

Exercice 1:

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(1)$ et $B(i)$. A tout point M d'affixe $z \neq i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{\bar{z}+i}$. Soit la droite $D : y = 1$

- 1 a Déterminer la position de M' lorsque M est un point de la droite D privé de B .
b Montrer que si $z = 1 + i - e^{i\theta}$ alors $z' = -e^{i\theta}$.
- 2 Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tel que $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$
- 3 a Montrer que pour tout $z \neq i$ on a : $z' \bar{z}' = 1$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
b Montrer que pour tout $M \notin D$ on a : $(AM') \perp (BM)$.
c Construire le point M' dans le repère $(0, \vec{u}, \vec{v})$, pour un point donné M .

Exercice 2:

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et D d'affixes respectives $a = -i, b = 3i$ et $d = -2 + i$

- 1 Placer les points A, B et D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- 2 a Ecrire $\frac{d-a}{d-b}$ sous forme algébrique.
b Dédire que ABD est un triangle rectangle et isocèle en D .
c Déterminer l'affixe c du point C tel que $ACBD$ soit un carré.

II- A tout point M distinct de B d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{iz-1}{z-3i}$

- 1 Déterminer l'ensemble des points M tel que z' est imaginaire.
- 2 a Montrer que $|z'| = \frac{MA}{MB}$
b En déduire que si M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ alors le point M' appartient à un cercle que l'on déterminera.
- 3 Soit I le milieu du segment $[AB]$ d'affixe z_I .
a Vérifier que $z' - z_I = \frac{-4}{z-b}$.
b En déduire que $(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) \equiv \pi - (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) [2\pi]$.
c Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la demi droite $[B, \vec{u})$ privé de B .

Exercice 3:

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 5 \cos x$

- 1 Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
- 2 Soit dans $\mathbb{R}$ la fonction $g(x) = a \cos x + b \sin x$. Déterminer les réels a et b pour que g soit une solution de l'équation (E).
- 3 Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E').
- 4 En déduire les solutions de (E).

Exercice 4:

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2u_n} \end{cases}$$

- 1
 - a Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 1$
 - b Montrer que la suite u est décroissante
 - c En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq 2$
 - d Montrer que la suite u est convergente et calculer sa limite ℓ
- 2
 - a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n-1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$
 - b En déduire par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 - c Retrouver alors la limite ℓ de la suite u
- 3 On définit la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que les deux suites u et v sont adjacentes
- 4 Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$.
 - a Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $n + 1 \leq S_n \leq n + 3 - \frac{1}{2^n}$.
 - b Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$
- 5 Pour tout entier naturel n , on pose : $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n$.
 - a Vérifier que $u_n + v_n = 2u_{n+1}$
 - b En déduire que $T_n = S_n + 2u_{n+1} - 4$