التمرين الأول (3 نقط):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A(0,1,4)$ و $B(2,1,2)$ و $C(2,5,0)$ و $\Omega(3,4,4)$

0.25	1) أ) بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$
0.5	ب) استنتج مساحة المثلث ABC والمسافة $d(B,(AC))$
	2) لتكن D منتصف القطعة $[AC]$
0.25	أ) تحقق أن $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$
0.5	ب) استنتج أن $d(\Omega,(ABC))=3$
	3) لتكن (S) الفلكة ذات المعادلة $x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$
0.5	أ) حدد مركز وشعاع الفلكة (S)
0.5	ب) بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) في نقطة ينبغي تحديدها
0.5	4) ليكن (Q_1) و (Q_2) المستويين الموازيين لـ (ABC) بحيث يقطع كل واحد منهما (S) وفق دائرة شعاعها $\sqrt{5}$ حدد معادلة ديكارتية لكل من المستويين (Q_1) و (Q_2)

التمرين الثاني (3 نقط):

في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $b=1+\sqrt{2}+i$ و $c=\bar{b}$ و $d=2i$

0.25	1) أكتب العدد العقدي a على الشكل المثلثي
0.25	2) أ) تحقق أن $b-d=c$
0.5	ب) بين أن $\left(\sqrt{2}+1\right)(b-a)=b-d$ واستنتج أن النقط A و B و D مستقيمية
0.25	3) أ) تحقق أن $ac=2b$
0.5	ب) استنتج أن $2arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$
	4) نعتبر الدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$، والذي يحول كل نقطة M ذات اللحق z، من المستوى إلى النقطة M' ذات اللحق z'
0.25	أ) بين أن $z'=\frac{1}{2}az$
0.5	ب) استنتج أن $R(A)=D$ وأن $R(C)=B$
0.5	ج) بين أن $\frac{b-a}{c-a}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$ ثم استنتج قياسا للزاوية $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)$

التمرين الثالث (3 نقط):

يحتوي صندوق U_1 على ست كرات تحمل الأعداد: 0، 0، 1، 1، 1، 2

ويحتوي صندوق U_2 على خمس كرات تحمل الأعداد : 1، 1، 1، 2، 2 .

نفترض أنه لا يمكن التمييز بين كرات الصندوقين باللمس.

نعتبر التجربة العشوائية التالية: نسحب كرة من الصندوق U_1 ، نسجل العدد a الذي تحمله، ثم نضعها في الصندوق U_2 وبعد ذلك نسحب كرة من الصندوق U_2 ونسجل العدد b الذي تحمله.

نعتبر الحدثين : A " الكرة المسحوبة من U_1 تحمل العدد 1 "

B " الجداء ab يساوي 2 "

0.5	1) أ) أحسب $p(A)$ ، احتمال الحدث A
0.5	ب) بين أن $p(B)=\frac{1}{4}$ (يمكن استعمال شجرة الإمكانيات)
0.75	2) أحسب $p(A/B)$ ، احتمال الحدث A علما أن الحدث B محقق.
	3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة للتجربة بالجداء ab
0.25	أ) بين أن $p(X=0)=\frac{1}{3}$.
0.5	ب) اعط قانون احتمال X (لاحظ أن القيم التي يأخذها X هي: 0 و 1 و 2 و 4)
0.5	ج) نعتبر الحدثين: M " الجداء ab زوجي غير منعدم" و N " الجداء ab يساوي 1" بين أن الحدثين M و N متساويا الاحتمال.

المسألة (11 نقط):

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$

ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)

0.25	1) أ) تحقق أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)=\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$
0.5	ب) بين أن $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=0$ وأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$)
0.5	ج) استنتج أن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.
0.75	د) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا، اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$
0.5	2) بين أن $f'(x)=\frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$

3) باستثمار جدول التغيرات أسفله للدالة المشتقة f' للدالة f على المجال $]0,+\infty[$:

x	0		1		β		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f'(\beta)$	$\searrow$	0

(نعطي $\beta \simeq 4,9$)

أ) أثبت أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات f . 0.5

ب) أنشئ جدول إشارة الدالة المشتقة الثانية f'' للدالة f على المجال $]0,+\infty[$ 0.5

