



2 a. Montrons que g admet une fonction réciproque:

On a : f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$, donc elle est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, alors : g est continue sur l'intervalle $]0; 1]$ car $g = f$ sur l'intervalle $]0; 1]$.

Donc la fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0; 1]$.

d'où : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = g(]0; 1])$.

tel que : $J = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x); g(1) =]-\infty; 0]$

b. Construction de la courbe (Cg^{-1}) :

on a: la courbe (Cg^{-1}) est le symétrique de la courbe (C) par rapport à la première bissectrice dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ dans $]0; 1]$ (voir figure).

Exercice 34

1 a. Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - \ln x) = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - \ln x) \ln x = -\infty$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

► Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln x) = -\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln x) \ln x = -\infty$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b. Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on a : $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ c'est-à-dire : $\ln x = 2 \ln \sqrt{x}$

$$\text{d'où : } \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

on pose : $t = \sqrt{x}$, on a : $x \rightarrow +\infty \iff t \rightarrow +\infty$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0, \text{ par suite : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0$$

c. Étudions les branches infinies de la courbe (C) :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ d'où la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (C).

- on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $f(x) = 2 \ln x - (\ln x)^2$

$$\text{d'où : } \frac{f(x)}{x} = 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} = 0, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Par suite la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage $+\infty$.

2 a. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on a : $f(x) = 0 \iff (2 - \ln x) \ln x = 0$

$$\iff \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 2$$

$$\iff x = 1 \text{ ou } x = e^2$$

Ainsi : $S = \{1; e^2\}$

b. Étudions le signe de $f(x)$:

► Le tableau de signes de $\ln x$ est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$ $	0	+

► Le tableau de signe de $2 - \ln x$:

on a : $2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2$
 $\Leftrightarrow 0 < x < e^2$

$2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2$
 $\Leftrightarrow x = e^2$

d'où le signe de signe :

x	0	1	e^2	$+\infty$
$2 - \ln x$		+	0	-

Finalement le tableau de signes de $f(x)$ est :

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f(x)$	- 0 + 0 -			

3 a. Montrons que $f'(x) = \frac{2}{x}(1 - \ln x)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$:

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$:

et on a : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = (2 - \ln x) \times \frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right) \ln x$

$= \frac{1}{x}(2 - \ln x - \ln x)$

$= \frac{1}{x}(2 - 2 \ln x) = \frac{2}{x}(1 - \ln x)$

b. Déterminons le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

On a : le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0$
 $\Leftrightarrow \ln x = 1$
 $\Leftrightarrow x = e$

et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0$
 $\Leftrightarrow \ln x < 1$
 $\Leftrightarrow 0 < x < e$

d'où le tableau de signes de $f'(x)$ est:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		0	-

► Tableau de variation de f :

de variation de f :

x	0	e	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
f			1	

$-\infty$ $\nearrow$ $\searrow$ $-\infty$

4 a. Montrons que $(\forall x > 0) ; f''(x) = \frac{2}{x^2}(\ln(x) - 2) :$

On a : f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

et pour tout x de $]0; +\infty[: f'(x) = \frac{2}{x}(1 - \ln x)$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } (\forall x \in]0; +\infty[); f''(x) &= 2\left(-\frac{1}{x^2}(1 - \ln x) + \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{x^2}(1 - \ln x) - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{2}{x^2}(-1 + \ln(x) - 1) = \frac{2}{x^2}(\ln(x) - 2) \end{aligned}$$

b. Montrons que la courbe (C) admet un point d'inflexion :

on a : le signe de $f''(x)$ est celui de $\ln(x) - 2$ sur $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \ln(x) - 2 \geq 0 &\iff \ln x \geq 2 \\ &\iff x \geq e^2 \end{aligned}$$

d'où le tableau de signe de $f''(x)$ est :

x	0	e^2	$+\infty$
$f''(x)$		-	+

donc : $f''(x)$ s'annule en e^2 et change de signe en e^2 .

et comme $f(e^2) = 0$ alors le point $A(e^2; 0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

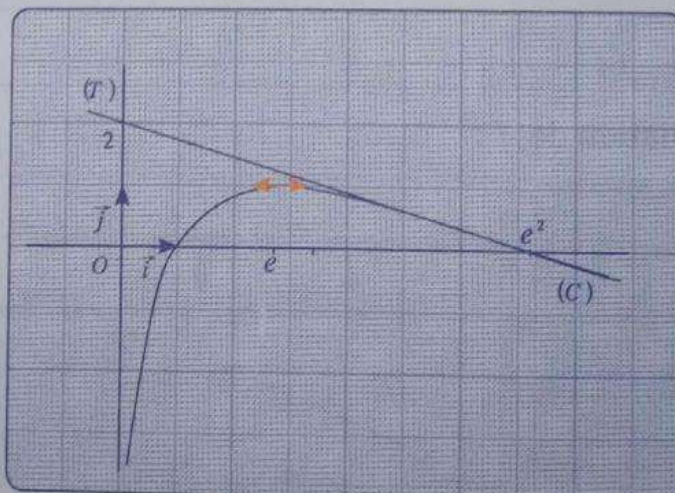
c. Équation de la tangente (T) :

$$\text{On a : } f(e^2) = 0 \text{ et } f'(e^2) = \frac{-2}{e^2}$$

Donc l'équation de la tangente au point $A(e^2; 0)$ est: $y = \frac{-2}{e^2}(x - e^2)$

$$(T): y = -2xe^{-2} + 2$$

5 Traçons la courbe (C) et (T) :



Exercice 35

1 a. Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty]$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x - \ln(x^2) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ et la fonction $\ln$ est continue en 1 alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \text{ c'est-à-dire : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

► Montrons que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + x^2 = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty$

c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(1 + x^2) = -\infty$, et on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \ln(1 + x^2) = -\infty$, finalement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$:

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$

c. Le tableau de variations de la fonction f :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $(x-1)^2 \geq 0$ et $1+x^2 > 0$

d'où : $\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \geq 0$ c'est-à-dire : $f'(x) \geq 0$

on a : $f'(x) = 0 \iff x = 1$

Le tableau de variations de f est le suivant:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f	$-\infty$		$+\infty$

