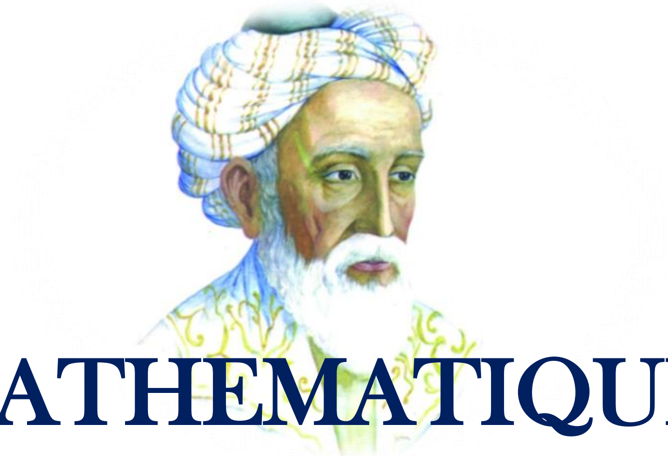
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⵓⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵙⵏⵎⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

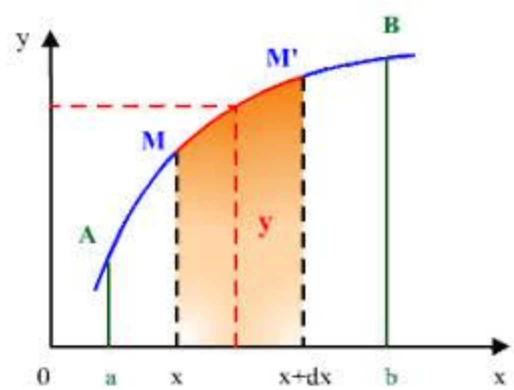
المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

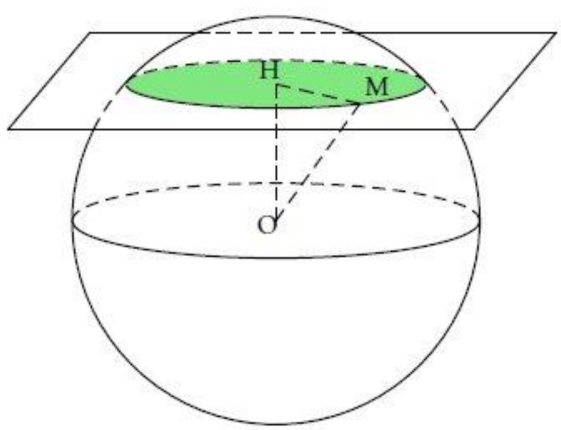


MATHEMATIQUES

Examens nationaux 2003-2021

2 Bac.Sciences expérimentales





Exercice 1 : (2 *points*)

1 **1.** *En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale :* $I = \int_1^2 \ln(x)\, dx$.

1 **2.** *Calculer l'intégrale :* $J = \int_0^{\ln 4} x\sqrt{e^x}\, dx$ *(on pourra poser* $t = \sqrt{e^x}$ *).*

Exercice 2 : (3 *points*)

Un sac contient six boules blanches portant les nombres 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 2 *et deux boules noires portant les nombres* 0 *et* 1 *(les boules sont indiscernables au toucher).*
On tire simultanément et au hasard deux boules du sac.

1. *Calculer les probabilités des deux événements suivants :*
0,5 *A :" les deux boules tirées sont de même couleur ".*
1 *B :" le produit des nombres portés par les deux boules est nul ".*

1,5 **2.** *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des deux nombres portés par les deux boules tirées.*
Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 3 : (3,5 *points*)

Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ *et* α *un de ses arguments.*
Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : mz^2 - 2z + \overline{m} = 0$$

(on rappelle que $\overline{m}$ *est le conjugué de m et que* $|m| = \sqrt{m\overline{m}}$ *).*

1 **1.** *Montrer que les deux solutions de l'équation* (E) *sont :*

$$z' = \frac{1+i}{m} \quad et \quad z'' = \frac{1-i}{m}.$$

1,5 **2.** *Ecrire sous forme trigonométrique* z', z'' *et* $\frac{z'}{z''}$.