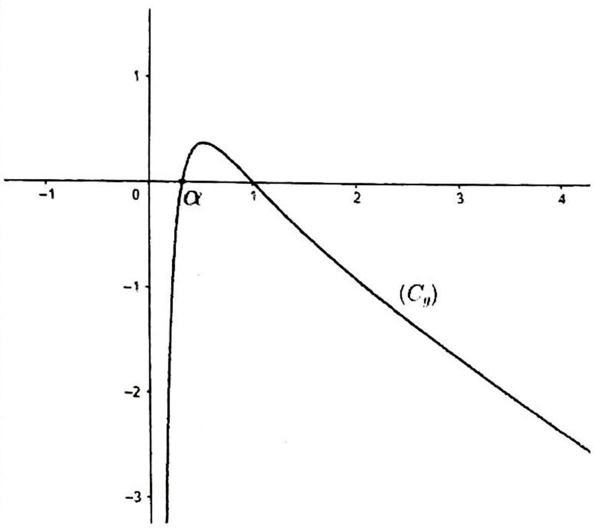
ج) استنتج تقعر المنحنى (C_f) محددا أفصولي نقطتي انعطافه. 1

4) المنحنى (C_g) جانبه، تمثيل مبياني للدالة

$g : x \mapsto f(x) - x$ والتي تنعدم في α و 1

$(\alpha \simeq 0,3)$

ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$



أ) انطلاقا من المنحنى (C_g)، حدد إشارة الدالة g على $]0,+\infty[$ 0.5

ب) استنتج أن المستقيم (Δ) يوجد تحت (C_f) على المجال $[\alpha,1]$ وفوق (C_f) على كل من $]0,\alpha]$ و $[1,+\infty[$ 0.5

5) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $\alpha \simeq 0,3$ و $\beta \simeq 4,9$ و $f(\beta) \simeq 1,9$) 1.5

6) أ) تحقق أن الدالة $x \mapsto 2x - x\ln x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto 1 - \ln x$ على $[\alpha,1]$ 0.5

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن $\int_{\alpha}^{1}(1-\ln x)^2 dx = 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha$ 1

ج) استنتج بدلالة α مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \alpha$ و $x = 1$ 0.75

7) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب $u_0 \in]\alpha,1[$ والعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ) بين بالترجع أن $\alpha < u_n < 1$ لكل n من $\mathbb{N}$ 0.5

ب) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية. (يمكن استعمال السؤال 4) ب) 0.5

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها. 0.75

التمرين الأول (3 نقط):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0=0$ و $u_{n+1}=\frac{u_n-2}{2u_n+5}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n>-1$	0.5
2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية ثم استنتج أن (u_n) متقاربة .	0.5
3) نضع $v_n=\frac{3}{1+u_n}$ ، لكل n من $\mathbb{N}$	
أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 2 ثم حدد حدها الأول.	0.5
ب) عبر عن u_n بدلالة n، لكل n من $\mathbb{N}$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)	0.5
4) نضع $w_n=e^{3-v_n}$ و $S_n=w_0+w_1+\ldots+w_n$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ) بين أن (w_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول.	0.5
ب) احسب نهاية المجموع S_n	0.5

التمرين الثاني (3 نقط):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,5)$ و $C(4,-5,7)$ و $\Omega(1,-1,0)$. نضع $\vec{u}=\overrightarrow{\Omega A}$

لتكن (S) الفلكة التي مركزها Ω و شعاعها $R=3$

1) أ) بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=13\vec{u}$ واستنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية.	0.5
ب) تحقق أن $x+2y+2z-8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)	0.25
ج) بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) في النقطة A	0.5
2) ليكن (P) المستوى الذي معادلته الديكارتية $3x+4y+z+1=0$ و (Δ) المستقيم المار من النقطة A والعمودي على المستوى (P)	
أ) بين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوى (P) في النقطة $H\left(\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$	0.5
ب) حدد إحداثيات النقطة D بحيث تكون النقطة H منتصف القطعة $[AD]$	0.5
3) ليكن (Q) المستوى المار من النقطة D والمتجهة $\overrightarrow{\Omega D}$ منظمية عليه.	
أ) بين أن المستوى (Q) مماس للفلكة (S) في D	0.25
ب) بين أن المستويين (Q) و (ABC) يتقاطعان وفق المستقيم (BC)	0.5

