حساب الاحتمالات

$I-$ التعداد :

1) رئيسي مجموعة منتهية :

نسمي رئيسي مجموعة منتهية E عدد عناصرها ، ونرمز له بالرمز : $card(E)$.

حالة خاصة : $card(\phi)=0$.

2) عاميلي عدد صحيح طبيعي :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا ، نسمي عاميلي n العدد الذي نرمز له بالرمز $n!$ المعرف كما يلي :
$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times....\times1$ إذا كان $n\neq0$ و $0!=1$.

أمثلة : $1!=1$ ، $2!=2\times1=2$ ، $3!=3\times2\times1=6$ و $4!=4\times3\times2\times1=24$.

3) مبدأ الجداء (المبدأ العام للتعداد) :

نعتبر اختيارين، إذا كان الإختيار الأول يتم بـ n كيفية مختلفة، والإختيار الثاني يتم بـ m كيفية مختلفة، فإن عدد الكيفيات التي تتم بها هذه الإختيارات هو : $n\times m$.

ملاحظة : يمكن تطبيق المبدأ العام للتعداد في حالة ثلاثة اختيارات أو أكثر .

مثال :

نريد تكوين مكتب إحدى الجمعيات من رئيس ونائب وكاتب ، إذا علمت أن الرئيس يتم اختياره من بين الشخصين A و B والنائب من بين الأشخاص C و D و E و F والكاتب من بين الأشخاص G و H و I .
بكم من طريقة مختلفة يمكن تكوين هذا المكتب ؟

4) الترتيبات بتكرار – الترتيبات بدون تكرار – التبديلات :

نشاط :

1) كم من حالة ممكنة لتكوين عدد من فئة ثلاثة أرقام من بين الأرقام 1 ، 3 ، 4 و7 مع إمكانية تكرار الأرقام ؟
2) كم من حالة ممكنة لتكوين عدد من فئة ثلاثة أرقام من بين الأرقام 1 ، 3 ، 4 و7 دون تكرار الأرقام ؟
3) كم من حالة ممكنة لتكوين عدد من فئة ثلاثة أرقام من بين الأرقام 1 ، 3 و 4 دون تكرار الأرقام ؟

تعاريف وخاصيات :

ليكن n و p عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين ،

- كل اختيار بترتيب لـ p عنصر من بين n مع إمكانية تكرار نفس العنصر يسمى ترتيبة بتكرار لـ p عنصر من بين n ، وعدد إمكانياتها هو n^p .
- كل اختيار بترتيب لـ p عنصر من بين n(حيث $p\leq n$) بدون تكرار أيّ عُنصر يسمى ترتيبة بدون تكرار لـ p عنصر من بين n ، وعدد إمكانياتها هو A_n^p حيث : $A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$

كل ترتيبة بدون تكرار لـ n عنصر من بين n تسمى تبديلة لـ n عنصر ، وعددها هو $A_n^n=n!$

مثال : أحسب الأعداد التالية : A_5^4 ، A_6^3 و A_4^4 .

5) التأليفات :

لتكن E مجموعة تحتوي على n عنصر $(n\in\mathbb{N})$، كل جزء من E يحتوي على p عنصر $(p\leq n)$ يسمى تأليفة لـ p عنصر من بين n ، وعدد التأليفات لـp عنصر من بين n هو : C_n^p حيث : $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

مثال : أحسب الأعداد : C_4^1 ، C_6^6 ، C_7^3 ، C_7^4 .

تمرين تطبيقي :

يحتوي كيس على 5 كرات ،
1) نسحب من هذا الكيس تآنيا 3 كرات (أي نسحب 3 كرات في آن واحد) ، أحسب عدد الحالات الممكنة .
2) نفس السؤال لكن السحب هذه المرة بالتتابع وبدون إحلال (أي نسحب 3 كرات واحدة تلو الأخرى وبدون إرجاع الكرة المسحوبة) .
3) نفس السؤال لكن السحب هذه المرة بالتتابع وبإحلال (أي نسحب 3 كرات واحدة تلو الأخرى مع إرجاع الكرة المسحوبة دائما) .