1 **3.** *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$, *on considère les points A, B et C d'affixes* z', z'' *et* $z' + z''$ *respectivement.*
Montrer que le quadrilatère OACB est un carré.

Exercice 4 : (2,5 *points*)

On considère, dans l'espace muni d'un repère orthonormé, le point $A(2,0,2)$ *et le plan* (P) *d'équation :* $x + y - z - 3 = 0$.

0,5 **1.** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (D) *passant par le point A et orthogonale au plan* (P).

0,5	**2.** *Déterminer les coordonnées de B point d'intersection de la droite* (D) *et le plan* (P).
	3. *On considère la sphère* (S) *de centre A et qui coupe le plan* (P) *suivant le cercle de centre B et de rayon 2.*
1	**a)** *Déterminer le rayon de la sphère* (S).
0,5	**b)** *Ecrire une équation cartésienne de la sphère* (S).
	Problème : (9 *points*)
	On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $\begin{cases} f(x) = \ln(1-x^3) & si\ x<0 \\ f(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$.
	Soit (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*
0,5	**1.a)** *Montrer que f est continue au point* 0.
1	**b)** *Montrer que f est dérivable au point* 0 *(on rappelle que :* $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$*).*
1,5	**2.** *Montrer que la fonction f est décroissante sur les deux intervalles* $]-\infty;0[$ *et* $[1;+\infty[$ *et croissante sur l'intervalle* $[0;1]$.
0,5	**3.a)** *Calculer* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
0,5	**b)** *Vérifier que : pour tout* $x<0$, $\frac{f(x)}{x} = 3\frac{\ln(-x)}{x} + \frac{\ln(1-x^{-3})}{x}$.
0,5	**c)** *Etudier les deux branches infinies de la courbe* (C).
1	**4.** *Construire la courbe* (C).
	5. *Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle* $]-\infty;0[$.
0,5	**a)** *Montrer que h admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition J.*
1	**b)** *Déterminer* $h^{-1}(x)$ *pour tout x de J.*
	6. *On considère la suite* (u_n) *définie par :* $u_0 = \frac{4}{9}$ *et pour tout n de* $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^2$. *On pourra, ci-après, utiliser les résultats de l'étude de la fonction f.*

0,5	**a)** *Montrer par récurrence que : pour tout n de* $\mathbb{N}$, $\frac{4}{9} \leq u_n \leq 1$.
0,5	**b)** *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*
1	**c)** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*

	Exercice 1 : (2,5 *points*)
	Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on considère le plan (P) et la sphère (S) définis respectivement par les équations cartésiennes :
	$(P): x-2y+2z-2=0$
	$(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$
0,5	**1.** *Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).*
0,5	**2.** *Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S).*
1,5	**3.** *Déterminer le point d'intersection du plan (P) et la sphère (S).*
	Exercice 2 : (2,5 *points*)
1	**1.** *Calculer l'intégrale :* $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}\lvert\ln(x)\rvert dx$.
1	**2.a)** *Déterminer les deux réels a et b pour que :*
	$\frac{2}{1+t}=a+\frac{b}{1+t}$ *pour tout réel t différent de* -1.
0,5	**b)** *Calculer l'intégrale :* $J=\int_{2}^{7}\frac{1}{1+\sqrt{2+x}}dx$ *(on pourra poser* $t=\sqrt{2+x}$ *).*
	Exercice 3 : (2,5 *points*)
	Un sac contient six boules indiscernables au toucher et portant les nombres : -2, -1 , 0 , 1 , 1 , 2 .
	On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard trois boules du sac.
	1. *On considère, après avoir effectué cette épreuve, les deux événements suivants :*
	A :"parmi les boules tirées, il y a au moins une portant le nombre 1".
	S : "la somme des nombres que portent les trois boules est nul".
0,5	**a)** *Calculer la probabilité de l'évènement A.*
1	**b)** *Montrer que la probabilité de l'événement S est égale à* $\frac{1}{5}$.
1	**2.** *On répète l'épreuve précédente quatre fois (on remet à chaque fois les boules tirées dans le sac).*
	Quelle est la probabilité pour que l'événement S soit réalisé trois fois exactement.
	Exercice 4 : (3,5 *points*)
0,5	**1.a)** *Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe :* $(4+i)^2$.