المسألة(8 نقط):

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)} & ; \quad x\le 2 \\ f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2) & ; \quad x>2 \end{cases}$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)

1) بين أن الدالة f متصلة في النقطة 2	0.5
2) أ) تحقق أن لكل $x<2$ و $x\neq 0$ ، $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=xe^{x(2-x)}-x.\frac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$	0.25
ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليسار في 2	0.5
ج) بين أن f قابلة للاشتقاق في 2 وأن $f'(2)=0$ ثم أول النتيجة هندسيا	0.75
3) أ) تحقق أن لكل $x\le 2$ ، $f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$	0.25
ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا	0.5
ج) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.	0.75
4) أ) بين أن لكل $x<2$ ، $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$	0.5
ب) بين أن لكل $x>2$ ، $f'(x)=(x-2)(1+2\ln(x-2))$	0.5
ج) حل في المجال $]2,+\infty[$ المتراجحة $1+2\ln(x-2)\le 0$	0.5
د) أدرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$	0.75
5) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (نعطي: $f(3)=1$ و $2+\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 2.6$ و $f\left(2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\approx 0.8$)	1
6) ليكن $\lambda\in]2,3[$	
أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن $\int_\lambda^3(x-2)^2\ln(x-2)dx=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$	0.5
ب) استنتج بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ لحيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيمات ذات المعادلات: $y=1$ و $x=\lambda$ و $x=3$	0.5
ج) احسب $\lim\limits_{\lambda\to 2^+}A(\lambda)$	0.25

التمرين الثالث (3 نقط):

1) نعتبر العدد العقدي $a=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

أ) بين أن $a=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$	0.25
ب) استنتج أن a^{2022} عدد حقيقي	0.25
2) في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي a و $\overline{a}$ حدد قياسا لزاوية الدوران R الذي مركزه O ويحول B إلى A	0.5
3) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E_\alpha): z^2-\sqrt{3}z+\alpha=0$ حيث α عدد حقيقي غير منعدم . نفترض أن المعادلة (E_α) تقبل حلين عقديين مترافقين غير حقيقيين z و $\overline{z}$ لتكن النقط $M(z)$ و $N(\overline{z})$ و $P(\sqrt{3})$ من المستوى العقدي. بدون حل المعادلة (E_α):	
أ) علل أن $\alpha=z\overline{z}$ و أن $\alpha>\frac{3}{4}$	0.5
ب) بين أن $\lvert z\rvert=\lvert z-\sqrt{3}\rvert$	0.5
ج) استنتج أن النقطتين M و N تنتميان الى المستقيم (Δ) واسط القطعة $[OP]$	0.5
د) حدد قيمة α التي من أجلها $\lvert z-\sqrt{3}\rvert=\sqrt{3}$ واستنتج في هذه الحالة، نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) والدائرة التي مركزها P وشعاعها $\sqrt{3}$.	0.5

التمرين الرابع (3 نقط):

يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء وكرتين سوداوين لا يمكن التمييز بينها باللمس.

1) نسحب عشوائيا وتآنيا كرتين من الصندوق.	
أ) أحسب احتمال الحدث A : " سحب كرة سوداء واحدة على الأقل "	0.5
ب) نعتبر الحدث B : " الحصول على كرتين من نفس اللون " . بين أن $p(B)=\frac{7}{15}$	0.5
ج) نكرر هذه التجربة خمس مرات مع إعادة الكرتين الى الصندوق بعد كل سحبة. ما هو احتمال تحقق الحدث B ثلاث مرات بالضبط؟	0.5
2) في هذا السؤال، نسحب كرات من الصندوق، واحدة تلو الأخرى وبدون إحلال، ونتوقف عن السحب عند الحصول على كرة بيضاء لأول مرة. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات التي تم إجراؤها في هذه التجربة.	
أ) علل أن القيم التي يأخذها X هي: 1 و 2 و 3	0.25
ب) بين أن $p(X=2)=\frac{4}{15}$	0.25
ج) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X	0.5
د) ما هو احتمال الحصول على كرة سوداء واحدة على الأقل؟	0.5