خاصية :

ليكن n و p و q أعداد صحيحة طبيعية بحيث : $0 \le p \le n$ ، لدينا :

$A_n^n = n!$ و $A_n^1 = n$ و $A_n^p = p!C_n^p$ و $C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p$ و $C_n^0 = 1$ و $C_n^n = 1$ و $C_n^1 = n$

إذا كان $p+q=n$ فإن $C_n^p = C_n^q$.

II– حساب الاحتمالات :

1) التجارب العشوائية - مصطلحات :

كل تجربة لا نتوقع نتيجتها تسمى تجربة عشوائية أو اختبار عشوائي .

أمثلة :

رمي قطعة نقدية في الهواء، رمي نرد في الهواء، سحب كرة من كيس يحتوي على p كرة : تجارب عشوائية .

مصطلحات وتعاريف :

- مجموعة النتائج الممكنة تُكون مجموعة تسمى مجموعة الإمكانيات أو كون الإمكانيات ويرمز لها بالرمز Ω .
- كل عنصر من Ω يسمى إمكانية .
- كل جزء من Ω يسمى حدثا .

أمثلة :

نعتبر التجربة العشوائية : ‹‹ رمي قطعة نقدية مرتين في الهواء ›› ، ما هو كون الإمكانيات ؟

- عند رمي قطعة نقدية في الهواء هناك حالتان : إما أن تستقر فيظهر الوجه ونرمز له بالرمز F ($face$) وإما أن تستقر فيظهر الظهر ونرمز له بالرمز P ($pile$)

إمكانيات هذه التجربة هي FF ، FP ، PF و PP ، إذن كون الإمكانيات هو : $\Omega = \{FF;FP;PF;PP\}$

- نعتبر المجموعة A : ‹‹ الحصول على P مرة واحدة فقط ›› ، لدينا : $A = \{FP;PF\}$

لدينا $A \subset \Omega$ إذن A حدث من Ω .

أحداث خاصة :

- الحدث الأكيد :

نعلم أن Ω هو جزء من Ω ، إذن Ω حدث ، وبما أن أي نتيجة من نتائج التجربة تنتمي إلى Ω فإن الحدث Ω يقع دائما ، ونقول إن Ω حدث أكيد .

- الحدث المستحيل :

بما أن $\phi \subset \Omega$ فإن ϕ حدث، وهو لا يحتوي على أية نتيجة من نتائج التجربة، ونقول إن ϕ حدث مستحيل.

- الحدث الابتدائي :

كل حدث يحتوي على إمكانية واحدة يسمى حدثا ابتدائيا .

- انسجام حدثين :

نعتبر حدثين A و B ، إذا كان $A \cap B = \phi$ فإننا نقول إن الحدثين A و B غير منسجمين .

- الحدث المضاد لحدث :

ليكن A حدثا ، نسمي الحدث المضاد للحدث A ، الحدث الذي نرمز له بالرمز $\bar{A}$ والذي يحقق : $A \cap \bar{A} = \phi$ و $A \cup \bar{A} = \Omega$.

أمثلة :

نرمي نردا أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 ، نعتبر الأحداث التالية :

الحدث A : « ظهور رقم مضاعف لـ 4 » الحدث B : « ظهور رقم فردي »
الحدث C : « ظهور رقم زوجي » الحدث D : « ظهور رقم قابل للقسمة على 3 »

1) حدد كون الإمكانيات .
2) تحقق من أن A حدث ابتدائي .
3) بين أن الحدثين B و C غير منسجمين .
4) حدد الحدث المضاد للحدث D .