1 **b)** *Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :*

$$z^2+(2-3i)z-5(1+i)=0$$

2. *On considère dans le plan complexe, les points A, B et C d'affixes respectives:*

$$a=1+2i\ ,b=-3+i\ \text{ et }\ c=6i.$$

1 **a)** *Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe* $\dfrac{c-a}{b-a}$.

1 **b)** *En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.*

Problème : (9 *points*)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ *par:* $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$

0,5 **1.** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

0,5 **2.** *Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite au point* 0.

1 **3.** *Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle* $[0,1]$ *et croissante sur l'intervalle* $[1,+\infty[$.

Deuxième partie :

On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_0=2$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

1 **1.** *Montrer par récurrence que :* $1\le u_n\le 2$, *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

0,5 **2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*

1 **3.** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*

Troisième partie :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ *par :*

$$g(x)=\ln\left(x-2\sqrt{x}+2\right)$$

Et soit (C) *la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.*

0,5 **1.a)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

0,5 **b)** *Etudier la branche infinie de la courbe* (C).

1 **2.** *Etudier les variations de la fonction g*

	(*on admet que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g(x)-g(0)}{x}=-\infty$)
1	**3.** *Construire la courbe* (C).
	4. *Soit h la restriction de la fonction g à l'intervalle* $[1,+\infty[$.
0,5	**a)** *Montrer que h admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition J.*
1	**b)** *Déterminer* $h^{-1}(x)$ *pour tout x de J.*

	Exercice 1 : (3,5 *points*)
	L'espace (E) *est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
	Soit (S) *l'ensemble des points* $M(x,y,z)$ *tels que :* $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$.
1	**1.** *Montrer que* (S) *est une sphère de centre* $\Omega(0,2,-1)$ *et de rayon* $r=\sqrt{3}$.
0,25	**2.a)** *Vérifier que le point* $A(-1,1,0)$ *appartient à la sphère* (S).
1	**b)** *Ecrire une équation du plan* (P) *tangent à la sphère* (S) *au point A.*
0,5	**3.a)** *Vérifier que :* $x+y+z-2=0$ *est une équation cartésienne du plan* (Q) *passant par le point* $B(1,3,-2)$ *et* $\vec{n}(1,1,1)$ *est un vecteur qui lui est normal.*
0,75	**b)** *Montrer que* (Q) *coupe* (S) *suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.*
	Exercice 2 : (3,5 *points*)
	On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ *l'équation :* $(E):\ z^2-4iz-4(1+i)=0$.
	On désigne par z_1 *et* z_2 *les deux solutions de l'équation* (E) *tel que :* $\mathscr{R}e(z_1)>0$.
1	**1.** *Montrer que le discriminant de l'équation* (E) *est :* $\Delta=\left[2\sqrt{2}(1+i)\right]^2$ *puis déterminer* z_1 *et* z_2.
1	**2.** *On pose :* $a=2i$ *et* $b=\sqrt{2}(1+i)$. *Vérifier que :* $z_1=a+b$ *et* $z_2=a-b$ *puis écrire a et b sous forme trigonométrique.*
	3. *On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$, *les points A, B et C d'affixes respectives a, b et* z_1.
1	**a)** *Représenter les points A, B et C et vérifier que :* $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ *et que* $OA=OB$.
0,5	**b)** *En déduire que OBCA est un losange et que :* $\arg(z_1)\equiv\dfrac{3\pi}{8}[2\pi]$.
	Exercice 3 : (3 *points*)
	Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher : deux jetons blancs portant le nombre 1, *trois jetons rouges portant les nombres* 1, 2 *et* 2 *et quatre jetons noires portant les nombres* 1, 1, 2 *et* 2. *On tire simultanément et au hasard trois jetons du sac.*

0,75 — **1.** *Calculer les probabilités des événements suivants :*

A :" les trois jetons tirés sont de couleurs différentes (un jeton de chaque couleur)".

0,75 — *B :" les trois jetons tirés portent le même nombre".*

0,75 — *C :" au moins un jeton parmi les jetons tirés est rouge".*

0,75 — **2.** *Calculer la probabilité de l'événement* $A \cap B$.