2 a. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \text{ un élément de } \mathbb{R}, \text{ on a : } f(x) = x &\Leftrightarrow x - \ln(1 + x^2) = x \\ &\Leftrightarrow \ln(1 + x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Donc : $S = \{0\}$

b. Montrons que : $f([0;1]) \subset [0;1]$

La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

et on a : $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1]$. ainsi : $f([0;1]) = [f(0); f(1)]$

on a : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(2)$, donc : $f([0;1]) = [0; 1 - \ln(2)]$

et puisque $1 - \ln(2) < 1$, alors : $[0; 1 - \ln(2)] \subset [0;1]$

d'où : $f([0;1]) \subset [0;1]$

3 a. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

- pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$

donc : $0 \leq u_0 \leq 1$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; supposons que : $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

on a : $0 \leq u_n \leq 1$ c'est-à-dire : $u_n \in [0;1]$, et puisque : $f([0;1]) \subset [0;1]$

alors : $f(u_n) \in [0;1]$, par suite : $u_{n+1} \in [0;1]$

c'est-à-dire : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, finalement la propriété est vraie pour $n + 1$.

d'où d'après le principe de la récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

b. Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(1 + u_n^2)$

donc : $u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n^2)$; et puisque : $0 \leq u_n \leq 1$, alors : $1 \leq 1 + u_n^2 \leq 2$

or la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc :

$$\ln(1) \leq \ln(1 + u_n^2) \leq \ln(2)$$

c'est-à-dire : $0 \leq \ln(1 + u_n^2) \leq \ln(2)$

d'où : $-\ln(1 + u_n^2) \leq 0$ par suite : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Finalement : $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, ce qui signifie que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante.

C. Dédution :

On a la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge..

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

La fonction f est continue sur $[0;1]$ et $f([0;1]) \subset [0;1]$ et (u_n) est définie par : $u_0 \in [0;1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et la suite (u_n) est convergente donc sa limite est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0;1]$, et comme 0 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0;1]$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 36

11 Montrons que : $g'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

Les fonctions : $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^2 - x$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$, d'où la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$, (somme de deux fonctions dérivables):

$$\text{et on a : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; g'(x) = (x^2 - x - \ln x)' \\ = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$$

$$\text{or : } (2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 - x - 1$$

$$\text{donc : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; g'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$$

2 Tableau de variations de g :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty$,

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - x - \ln x = +\infty.$$

$$\text{c'est-à-dire : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$g(x) = x^2 - x - \ln x = x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2} \right)$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2} = 1$$

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\text{Finalement : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

► Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $2x+1 > 0$ et $x > 0$

et $g'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur $]0; +\infty[$.

d'où le tableau de variations de la fonction g est :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
		-	+
g	$+\infty$	0	$+\infty$

3 Dédudons que $g(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$

- La fonction g est croissante sur $[1; +\infty[$.

donc : $x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$
 $\Rightarrow g(x) \geq 0$

- La fonction g est décroissante sur $]0; 1]$,

donc : $0 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$
 $\Rightarrow g(x) \geq 0$

Finalement : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) \geq 0$

Remarque: La fonction g admet un minimum en 1 et $g(1) = 0$ donc:

$(\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) \geq 0$

II a. Montrons que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} -(\ln x)^2 = -\infty$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 = -1$, alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 - (\ln x)^2 = -\infty$

Finalement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

► Interprétation géométrique :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C) .

b. ► Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x^2} \right) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \right)$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 = 0$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 = 1$

or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \right) = +\infty$
 Finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

► Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\frac{f(x)}{x} = x \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \right)$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \right) = +\infty$ finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

c. Nature du branche infinie :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

2 a. Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = 2 \left(\frac{x^2 - \ln x}{x} \right)$

Les fonctions : $x \mapsto (\ln x)^2$ et $x \mapsto x^2 - 1$ sont dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (produit de deux fonctions dérivables).

$$\begin{aligned} \text{Et on a : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) &= (x^2 - 1 - (\ln x)^2)' \\ &= 2x - 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \\ &= 2 \left(x - \frac{\ln x}{x} \right) = 2 \left(\frac{x^2 - \ln x}{x} \right) \end{aligned}$$

b. Vérifions que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) + x = x^2 - \ln x$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $g(x) = x^2 - x - \ln x$

donc : $g(x) + x = x^2 - \ln x$, par suite :

$(\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) + x = x^2 - \ln x$

► Tableau de variations de la fonction f :

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = 2 \left(\frac{x^2 - \ln x}{x} \right)$

d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - \ln x$ c'est-à-dire le signe de $g(x) + x$

(car : $g(x) + x = x^2 - \ln(x)$)

et puisque : $x > 0$ et $g(x) \geq 0$ alors : $g(x) + x > 0$, c'est-à-dire : $x^2 - \ln(x) > 0$

d'où : $f'(x) > 0$

Donc $f'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$, ainsi le tableau de variation de f est:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

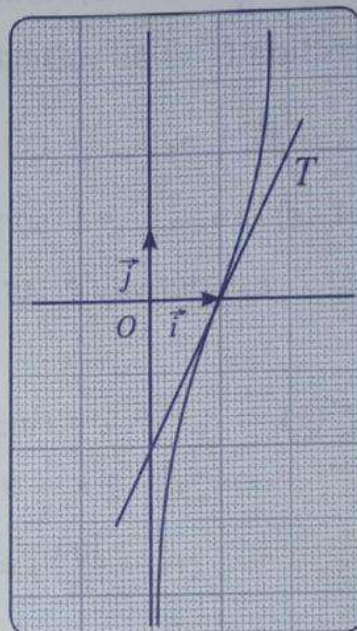
3 a. Équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1:

On a : $f(1) = 0$ et $f'(1) = 2$

donc l'équation de la tangente (T) est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2x - 2$

d'où : (T): $y = 2x - 2$

c. Construction de la courbe :



Exercice 37

1 Montrons que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

On a : la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$, (somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ qui sont : $x \mapsto 1 - x^2$ et $x \mapsto -\ln(x)$)

et on a : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -(2x + \frac{1}{x})$

d'où : $g'(x) < 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$, donc la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2 Dédution :

On a : la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et

$$g(1) = 0.$$

donc :

$$\begin{aligned} \triangleright 0 < x \leq 1 &\Rightarrow g(x) \geq g(1) \\ &\Rightarrow g(x) \geq 0 \\ \triangleright x > 1 &\Rightarrow g(x) < g(1) \\ &\Rightarrow g(x) < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } \begin{cases} (\forall x \in]0; 1]) & ; g(x) \geq 0 \\ (\forall x \in]1; +\infty[) & ; g(x) < 0 \end{cases}$$

3 a. Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$:

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty, \text{ et comme : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x + \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Interprétation :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, d'où la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

b. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Montrons que (Δ) est une asymptote oblique à la courbe (C):

$$\text{On a : } (\forall x > 0) ; f(x) - (-x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Alors la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c. Étudions la position relative de (C) par rapport à (Δ) :

$$\text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f(x) - (-x) = \frac{\ln x}{x}$$

d'où le signe de $f(x) - (-x)$ est celui de $\ln x$ sur $]0; +\infty[$:

Le tableau de signes de $\ln x$ est :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		0	+

Le tableau ci-dessous, résume la position relative de (C) par rapport à (Δ) :

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		0	
	-		+
Position relative de (C) et (Δ)	(C) est au dessous de (Δ)		(C) et au dessus de (Δ)

(C) et (Δ) se coupent au point $B(1; -1)$

1 a. Montrons que $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

On a : la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

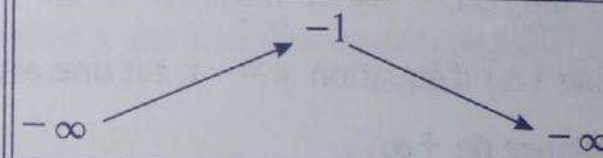
$$\begin{aligned}
 \text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) &= \left(-x + \frac{\ln x}{x}\right)' \\
 &= -1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} \\
 &= -1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} \\
 &= \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^2}
 \end{aligned}$$

on a : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$, donc : $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b. Tableau de variations de la fonction f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

donc, d'après la partie I, on déduit le tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	+		-
f			

3 a. Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f''(x) = \frac{2 \ln(x) - 3}{x^3}$

On a : la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\text{Soit } x \text{ de }]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{donc : } f''(x) &= \frac{x^2 g'(x) - 2x g(x)}{x^4} \\
 &= \frac{x(xg'(x) - 2g(x))}{x^4} = \frac{xg'(x) - 2g(x)}{x^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et on a : } xg'(x) - 2g(x) &= -x\left(2x + \frac{1}{x}\right) - 2(1 - x^2 - \ln x) \\ &= -2x^2 - 1 - 2 + 2x^2 + 2\ln(x) \\ &= 2\ln(x) - 3 \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; f''(x) = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$$

b. Montrons que la courbe (C) admet un point d'inflexion :

$$\text{On a : } (\forall x > 0) ; f''(x) = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$$

donc le signe de $f''(x)$ est celui de $2\ln(x) - 3$ sur $]0; +\infty[$.

$$\text{et on a : } 2\ln(x) - 3 = 2\left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right)$$

par suite le signe de $f''(x)$ est celui de $x - e^{\frac{3}{2}}$ sur $]0; +\infty[$.

D'où le tableau de signes de $f''(x)$ est :

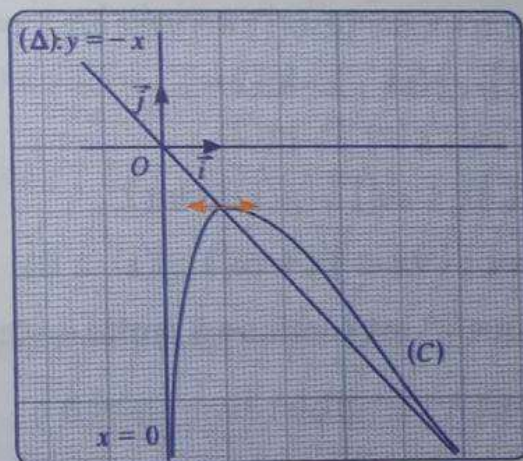
x	0	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$		-	+

donc : $f''(x)$ s'annule en $e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$ et change de signe au voisinage de $e^{\frac{3}{2}}$,

par suite le point A d'abscisses $e\sqrt{e}$ est un point d'inflexion de la courbe (C),

$$\text{On a : } f(e\sqrt{e}) = -e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

4 La courbe (C)



Exercice 38

11 Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g'(x) = \frac{x-2}{x^2}$

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$, (somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ qui sont : $x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ et $x \mapsto \ln x$).

et on a : $(\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) = \left(\frac{2}{x} - 1 + \ln(x)\right)'$

$$= -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2}$$

2 Tableau de variations de g :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - 1 + \ln x = +\infty$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

on a : pour tout x de $]0; +\infty[$; $g(x) = -1 + \frac{2+x \ln x}{x}$

or : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + x \ln x = 2$

d'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2+x \ln x}{x} = +\infty$, d'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

le signe de $g'(x)$ est celui de $x-2$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

donc le tableau de variations g est :

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	
		-	+
g	$+\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$

3 Dédution :

On a : la fonction g est croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$ et décroissante sur $]0; 2]$.

donc : $\begin{cases} (\forall x \in]0; 2]); g(x) \geq \ln(2) \\ \forall x \in [2; +\infty[; g(x) \geq \ln(2) \end{cases}$

c'est-à-dire : $(\forall x \in]0; +\infty[); g(x) \geq \ln(2)$

or : $\ln(2) > 0$, donc : $(\forall x \in]0; +\infty[); g(x) > 0$

1 a. Montrons que f est continue à droite en 0:

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ d'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 = -2$, alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{\ln x} = 0$

d'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, c'est-à-dire : f est continue à droite en 0.

b. Étudions la dérivabilité de f à droite en 0:

Soit x un élément de $]0; 1[$, on a : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \left(\frac{x-2}{\ln x} - 0 \right) = \frac{x-2}{x \ln(x)}$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0^-$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x \ln x} = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$, ainsi f n'est pas dérivable à droite en 0.

Par suite la courbe (C) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point O.

2 a. ▶ Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

Soit x un élément de $]1; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{x-2}{x} \times \frac{x}{\ln x}$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{x} = 1$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} \times \frac{x}{\ln x} = +\infty$, finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

▶ Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$:

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0^+$, donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty$

et puisque $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$, alors : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{\ln x} = -\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

▶ Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$:

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0^-$, donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln(x)} = -\infty$

or : $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1$, donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{\ln x} = +\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

b. Étudions les branches infinies de la courbe (C):

▶ On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

▶ On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit $x \in]1; +\infty[$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{x-2}{x} \times \frac{1}{\ln x}$

et comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{x} = 1$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} \times \frac{1}{\ln x} = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

ainsi la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$.