جواب :

1) لدينا كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية هو : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

2) لدينا : $A=\{4\}$ إذن A حدث ابتدائي لأن $card(A)=1$

3) لدينا $B=\{1;3;5\}$ و $C=\{2;4;6\}$ إذن $B\cap C=\phi$ ومنه B و C حدثين غير منسجمين .

4) لدينا $D=\{3;6\}$ والحدث المضاد للحدث D هو الحدث $\bar{D}=\{1;2;4;5\}$

2) احتمال حدث :

داخل مصنع للمصابيح الكهربائية نقوم بالتجربة العشوائية التالية : نأخذ عشوائيا مصباحا فنجربه ، قد يكون صالح (Parfait) وقد يكون تالف (Défectueux) ، كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية هو : $\Omega=\{\mathrm{P};\mathrm{D}\}$

نكرر هذه العملية N مرة ، الجدول التالي يلخص النتائج المحصلة :

N	10	100	1000	10000	100000
عدد مرات الحصول على الإمكانية D	0	5	45	401	4000
عدد مرات الحصول على الإمكانية P	10	95	955	9599	96000
تردد الإمكانية D	0	0,05	0,045	0,0401	0,04
تردد الإمكانية P	1	0,95	0,955	0,9599	0,96

نلاحظ أن تردد الإمكانية D يؤول تدريجيا إلى الاستقرار عند القيمة 0,04

وأن تردد الإمكانية P يؤول تدريجيا إلى الاستقرار عند القيمة 0,96

فنقول إن العدد 0,04 هو احتمال الحدث الابتدائي $\{\mathrm{D}\}$ ونكتب $P(\{\mathrm{D}\})=0{,}04$

وكذلك العدد 0,96 هو احتمال الحدث الابتدائي $\{\mathrm{P}\}$ ونكتب $P(\{\mathrm{P}\})=0{,}96$

ملاحظة : $P(\{\mathrm{D}\})+P(\{\mathrm{P}\})=0{,}04+0{,}96=1$

تعريف :

نعتبر تجربة عشوائية كون إمكانياتها مجموعة منتهية Ω ،
عندما يستقر تردد حدث ابتدائي $\{x_i\}$ في قيمة p_i نقول إن احتمال الحدث $\{x_i\}$ هو p_i ونكتب $p(\{x_i\})=p_i$.
احتمال حدث $A=\{x_1;x_2;...;x_n\}$ من Ω هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تُكَوِّنه، ونكتب :
$P(A)=p_1+p_2+\cdots+p_n$.

خاصيات :

ليكن A و B حدثين من Ω كون إمكانية تجربة عشوائية ، لدينا :
$0\le P(A)\le 1$ و $P(\phi)=0$ و $P(\Omega)=1$ و $P(\bar{A})=1-P(A)$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
إذا كان A و B حدثين غير منسجمين فإن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

خاصية (فرضية تساوي الاحتمالات) :

إذا كان جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانياتها Ω ، فإن كل حدث A احتماله هو : $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

تمرين تطبيقي :

يحتوي صندوق على 3 كرات خضراء و4 كرات حمراء ، بحيث لا يمكن التمييز بينها باللمس ،

1) نسحب تآنيا كرتين من الصندوق ، أحسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية :

الحدث A : ›› الحصول على كرتين لونهما أحمر ›› الحدث B : ›› الحصول على كرتين لهما نفس اللون ››

الحدث C : ›› الحصول على كرتين مختلفتا اللون ›› الحدث D : ›› الحصول على كرة خضراء على الأقل ››

2) نفس السؤال ، ولكن السحب هذه المرة بالتتابع وبدون إحلال .

3) نفس السؤال ، ولكن السحب هذه المرة بالتتابع وبإحلال .