Exercice 4 : (10 *points*)

I) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}.$$

(C) *est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,5 — **1.a)** *Vérifier que :* $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.

0,5 — **b)** *En déduire que f est une fonction impaire.*

0,5 — **2.** *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

1,25 — **3.a)** *Montrer que :* $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.

0,5 — **b)** *Donner le tableau de variations de la fonction f sur* $\mathbb{R}^+$.

0,5 — **c)** *En déduire que :* $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$ *pour tout x de* $\mathbb{R}^+$.

0,5 — **4.** *Montrer que :* $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\right] = 0$ *puis interpréter géométriquement ce résultat.*

1,5 — **5.** *Tracer dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *la droite d'équation* $y = 1 - \frac{1}{2}x$ *puis construire la courbe* (C).

1,25 — **6. a)** *En posant* $t = e^{-x}$, *montrer que* $\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+e^x}\,dx = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

0,75 — **b)** *Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C), *l'axe des abscisses et les deux droites d'équations :* $x = -1$ *et* $x = 0$.

	II *) Soit* (u_n) *la suite numérique définie par :*
	$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n}+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$
0,5	**1.** *Montrer par récurrence que :* $u_n > 0$ *, pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,5	**2.a)** *Vérifier, en utilisant le résultat de la question* ***I*** *)* **3.c)**, *que :* $$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$
0,5	**b)** *En déduire que la suite* (u_n) *est décroissante.*
0,75	**3.** *Montrer que :* $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *puis calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 1 : (2,5 *points*)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0,5 **1.a)** *Montrer que :* $u_n > 0$, *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.

0,5 **b)** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*

0,25 **c)** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*

0,5 **2.a)** *Montrer que :* $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$, *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.

0,75 **b)** *En déduire que :* $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$, *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$ *puis calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (3,5 *points*)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, *les points* $A(1,2,-2)$, $B(0,3,-3)$ *et* $C(1,1,-2)$ *et le plan* (P) *d'équation :* $x+y-3=0$.

0,5 **1.a)** *Calculer la distance du point* $\Omega(0,1,-1)$ *au plan* (P).

1 **b)** *En déduire qu'une équation cartésienne de la sphère* (S) *de centre* $\Omega(0,1,-1)$ *et tangente au plan* (P) *est :* $x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$.

0,75 **2.a)** *Déterminer* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ *puis en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.*

0,5 **b)** *Montrer que :* $x-z-3=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

0,25 **3.a)** *Vérifier que la sphère* (S) *est tangente au plan* (ABC).

0,5 **b)** *Calculer la distance* ΩC *et en déduire le point de contact de* (S) *et le plan* (ABC).

Exercice 3 : (3 *points*)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ *l'équation suivante :*

$$(E):\ 2z^2 - 2iz - 1 = 0.$$

0,75 **1.a)** *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E). (z_1 *et* z_2 *sont les deux solutions de l'équation tel que* $\mathcal{R}e(z_1) > 0$).

0,5 **b)** *Ecrire* z_1 *et* z_2 *sous forme trigonométrique.*

2. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé* $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, *on considère les points A, B et S d'affixes respectives :*

$$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\ ,\ b=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\ \text{ et }\ s=i.$$

0,75 **a)** *Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe* $\dfrac{a-s}{b-s}$.

0,5 **b)** *En déduire que le triangle SAB est équilatéral et rectangle en S.*

0,5 **c)** *Montrer que le quadrilatère OASB est un carré.*

Exercice 4 : (3 *points*)

Un sac U_1 *contient deux jetons portants le nombre* 1 *et quatre jetons portants le nombre* 2 *(les jetons sont indiscernables au toucher), un autre sac* U_2 *contient trois boules rouges et quatre boules vertes (les boules sont aussi indiscernables au toucher).*

On tire au hasard un jeton du sac U_1.

1. *Calculer la probabilité de chacun des deux événements suivants :*

0,5 *A :" le jeton tiré porte le nombre* 1*".*

0,5 *B :" le jeton tiré porte le nombre* 2*".*

2. *On considère dans cette question l'expérience aléatoire suivante :*

On tire un jeton du sac U_1 *et on note le nombre qu'il porte :*

- *Si ce nombre est* 1, *on tire une boule du sac* U_2.
- *Si ce nombre est* 2, *on tire simultanément deux boules du sac* U_2.