3 a. Montrons que : $(\forall x \in D - \{0\}) ; f'(x) = \frac{g(x)}{(\ln x)^2}$,

La fonction f est dérivable en tout point de $D - \{0\}$,

et on a : $(x \in D - \{0\})$, on a : $f'(x) = \frac{1 \times \ln(x) - (x-2) \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln(x) - 1 + \frac{2}{x}}{(\ln(x))^2}$

Donc : $(\forall x \in D \setminus \{0\}) ; f'(x) = \frac{g(x)}{(\ln x)^2}$

b. Le tableau de variations de f :

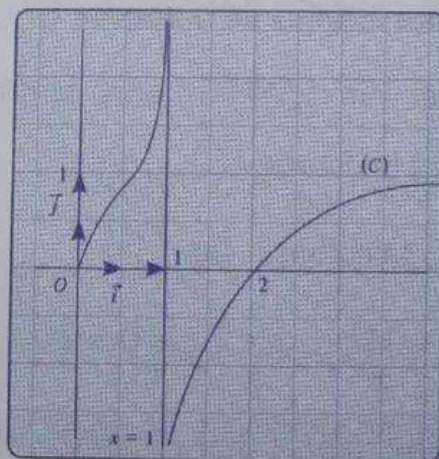
on a : le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $D \setminus \{0\}$, et d'après la partie (I)

on a : $(\forall x \in D \setminus \{0\}) ; g(x) > 0$

d'où le tableau de variations de f est :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
f	0	$+\infty$	$+\infty$

c. Construction de la courbe (C) : on a : $f(2) = 0$



Exercice 39

1 a. Montrons que $g'(x) = \frac{x-1}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

Les fonctions : $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\ln x$ sont dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$\text{et on a : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; g'(x) = (x - \ln x)' \\ = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

b. Étudions la monotonie de g sur $]0; +\infty[$:

on a : $g'(x) = \frac{x-1}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$; d'où le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On a :

x	0	1	$+\infty$
$x-1$		-	+

donc : $(\forall x \in]0; 1]) ; g'(x) \leq 0$

et $(\forall x \in [1; +\infty[) ; g'(x) \geq 0$

d'où : g est croissante sur $[1; +\infty[$ est décroissante sur l'intervalle $]0; 1]$.

c. Dédution :

On a : la fonction : $\blacktriangleright g$ est décroissante sur $]0; 1]$, donc :

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$$

et $\blacktriangleright g$ est croissante sur $[1; +\infty[$, donc : $x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$

d'où : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) \geq g(1)$

et puisque : $g(1) = 1 - \ln(1) = 1$, alors : $g(1) > 0$

Finalement : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) > 0$

2^{ème} méthode :

le tableau de variations de g est:

d'après le tableau de variations de g ,

on a g admet 1 comme valeur minimale absolue.

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		-	+
g		1	

Donc : $(\forall x > 0) ; g(x) \geq 1$ d'où : $(\forall x > 0) ; g(x) > 0$

2 a. Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; (x-1)\ln x \geq 0$

Déterminons le signe de $(x-1)\ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

le tableau de signes de $(x-1)\ln x$:

x	0	1	$+\infty$
$x-1$		-	0
$\ln x$		-	0
$(x-1)\ln x$		+	0

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[); (x-1)\ln x \geq 0$

b. Dédution :

Soit x un élément de $]0; +\infty[$; on a, d'après ce qui précède $g(x) > 0$ et $(x-1)\ln(x) \geq 0$ donc : $g(x) + (x-1)\ln x > 0$

Finalement : $g(x) + (x-1)\ln x > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

III a. Montrons que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x \ln x = 1$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} -(\ln x)^2 = -\infty$

par suite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x \ln x - (\ln x)^2 = -\infty$

finalement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

Interprétation graphique :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, d'où la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C) .

b. Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on a :

$$f(x) = 1 + x \ln(x) - (\ln x)^2 = 1 + x \ln(x) \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$, par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x \ln(x) \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

► Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) = 1 + x \ln(x) \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

$$\text{d'où : } \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} + \ln(x) \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$, et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \ln(x) \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

► **Déduction :**

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

2 a. Montrons que : $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x) + (x-1)\ln x}{x}$

On a : la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, et on a :

$$\begin{aligned} (\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) &= (1 + x \ln(x) - (\ln x)^2)' \\ &= \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= \ln(x) + 1 - \frac{2 \ln(x)}{x} = \frac{x \ln(x) + x - 2 \ln(x)}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et puisque : } x \ln(x) + x - 2 \ln(x) &= (x-1) \ln(x) + x - \ln(x) \\ &= (x-1) \ln(x) + g(x) \end{aligned}$$

$$\text{Alors : } (\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{g(x) + (x-1)\ln x}{x}$$

b. **Déduction :**

$$\text{On a : } (\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x) + (x-1)\ln x}{x}$$

d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x) + (x-1)\ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$,

on a : $g(x) + (x-1)\ln x > 0$ (d'après la question (I (2 b)) d'où :

$$(\forall x > 0); f'(x) > 0$$

Finalement la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

► **Tableau de variations de f :**

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

3 ▶ Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x$ sont continues sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc la fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ (somme de deux fonctions continues).
on a: la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc :

$$f(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

et puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

▶ Montrons que : $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$

$$\text{on a : } f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\ln(2)}{2} - \ln^2(2) \simeq 0,17$$

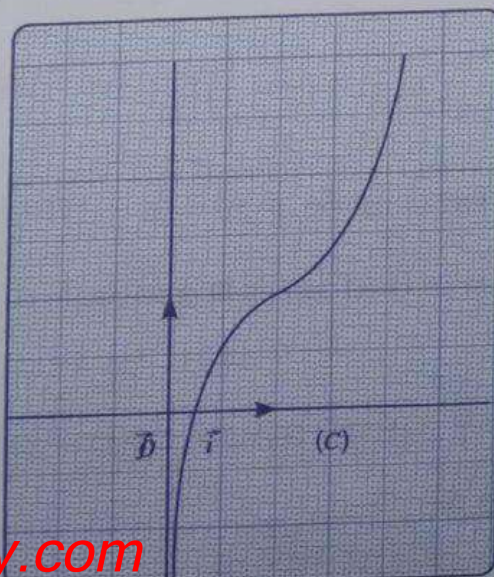
$$\text{et } f\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e - 1 = -e$$

$$\text{d'où : } f\left(\frac{1}{e}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

et on a f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e}; \frac{1}{2}\right]$

$$\text{Donc : } \frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$$

4 La courbe (C)



11 Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) = \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$

Les fonctions : $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto 2\sqrt{x} - 2$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$, donc la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ (somme de deux fonctions dérivables) et on a :

$$\begin{aligned} (\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) &= (2\sqrt{x} - 2 - \ln x)' \\ &= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 1}{x} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - 1}{x(\sqrt{x} + 1)} \end{aligned}$$

2 Étudions les variations de g sur $]0; +\infty[$:

On a : $g'(x) = \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$ pour tout x de $]0; +\infty[$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

on a : $(\forall x \in]0; 1]); g'(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [1; +\infty[); g'(x) \geq 0$

donc : g est décroissante sur $]0; 1]$, et croissante sur $[1; +\infty[$.