3) الإحتمال الشرطي :

نشاط :

تضم إحدى الثانويات 250 تلميذا موزعين إلى داخليين وخارجيين حسب الجدول التالي :

اخترنا عشوائيا تلميذا من بين هؤلاء التلاميذ
(نعتبر أن لجميع التلاميذ نفس الإحتمال لاختيارهم)

	الداخليين	الخارجيين	المجموع
الذكور	120	80	200
الإناث	20	30	50
المجموع	140	110	250

أ) أحسب احتمال الأحداث التالية :
G : ›› اختيار تلميذ ذكر ‹‹
F : ›› اختيار تلميذة أنثى ‹‹
E : ›› اختيار تلميذ خارجي ‹‹
I : ›› اختيار تلميذ داخلي ‹‹
ب) احسب احتمالي الحدثين : $G \cap E$ و $G \cap I$.
ج) إذا كان التلميذ الذي تم اختياره ذكرا ،
فما هو الإحتمال أن يكون خارجيا ؟ نرمز لاحتمال هذا الحدث بالرمز : $p_G(E)$.

لدينا : $p_G(E) = \dfrac{80}{200} = \dfrac{2}{5}$ ونقول إن $\dfrac{2}{5}$ هو احتمال اختيار تلميذ خارجي علما أنه ذكر (أي احتمال الحدث E علما أن G محقق) .

د) قارن $p_G(E)$ مع $\dfrac{p(G \cap E)}{p(G)}$.

هـ) أحسب $p_G(I)$ ثم قارنه مع $\dfrac{p(G \cap I)}{p(G)}$.

تعريف :

في تجربة عشوائية نعتبر حدثين A و B بحيث : $P(A) \neq 0$.
احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق هو العدد الذي نرمز له بالرمز $P_A(B)$ أو بالرمز $P(B/A)$
حيث : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

نتيجة : (صيغة الاحتمالات المركبة)

ليكن A و B حدثين من نفس التجربة العشوائية بحيث $P(A) \neq 0$ و $P(B) \neq 0$ ،
لدينا : $P(A \cap B) = P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)$

خاصية :

ليكن A و B حدثين من نفس التجربة العشوائية بحيث $P(A) \neq 0$ و $P(\bar{A}) \neq 0$ ،
لدينا : $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$

تمرين تطبيقي :

نعتبر صندوقين U_1 و U_2 ، يحتوي الصندوق U_1 على 4 كرات زرقاء و3 كرات حمراء ، ويحتوي الصندوق U_2 على 5 كرات زرقاء وكرة واحدة حمراء ، جميع الكرات غير قابلة للتمييز باللمس .
نرمي قطعة نقدية مثالية، عندما تستقر : إذا ظهر الوجه F نسحب تآنيا من الصندوق U_1 كرتين أما إذا ظهر الظهر P نسحب بالتتابع وبدون إحلال من الصندوق U_2 كرتين .
أحسب احتمال سحب كرتين لهما نفس اللون .

الحل :

نعتبر الأحداث التالية :
U_1: ›› اختيار الصندوق U_1 ‹‹ و U_2 : ›› اختيار الصندوق U_2 ‹‹
و B : ›› سحب كرتين لهما نفس اللون ‹‹ إذن $P(B) = P(U_1)P_{U_1}(B) + P(\overline{U}_1)P_{\overline{U}_1}(B)$
$P(B) = P(U_1)P_{U_1}(B) + P(U_2)P_{U_2}(B)$ لأن $\overline{U}_1 = U_2$
لدينا $P(U_1) = P(F) = \dfrac{1}{2}$ و $P(U_2) = P(P) = \dfrac{1}{2}$

ولدينا $P_{U_1}(B)=\dfrac{C_4^2+C_3^2}{C_7^2}=\dfrac{6+3}{21}=\dfrac{3}{7}$ و $P_{U_2}(B)=\dfrac{A_5^2}{A_6^2}=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$

إذن : $P(B)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{23}{42}$

4) الإستقلالية :

أ) استقلالية حدثين :

نشاط :

يحتوي كيس على 4 كرات حمراء وكرتين خضراوين ، لا يمكن التمييز بينها باللمس .