Soit n le nombre de boules rouges tirées du sac U_2 *et* E_n *l'événement :" tirer exactement n boules rouges".*

1,5 **a)** *Montrer que :* $p\left(E_1\right)=\dfrac{11}{21}$ *et* $p\left(E_2\right)=\dfrac{2}{21}$.

0,5 **b)** *Calculer la probabilité de l'événement A sachant que l'événement* E_1 *est réalisé.*

Exercice 5 : (8 *points*)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right).$$

(C) *est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

0,25 **1.a)** *Vérifier que :* $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.

0,75	**b)** *En déduire que f est définie sur* $\mathbb{R}$ *puis calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
0,5	**2.** *Montrer que :* $f(2-x)=f(x)$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *puis en déduire que la droite d'équation* $x=1$ *est un axe de symétrie de la courbe* (C).
0,5	**3.a)** *Vérifier que :* $f(x)=2\ln(x)+\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$ *pour tout x de l'intervalle* $[1;+\infty[$.
0,5	**b)** *En déduire que :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ *puis interpréter géométriquement ce résultat.*
0,5	**4.a)** *Montrer que :* $f'(x)=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.
0,5	**b)** *Donner le tableau de variations de la fonction f sur* $\mathbb{R}$.
0,5	**5.a)** *Montrer que :* $f''(x)=\dfrac{2x(2-x)}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.
0,5	**b)** *Etudier la concavité de la courbe* (C).
0,75	**6.** *Construire la courbe* (C).
	7. *Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle* $[1;+\infty[$.
0,5	**a)** *Montrer que h admet une fonction réciproque* h^{-1} *définie sur un intervalle J que l'on précisera.*
0,5	**b)** *Déterminer* $h^{-1}(x)$ *pour tout x de J.*
0,5	**8. a)** *En posant* $t=x-1$, *montrer que :* $\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^{1}\ln(1+t^2)dt$.
0,5	**b)** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\displaystyle\int_{-1}^{1}\ln(1+t^2)dt=\ln 2-2\int_{-1}^{0}\frac{t^2}{1+t^2}dt$
0,5	**c)** *Montrer que :* $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{t^2}{1+t^2}dt=1-\frac{\pi}{4}$ *(remarquer que :* $\dfrac{t^2}{1+t^2}=1-\dfrac{1}{1+t^2}$ *pour tout t de* $\mathbb{R}$ *).*
0,25	**d)** *En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C), *l'axe des abscisses et les deux droites d'équations :* $x=1$ *et* $x=0$.

	Questions : (4,5 *points*)
1	**1.** *Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :* $$z^2-2(1+2i)z+1+4i=0.$$
1	**2.** *Montrer que :* $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}=1.$
1	**3.** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\int_1^e x^2\ln x\,dx=\dfrac{2e^3+1}{9}.$
1,5	**4.** *Montrer que :* $\int_2^4 \dfrac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\dfrac{\pi}{6}$ *(on pourra poser :* $t=\sqrt{x-1}$*).*
	Exercice 1 : (2,5 *points*) *On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, la sphère S d'équation :* $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=2$ *et le plan P d'équation :* $x+y-3=0.$
1	**1.** *Montrer que le plan P est tangent à la sphère S.*
1,5	**2.** *Déterminer les coordonnées du point de contact de P et S.*
	Exercice 2 : (3 *points*) *Une urne contient trois boules blanches et sept boules noires (les boules sont indiscernables au toucher).*
1,25	**1.** *On tire au hasard, simultanément, deux boules de l'urne.* *Soit A et B les deux événements suivants :* *A :" Les deux boules tirées sont noires ".* *B :"Parmi les deux boules tirées, une boule au moins est blanche".* *Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à* $\dfrac{7}{15}$ *et que la probabilité de l'événement B est égale à* $\dfrac{8}{15}$.
	2. *On considère l'expérience aléatoire suivante : On tire une boule de l'urne, si la boule est blanche, on arrête le tirage et si elle est noire on la met de côté puis on tire une deuxième et dernière boule de l'urne.* *Soit C et D les deux événements suivants :* *C :" Avoir une boule blanche au premier tirage ".* *D :"Avoir une boule blanche".*
0,75	**a)** *Calculer la probabilité de l'événement C.*