3 Dédution :

On a la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0; 1]$, donc :

$$\begin{aligned} 0 < x \leq 1 &\Rightarrow g(x) \geq g(1) \\ &\Rightarrow g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

et g est croissante sur $[1; +\infty[$, donc : $x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$
 $\Rightarrow g(x) \geq 0$

Finalement : $(\forall x \in]0; +\infty[); g(x) \geq 0$

11 a. Montrons que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$, donc : $\ln x = 2 \ln \sqrt{x}$

si on pose : $t = \sqrt{x}$, alors : $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \ln \sqrt{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2t \ln t = 0$$

b. Montrons que la fonction f est continue à droite en 0 :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - x\sqrt{x} \ln x = 0$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, donc : f est continue à droite en 0.

2 Étudions la dérivabilité de f à droite en 0:

Soit $x \in]0; +\infty[$,

$$\text{on a : } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - \sqrt{x} \ln(x)}{x - 0} = 1 - \frac{\sqrt{x} \ln x}{x} = 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty, \text{ ainsi : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

donc : f n'est pas dérivable à droite en 0.

► Interprétation graphique :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$, donc la courbe (C) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point O .

3 a. Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, si on pose : $t = \sqrt{x}$, alors : $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$.

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln t}{t} = 0$$

► Dédution :

$$\text{Soit } x \text{ un réel tel que } x > 0 : f(x) = x \left(1 - \frac{\sqrt{x} \ln x}{x} \right) = x \left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right) = +\infty, \text{ ainsi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b. ► Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 1, \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

► Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$

$$\text{Soit } x \text{ un réel tel que } x > 0, \text{ on a : } f(x) = x - \sqrt{x} \ln x, \text{ donc : } f(x) - x = -\sqrt{x} \ln x$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x} \ln x) = -\infty$$

Finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\infty$



c. Déterminons la nature de la branche infinie :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

4 Étudions la position relative de la courbe (C) par rapport la droite (Δ):

Soit x un réel tel que $x > 0$, on a : $f(x) - x = -\sqrt{x} \ln x$

Le signe de $f(x) - x$ est celui de $-\ln(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

et on a :

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$		0	-
		+	

Le tableau ci-dessous résume la position relative de (C) et (Δ): (on a : $f(0) = 0$)

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	0	0	-
Position relative	(C) est au dessus de (Δ)	(C) est au dessous de (Δ)	

La courbe (C) coupe la droite (Δ) au point de $A(1;1)$ et $O(0;0)$.

5 a. Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$

Les fonctions : $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$, donc la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, (somme et produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$) :

$$\begin{aligned}
 \text{et on a : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) &= (x - \sqrt{x} \ln x)' \\
 &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x - \sqrt{x} \times \frac{1}{x} \\
 &= 1 - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{2\sqrt{x} - 2 - \ln x}{2\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

b. Tableau de variations de f :

On a : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

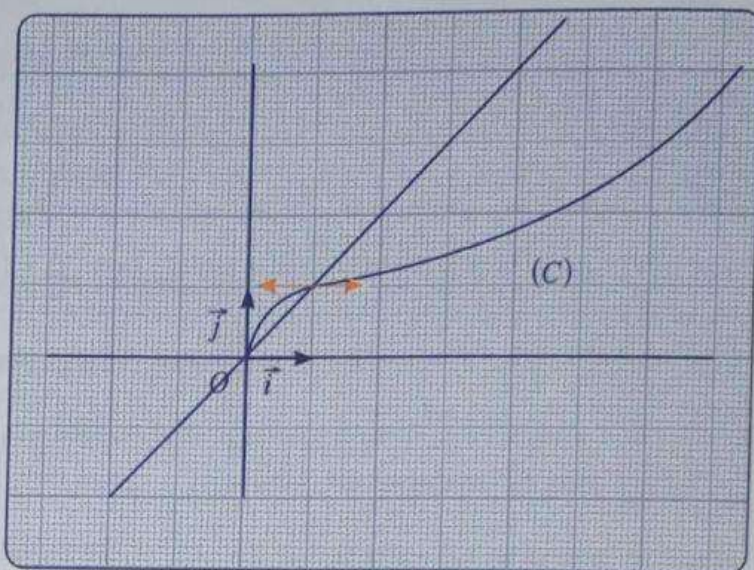
et d'après 1 on a : $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

d'où : $(\forall x > 0) ; f'(x) \geq 0$ et $(f'(1) = 0)$.

Le tableau de variations f est :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
f	0		$+\infty$

6 La courbe :



Exercice 41

1 1 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$:

on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$,

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 + \ln x = -\infty$, par suite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$:

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$,

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 + \ln x = +\infty$, par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2 Calculons $g'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$:

Les fonctions : $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x^2 + 1$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$, donc la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ (somme de deux fonctions dérivables).

et on a : $(\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) = (x^2 + \ln(x) + 1)' = 2x + \frac{1}{x}$

Tableau de variations de g :

On a : $2x + \frac{1}{x} > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$, donc : $g'(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$, donc la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
d'où le tableau de variation de g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
g	$-\infty$	$+\infty$

3 Dédution :

On a : $g(1) = 2$, et la fonction g est croissante sur $]0; +\infty[$.

donc : $0 < x < 1 \Rightarrow g(x) < g(1)$
 $\Rightarrow g(x) - 2 < 0$

et $x > 1 \Rightarrow g(x) > g(1)$
 $\Rightarrow g(x) - 2 > 0$

finalement : $\begin{cases} (\forall x \in]0; 1[) & g(x) - 2 < 0 \\ (\forall x \in]1; +\infty[) & g(x) - 2 > 0 \end{cases}$

11 a. Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

► on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

et on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{\ln x}{x} = +\infty$

finalement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

► On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$,

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln x}{x} = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. Étudions des branches infinies :

► On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C) .

► On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) = 0$

donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c. Étudions la position de la courbe (C) et (D):

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$

donc le signe de $f(x) - x$ est celui de $-\ln x$ sur $]0; +\infty[$.