1) نسحب بالتتابع وبإحلال كرتين من الكيس .

ليكن R_1 الحدث: ‹‹ الكرة الأولى حمراء ›› و R_2 الحدث: ‹‹ الكرة الثانية حمراء ››

أحسب $P(R_1)\times P(R_2)$ و $P(R_1\cap R_2)$.

2) نفس السؤال السابق لكن السحب بالتتابع وبدون إحلال .

الحل :

1) لدينا : $P(R_1)=\dfrac{4^1\times 6^1}{6^2}=\dfrac{4\times 6}{36}=\dfrac{2}{3}$ و $P(R_2)=\dfrac{4^2+2^1\times 4^1}{6^2}=\dfrac{16+8}{36}=\dfrac{24}{36}=\dfrac{2}{3}$

إذن : $P(R_1)\times P(R_2)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$ ولدينا : $P(R_1\cap R_2)=\dfrac{4^2}{6^2}=\dfrac{16}{36}=\dfrac{4}{9}$

2) لدينا : $P(R_1)=\dfrac{A_4^1\times A_5^1}{A_6^2}=\dfrac{4\times 5}{30}=\dfrac{2}{3}$ و $P(R_2)=\dfrac{A_4^2+A_2^1\times A_4^1}{A_6^2}=\dfrac{12+8}{30}=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$

إذن : $P(R_1)\times P(R_2)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$ و $P(R_1\cap R_2)=\dfrac{A_4^2}{A_6^2}=\dfrac{12}{30}=\dfrac{2}{5}$

ملاحظة :

في السؤال 1) لدينا :

$P(R_1\cap R_2)=P(R_1)\times P(R_2)$ إذن $\dfrac{P(R_1\cap R_2)}{P(R_1)}=P(R_2)$ ومنه $P_{R_1}(R_2)=P(R_2)$

وهذا يعني أن وقوع الحدث R_1 لم يؤثر على وقوع الحدث R_2 .

وفي هذه الحالة نقول إن الحدثين R_1 و R_2 مستقلين .

في السؤال 2) لدينا :

$P(R_1)\times P(R_2)\neq P(R_1\cap R_2)$ إذن $P(R_2)\neq\dfrac{P(R_1\cap R_2)}{P(R_1)}$ ومنه $P(R_2)\neq P_{R_1}(R_2)$

وهذا يعني أن وقوع الحدث R_1 قد أثر على وقوع الحدث R_2 فنقول إن الحدثين R_1 و R_2 غير مستقلين .

تعريف :

في تجربة عشوائية نعتبر حدثين A و B .
نقول إن الحدثين A و B مستقلين إذا وفقط إذا كان $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

خاصية :

ليكن A و B حدثين من نفس التجربة العشوائية بحيث $P(A)\neq 0$.
يكون الحدثين A و B مستقلين إذا وفقط إذا كان $P_A(B)=P(B)$

ب) استقلالية الاختبارات العشوائية :

تعريف :

نقول عن تجربة عشوائية أنها تتكون من اختبارات عشوائية مستقلة إذا كانت نتيجة كل اختبار من هذه الاختبارات لا تؤثر في نتيجة الاختبار الموالي .

أمثلة :

‹‹ رمي قطعة نقدية n مرة ›› (حيث $n\in\mathbb{N}^*$) تجربة عشوائية تتكون من n اختبارات عشوائية مستقلة .
‹‹ رمي نرد n مرة ›› (حيث $n\in\mathbb{N}^*$) تجربة عشوائية تتكون من n اختبارات عشوائية مستقلة .
‹‹ سحب p كرة بالتتابع وبإحلال من كيس يحتوي على n كرة غير قابلة للتمييز باللمس ›› (حيث $p,n\in\mathbb{N}^*$) تجربة عشوائية تتكون من p اختبارات عشوائية مستقلة .

خاصية :

ليكن A حدثا في اختبار عشوائي مستقل بحيث $P(A)=p$ ، إذا أعيد هذا الاختبار n مرة فإن :
احتمال وقوع الحدث A ، k مرة بالضبط $(0\le k\le n)$ هو $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

تمرين تطبيقي :

نرمي نردا مثاليا 6 مرات ، ما هو احتمال ظهور رقم قابل للقسمة على 3 أربع مرات بالضبط ؟

الحل :

ليكن A الحدث : ‹‹ ظهور رقم قابل للقسمة على 3 ›› إذن $A=\{3;6\}$ ، النرد مثالي إذن: $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

إذن احتمال وقوع الحدث A أربع مرات بالضبط هو $C_6^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(1-\frac{1}{3}\right)^{6-4}=15\times\frac{1}{81}\times\frac{4}{9}=\frac{20}{243}$

III– المتغيرات العشوائية :

1) تمهيد :

يحتوي كيس على 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6 ، وغير قابلة للتمييز باللمس .
نسحب تآنيا 3 كرات من الكيس .
ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .
ليكن X التطبيق المعرف من Ω إلى $\mathbb{R}$ والذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل رقما فرديا من بين الكرات الثلاثة المسحوبة .
لدينا $X(\Omega)$ مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها X هي : $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$
ليكن $k\in X(\Omega)$
نرمز بـ $(X=k)$ للحدث : ‹‹ الحصول على k من الكرات تحمل رقما فرديا ››
نرمز بـ $(X\ge k)$ للحدث : ‹‹ الحصول على الأقل على k من الكرات تحمل رقما فرديا ››
نرمز بـ $(X\le k)$ للحدث : ‹‹ الحصول على الأكثر على k من الكرات تحمل رقما فرديا ››
نرمز بـ $(k\le X\le k')$ للحدث: ‹‹الحصول على عدد محصور بين k و k' من الكرات تحمل رقما فرديا››
لنحسب مثلا $P(X=1)$:

لدينا : $P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$

تعريف :

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية .
كل تطبيق X معرف من Ω إلى $\mathbb{R}$ يسمى متغيرا عشوائيا .

ملاحظة :

$X(\Omega)$ مجموعة الصور بالتطبيق X عادة ما تكتب على شكل : $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3;...;x_n\}$
حيث $x_1<x_2<x_3<...<x_n$

2) قانون احتمال متغير عشوائي :

تعريف :

قانون احتمال (أو توزيع احتمال) المتغير العشوائي X هو التطبيق f الذي يربط كل عنصر x_i من $X(\Omega)$ باحتمال الحدث $(X=x_i)$ ، أي : $\mathrm{f}(x_i)=P(X=x_i)$

ملاحظة :

يتم تحديد قانون احتمال متغير عشوائي X بالمراحل التالية :

- تحديد $X(\Omega)$.
- حساب الاحتمالات $P(X=x_i)$ لكل عنصر x_i من $X(\Omega)$.
- كتابة النتائج في جدول يسمى جدول قانون احتمال المتغير العشوائي X .

تمرين تطبيقي :

يحتوي كيس على 4 كرات حمراء و3 كرات زرقاء غير قابلة للتمييز باللمس، نسحب تآنيا 4 كرات من الكيس .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء من بين الكرات الأربعة المسحوبة .

1) ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية حدد $X(\Omega)$.

2) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

الحل :

1) لدينا : $X(\Omega)=\{1;2;3;4\}$.

2) لدينا : $P(X=1)=\frac{C_4^1C_3^3}{C_7^4}=\frac{4}{35}$ و $P(X=2)=\frac{C_4^2C_3^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}$ و $P(X=3)=\frac{C_4^3C_3^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$

و $P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_7^4}=\frac{1}{35}$ ، نلخص هذه النتائج في جدول قانون احتمال المتغير العشوائي X :

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

3) الأمل الرياضي – المغايرة - الإنحراف الطرازي لمتغير عشوائي :

تعريف :

ليكن X متغير عشوائي معرف على كون إمكانيات تجربة عشوائية، ولتكن $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3;...;x_n\}$
مجموعة القيم التي يأخذها X و $p_i=P(X=x_i)$ حيث $1\leq i\leq n$.