On a :

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$		+	0 -

Le tableau suivant résume la position de la courbe (C) par rapport à (D):

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		+	0 -
Position relative	(C) est au dessus de (D)	elles se coupent	(C) est au dessous de (D)

2 a. Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{g(x) - 2}{x^2}$

Les fonctions : $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{-1}{x}$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (somme et produit de fonctions dérivables).

$$\text{on a : } (\forall x > 0); f'(x) = \left(x - \frac{\ln x}{x}\right)'$$

$$= 1 - \frac{x \times \frac{1}{x} - \ln x}{x^2}$$

$$= 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$$

$$\text{et on a : } g(x) - 2 = x^2 + \ln(x) + 1 - 2 = x^2 - 1 + \ln(x)$$

$$\text{donc : } (\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{g(x) - 2}{x^2}$$

b. Tableau de variations de f :

$$\text{On a : } (\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x) - 2}{x^2}$$

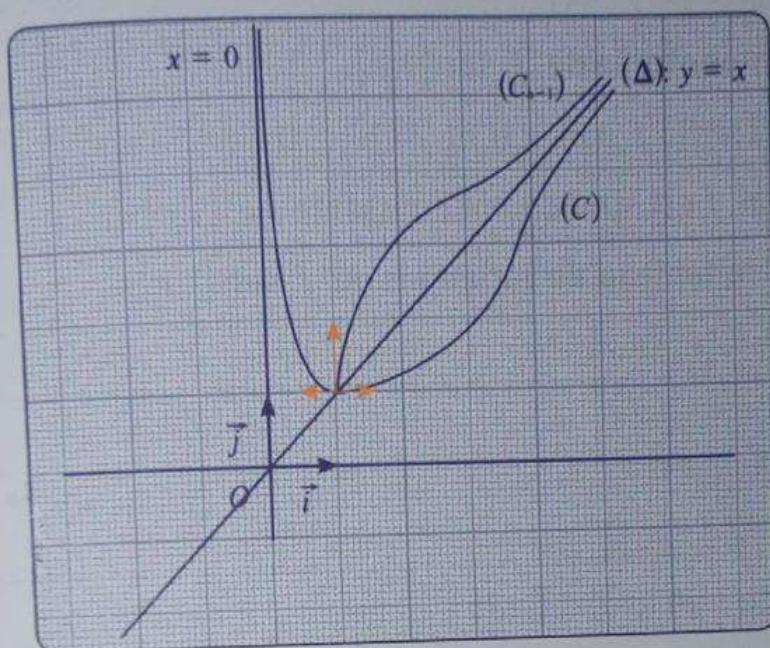
le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x) - 2$ sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \iff x = 1 \\ f'(x) < 0 \iff x \in]0; 1[\\ f'(x) > 0 \iff x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

d'où le tableau de variations de f est :

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
f	$+\infty$		1	$+\infty$

3 Traçons la courbe (C) :



4 a. Montrons que h admet une fonction réciproque :

On a : la fonction h est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc, elle admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle $J = h(I)$;

tel que : $J = f([1; +\infty[) = [f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [1; +\infty[$

b. Calculons $(h^{-1})'(e - \frac{1}{e})$:

On a : $h(e) = e - \frac{1}{e}$ donc : $(h^{-1})(e - \frac{1}{e}) = e$

et puisque h est dérivable en e et $h'(e) = 1$.

c'est-à-dire : $h'(e) \neq 0$, donc h^{-1} est dérivable en $e - \frac{1}{e}$ et on a :

$$(h^{-1})'(e - \frac{1}{e}) = \frac{1}{h'(e)} = 1$$

c) Traçons $(C_{h^{-1}})$:

$(C_{h^{-1}})$ est le symétrique de la courbe de h par rapport à la première bissectrice dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$ (voir figure).

Exercice 42

1 a. Calculons $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[1; e]$:

La fonction f est dérivable sur $[1; e]$.

Pour tout élément x de $[1; e]$ on a : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

et puisque $(\forall x \in [1; e]) : (x-1 \geq 0 \text{ et } x > 0)$

alors : $(\forall x \in [1; e]) ; f'(x) \geq 0$

► **Étudions la monotonie de f sur $[1; e]$.**

on a : $(\forall x \in [1; e]) ; f'(x) \geq 0$ et $f'(1) = 0$

d'où la fonction f est strictement croissante sur $[1; e]$.

b. Dressons le tableau de variations de f sur $[1; e]$.

x	1	e
$f'(x)$	0	+
f	2	e

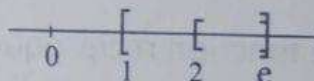
► **Montrons que : $f([1; e]) \subset [1; e]$**

On a : la fonction f est continue et strictement croissante sur $[1; e]$ donc:

$$f([1; e]) = [f(1); f(e)] = [2; e]$$

et puisque : $[2; e] \subset [1; e]$

alors: $f([1; e]) \subset [1; e]$



2 a. - Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq e$

- pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$ donc : $1 \leq u_0 \leq e$

- soit n un élément de $\mathbb{N}$.

supposons que $1 \leq u_n \leq e$ et montrons que : $1 \leq u_{n+1} \leq e$

$$\begin{aligned} \text{on a : } 1 \leq u_n \leq e &\implies f(1) \leq f(u_n) \leq f(e) \\ &\implies 2 \leq u_{n+1} \leq e \\ &\implies 1 \leq u_{n+1} \leq e \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$.

D'où d'après le principe de la récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq e$

b. ► Montrons que la suite (u_n) est croissante:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = 1 - \ln(u_n)$

$$\begin{aligned} \text{on a : } u_n \leq e &\Rightarrow \ln(u_n) \leq \ln(e) \\ &\Rightarrow \ln(u_n) \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 - \ln(u_n) \geq 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \end{aligned}$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \geq 0$

d'où la suite (u_n) est croissante.

► Dédution : (u_n) est croissante majorée par e donc elle est convergente.

C. Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$

on a : ► f est continue sur $[1; e]$

$$\text{► } f([1; e]) \subset [1; e]$$

$$\text{► } u_0 \in [1; e]$$

$$\text{► } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$$

► (u_n) est convergente.

donc la limite de (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[1; e]$.