العدد : $\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$

يسمى الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X ونرمز له بالرمز $E(X)$ أو بالرمز $\overline{X}$.

العدد : $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2p_i=\left(x_1-\overline{X}\right)^2p_1+\left(x_2-\overline{X}\right)^2p_2+\cdots+\left(x_n-\overline{X}\right)^2p_n$

يسمى مغايرة المتغير العشوائي X ونرمز لها بالرمز $V(X)$.

العدد : $\sqrt{V(X)}$ يسمى الإنحراف الطرازي للمتغير العشوائي X ونرمز له بالرمز $\sigma(X)$.

خاصية :

في نفس شروط التعريف السابق لدينا : $V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2$ حيث : $E\left(X^2\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i$

مثال :

لنحدد الأمل الرياضي والمغايرة والانحراف الطرازي للمتغير العشوائي X الوارد في التمرين التطبيقي السابق:

لدينا : $E(X)=1\cdot\frac{4}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{12}{35}+4\cdot\frac{1}{35}=\frac{80}{35}=\frac{16}{7}$

ولدينا : $V(X)=\left(1-\frac{16}{7}\right)^2\cdot\frac{4}{35}+\left(2-\frac{16}{7}\right)^2\cdot\frac{18}{35}+\left(3-\frac{16}{7}\right)^2\cdot\frac{12}{35}+\left(4-\frac{16}{7}\right)^2\cdot\frac{1}{35}$

إذن : $V(X)=\frac{81}{49}\cdot\frac{4}{35}+\frac{4}{49}\cdot\frac{18}{35}+\frac{25}{49}\cdot\frac{12}{35}+\frac{144}{49}\cdot\frac{1}{35}=\frac{24}{49}$

لدينا : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{24}{49}}=\frac{2\sqrt{6}}{7}\simeq 0,7$

حساب $V(X)$ بطريقة أخرى : $E\left(X^2\right)=1^2\cdot\frac{4}{35}+2^2\cdot\frac{18}{35}+3^2\cdot\frac{12}{35}+4^2\cdot\frac{1}{35}=\frac{40}{7}$

إذن : $V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{40}{7}-\left(\frac{16}{7}\right)^2=\frac{40}{7}-\frac{256}{49}=\frac{280-256}{49}=\frac{24}{49}$

خاصية وتعريف :

نعتبر تجربة عشوائية بحيث تكون نتيجتها إما تحقق حدث A احتماله $P(A)=p$ أو عدم تحققه ، ننجز هذا الاختبار n مرة $(n\in\mathbb{N}^*)$.
إذا كان X هو المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A، فإن قانون احتمال X يعطى بالصيغة : $P(X=x_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ حيث $0\le k\le n$.
المتغير العشوائي X يسمى متغير عشوائي حداني وسيطاه هما n و p .
قانون احتمال X يسمى توزيعا حدانيا ولدينا : $E(X)=np$ و $V(X)=npq$ حيث $q=1-p$.

تمرين تطبيقي :

يحتوي صندوق على 4 كرات بيضاء وكرتين سوداوين (جميع الكرات غير قابلة للتمييز باللمس) .
نعتبر اللعبة التالية : يسحب اللاعب بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق ، ويعتبر اللاعب فائزا إذا كانت الكرتين المسحوبتين لونهما أبيض ،
نعتبر التجربة العشوائية : يكرر اللاعب هذه اللعبة 5 مرات ،
ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة من النتائج هذه التجربة العشوائية بعدد المرات التي يفوز فيها اللاعب.
1) حدد قانون احتمال X .
2) أحسب $E(X)$ و $V(X)$.