Réolvons dans $[1; e]$ l'équation $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \text{ un élément de } [1; e], \text{ on a : } f(x) = x &\Leftrightarrow x + 1 - \ln x = x \\ &\Leftrightarrow \ln x = 1 \\ &\Leftrightarrow \ln x = \ln e \\ &\Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$$

Exercice 43

1 Montrons que : $(\forall x > -1) ; g'(x) = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$

On a : la fonction $x \mapsto x + 1$ est dérivable strictement positive sur $]-1; +\infty[$,

donc la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

de même, la fonction $x \mapsto (x+1)^2 - 1$ est dérivable sur $]-1; +\infty[$.

donc la fonction f est dérivable sur $]-1; +\infty[$, (somme de deux fonctions dérivables)

$$\begin{aligned} \text{et on a : } (\forall x \in]-1; +\infty[); g'(x) &= ((1+x)^2 - 1 + \ln(x+1))' \\ &= 2(1+x) + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{2(1+x)^2 + 1}{(x+1)} \end{aligned}$$

2 Tableau de variations de g :

▶ on a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} x + 1 = 0^+$, donc : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x + 1) = -\infty$

et on a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1 + x)^2 - 1 = -1$, donc : $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1)^2 - 1 + \ln(x + 1) = -\infty$

c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$

▶ On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1) = +\infty$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x)^2 - 1 = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x)^2 - 1 + \ln(x + 1) = +\infty$

par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

▶ Soit x un réel; tel que : $x > -1$, on a : $2(x + 1)^2 + 1 > 0$ et $x + 1 > 0$

donc : $\frac{2(x + 1)^2 + 1}{x + 1} > 0$,

c'est-à-dire : $g'(x) > 0$ finalement : $(\forall x > -1); g'(x) > 0$

d'où le tableau de variations de g est :

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
g	$-\infty$	$+\infty$

3 Dédution :

On a : g est strictement croissante sur $] -1; +\infty[$ et $g(0) = 0$.

Soit $x \in] -1; +\infty[$, on a : $-1 < x \leq 0 \Rightarrow g(x) \leq g(0)$

$\Rightarrow g(x) \leq 0$

et $x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0)$

$\Rightarrow g(x) \geq 0$

Finalement : $\begin{cases} (\forall x \in] -1; 0]) & ; g(x) \leq 0 \\ (\forall x \in [0; +\infty[) & ; g(x) \geq 0 \end{cases}$

III 1 Montrons que : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) = 0^+$, donc : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x + 1} = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x + 1) = -\infty$, d'où : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} = -\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow -1^+} x - \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} = +\infty$, finalement : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

Interprétation graphique :

On a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

2 a. Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Soit x un réel, tel que : $x > -1$, on pose : $t = x + 1$; on a : $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

Soit x un réel, tel que : $x > -1$, on a : $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$, donc :

$$f(x) - x = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0, \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$$

b. Nature de la branches infinie :

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$, donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3 Étude de la position relative de (C) par rapport à (Δ):

Soit x un réel, tel que : $x > -1$, on a : $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

$$\text{donc : } f(x) - x = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

on a : $x+1 > 0$, donc le signe de $f(x) - x$ est celui de $-\ln(x+1)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\text{on a : } \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{et } \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

le tableau suivant résume la position relative de la courbe (C) par rapport à (Δ):

x	1	0	$+\infty$
$f(x) - x$		0	-
Position relative	(C) est au dessus de (Δ)	elles se coupent	(C) est au dessous de (Δ)

4 a. Montrons que : $(\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

La fonction f est dérivable sur $]-1; +\infty[$,

et on a :

$$\begin{aligned} (\forall x > -1); f'(x) &= \left(x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right)' = 1 - \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

b. Tableau de variations de f :

Soit $x > -1$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ et $(x+1)^2 > 0$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur l'intervalle $]-1; +\infty[$.

et d'après la partie (I), le tableau de variations de f est :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

c. Montrons que : $f([0; 4]) \subset [0; 4]$

on a : f est continue et strictement croissante sur $[0; 4]$,

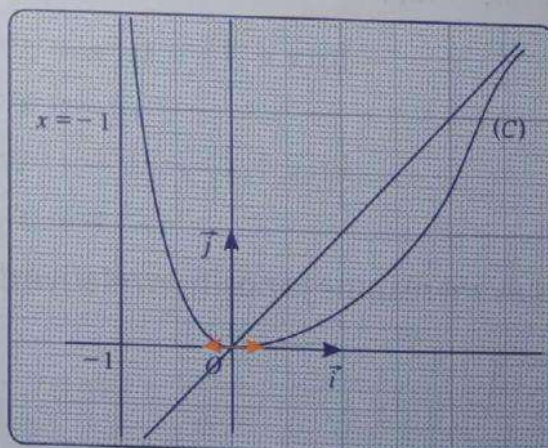
donc : $f([0; 4]) = [f(0); f(4)]$

et comme : $f(0) = 0$ et $f(4) = 4 - \frac{\ln(5)}{5}$ et $4 - \frac{\ln(5)}{5} \leq 4$

alors : $f(4) \leq 4$ par suite : $[f(0); f(4)] \subset [0; 4]$

d'où : $f([0; 4]) \subset [0; 4]$

5 La construction de (C) :



6 a. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 4$

pour $n = 0$, on a : $u_0 = 4$ et $0 \leq 4 \leq 4$

donc : $0 \leq u_0 \leq 4$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $0 \leq u_n \leq 4$ montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

ona: $u_n \in [0; 4]$ et $f([0; 4]) \subset [0; 4]$, donc: $f(u_n) \in [0; 4]$ c'est-à-dire: $u_{n+1} \in [0; 4]$

d'où : $0 \leq u_{n+1} \leq 4$, par suite la propriété est vraie pour $n + 1$.

d'après le principe de la récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 4$

b. Montrons que la suite (u_n) est décroissante:

Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

d'après la question **III 3** : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; f(x) \leq x$

et puisque : $u_n \in [0; 4]$ alors : $f(u_n) \leq u_n$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_n$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq u_n$

d'où la suite (u_n) est décroissante.

c. Dédution :

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

► Calculons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On a : la fonction f est continue sur $[0; 4]$ et $f([0; 4]) \subset [0; 4]$ et la suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

et puisque (u_n) converge alors sa limite est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[0; 4]$,

et puisque 0 est la seule solution de l'équation $f(x) = x$, sur l'intervalle $[0; 4]$

alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Solution 44

1 a. Montrons que f est une fonction continue à droite en 0:

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + (\ln x)^2 = +\infty$ par suite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + (\ln x)^2} = 0$

et comme : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 + (\ln x)^2} = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

alors la fonction f est continue à droite en 0.

b. Montrons que la fonction f est dérivable à droite en 0:

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on a : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{1 + (\ln x)^2}$

et on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + (\ln x)^2} = 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

d'où f est dérivable à droite en 0 et on a : $f'_d(0) = 0$

Interprétation géométrique :

La courbe (C) admet une demi-tangente horizontale en O d'équation :

$$\begin{cases} y = f'_d(0)(x - 0) + f(0) \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

2 a. Vérifions que : $(\forall x > 0); f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln(x)$, donc : $\ln x = 2 \ln \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } f(x) &= \frac{x}{1 + (\ln x)^2} = \frac{x}{x \left(\frac{1}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x} \right)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x > 0); f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2}$$

b. Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$:

Soit x un réel, tel que : $x > 0$, on a : $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

posons : $t = \sqrt{x}$, alors : $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0^+ \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0^+$$

$$\text{par suite : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0^+, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2} = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c. Nature de la branche infinie:

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Soit } x \text{ un réel, tel que : } x > 0, \text{ on a : } \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1 + (\ln x)^2}$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty, \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + (\ln x)^2} = 0$$

$$\text{par suite : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + (\ln x)^2} = 0 \text{ finalement : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$.

3 a. Montrons que : $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{(\ln(x) - 1)^2}{(1 + \ln^2(x))^2}$

On a la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) &= \left(\frac{x}{1 + (\ln(x))^2} \right)' \\ &= \frac{1 \times (1 + \ln^2(x)) - x \left(2 \times \frac{1}{x} \ln(x) \right)}{(1 + \ln^2(x))^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \ln^2(x) - 2 \ln(x)}{(1 + \ln^2(x))^2} = \frac{(\ln(x) - 1)^2}{(1 + \ln^2(x))^2}$$

$$\text{Donc : } (\forall x > 0); f'(x) = \frac{(\ln(x) - 1)^2}{(1 + \ln^2(x))^2}$$

b. Dressons le tableau de variations de f :

$$\text{Soit } x > 0, \text{ on a : } (\ln(x) - 1)^2 \geq 0 \text{ et } (1 + \ln^2(x))^2 > 0$$

d'où : $f'(x) \geq 0$ et $f'(e) = 0$

le tableau de variations de f est :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	+	
f	0				

c. Équation de la tangente (T) :

On a : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$ d'où l'équation de la tangente (T) est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x \quad \text{Donc : (T) : } y = x$$

d. Étudions la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T) :

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f(x) - x &= \frac{x}{1 + (\ln x)^2} - x \\ &= x \left(\frac{1}{1 + (\ln x)^2} - 1 \right) = \frac{-x(\ln x)^2}{1 + (\ln x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{et puisque } -x(\ln x)^2 \leq 0 \text{ et } 1 + (\ln x)^2 > 0 \text{ alors : } \frac{-x(\ln x)^2}{1 + (\ln x)^2} \leq 0$$

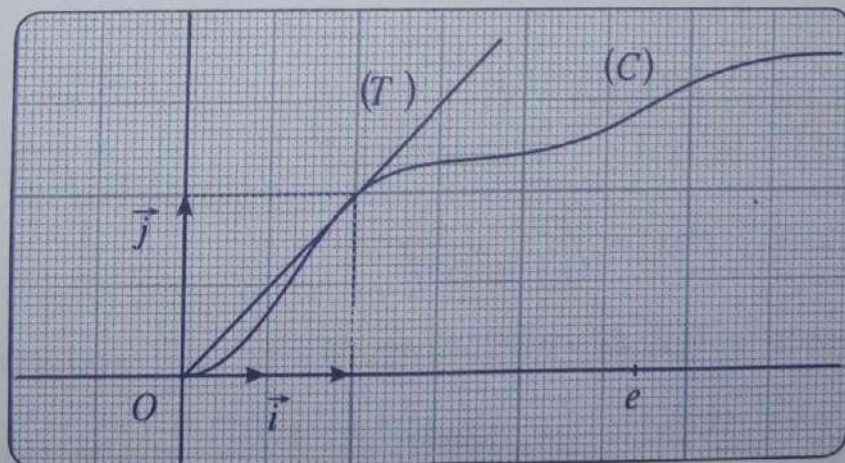
$$\text{d'où : } f(x) \leq x$$

$$\begin{aligned} \text{et on a : } ((\forall x > 0) ; f(x) = x &\Leftrightarrow \ln x = 0) \text{ et } f(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\text{donc : } (\forall x \geq 0) ; f(x) \leq x,$$

d'où la courbe (C) est au dessous de (T).

4 Traçons la courbe (C) :



a. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq e$

pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq e$. donc : $1 \leq u_0 \leq e$

soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que : $1 \leq u_n \leq e$ et montrons que : $1 \leq u_{n+1} \leq e$

on a : f est croissante sur $[0; +\infty[$, donc : $1 \leq u_n \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$
 $\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq \frac{e}{2}$

et on a : $\frac{e}{2} \leq e$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq e$, c'est-à-dire la propriété est vraie pour $n + 1$.

et d'après le principe de la récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq e$

b. Étudions la monotonie de la suite (u_n) :

d'après la question 3)d), on a : $(\forall x \geq 0) ; f(x) \leq x$

soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq 0$,

d'où : $f(u_n) \leq u_n$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_n$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq u_n$

ainsi la suite (u_n) est décroissante.

c. Dédution :

La suite (u_n) est décroissante est minorée par 1, donc elle converge.

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

La fonction f est continue sur $[1; e]$ et $f([1; e]) \subset [1; e]$

et la suite (u_n) est définie par : $u_0 \in [1; e]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

La suite (u_n) est convergente donc sa limite est la solution de l'équation

$f(x) = x$ dans l'intervalle $[1; e]$.

Puisque 0 et 1 sont les solutions de l'équation $f(x) = x$ et $0 \notin [1; e]$ et

$1 \in [1; e]$ alors : $\lim u_n = 1$.

▶ Introduction	3
▶ Activités préliminaires	4
▶ Continuité d'une fonction numérique	41
▶ Dérivation et ses applications - Étude des fonctions	101
▶ Suites numériques	257
▶ Fonctions logarithmes	326



LIBRAIRIE **ES-SALAM** AL-JADIDA

31/34 Place My Youssef - Habouss - Casablanca

Tel.: 05-22-30-40-16 / 05-22-30-37-11

Fax: 05-22-44-10-47

E-mail: lib.essalam@menara.ma

lib.essalam@hotmail.fr - lib.essalam@gmail.com

www.librairieessalam.com

Prix de vente public:

90,00 DH

ISSN 2508-9838
ISBN 978-9954-682-02-9