1	**b)** *Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à* $\frac{8}{15}$.
	Problème : (10 *points*)
	Première partie :
	On considère les deux fonctions g et h définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ *par :*
	$$g(x)=x-1-\ln x \text{ et } h(x)=x+(x-2)\ln x.$$
0,75	**1.a)** *Calculer* $g'(x)$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;+\infty[$ *puis étudier le sens de variations de la fonction g.*
0,25	**b)** *En déduire que :* $g(x)\geq 0$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;+\infty[$.
0,5	**2.a)** *Montrer que :* $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;+\infty[$.
0,5	**b)** *Montrer que :* $(x-1)\ln x\geq 0$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;+\infty[$.
0,5	**3.** *En déduire que :* $h(x)>0$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;+\infty[$.
	Deuxième partie :
	On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ *par :*
	$$f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2.$$
	Soit (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.*
0,5	**1.a)** *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ *puis interpréter géométriquement le résultat.*
1	**b)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *puis déterminer la branche infinie de la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$ *(remarquer que :* $f(x)=1+x\ln x\cdot\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$*)*
0,5	**2.a)** *Montrer que :* $f'(x)=\frac{h(x)}{x}$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;+\infty[$.
0,25	**b)** *En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle* $]0;+\infty[$.
	3. *Soit* (Δ) *la droite tangente à la courbe* (C) *au point* $A(1;1)$.
0,5	**a)** *Montrer que* $y=x$ *est une équation cartésienne de la droite* (Δ).
0,5	**b)** *Vérifier que :* $f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;+\infty[$.
1	**c)** *Etudier le signe de* $f(x)-x$ *puis en déduire la position relative de la courbe* (C) *et la droite* (Δ).

0,75	**4.** *Construire la courbe* (C) *et la droite* (Δ) *dans le même repère.* (*on admettra que la courbe* (C) *possède un point d'inflexion d'abscisse comprise entre* 1 *et* 1,5).
	Troisième partie : *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :* $u_0 = \sqrt{e}$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,5	**1.** *Montrer par récurrence que :* $1 < u_n < e$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
1	**2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.* (*on pourra utiliser le résultat de la question* **3.c)** *de la deuxième partie*).
1	**3.** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*

Questions : (4 *points*)

1 **1.** *Résoudre l'équation différentielle :* $y'' + y' - 6y = 0$.

1 **2.** *Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe :* $Z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.

1 **3.** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x).\ln(1+\cos(x))dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

(*on rappelle que :* $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$)

1 **4.** *On pose :* $u_n = n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}^*$.

Calculer, en fonction de n, la somme : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Exercice 1 : (2 *points*)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère le plan P d'équation : $x - z + 1 = 0$ *et la sphère S de centre* $\Omega(1,0,0)$ *et de rayon* $r = 2$.

0,5 **1.** *Montrer que P et S se coupent suivant un cercle* Γ.

1,5 **2.** *Déterminer le centre et le rayon du cercle* Γ.

Exercice 2 : (2,5 *points*)

0,25 **1.** *Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe :* $(1-i)^2$.

0,75 **2.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :*

$$z^2 - 2(1+2i)z - (3-6i) = 0.$$

1,5 **3.** *On considère dans le plan complexe les deux points A et B d'affixes respectives :* $a = 3i$ *et* $b = 2+i$.

Déterminer puis construire (D) *ensemble des points M d'affixe z tel que :*

$$|z-3i| = |z-2-i|.$$

Exercice 3 : (3,5 *points*)

Un sac contient quatre boules blanches et deux boules noires (les boules sont indiscernables au toucher).

0,5 **1.** *On tire au hasard une boule du sac.*
Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

1 **2.** *On tire au hasard, successivement et avec remise, cinq boules du sac.*
Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches exactement ?

1	**3.** *On tire au hasard, successivement et avec remise, n boules du sac.* **a)** *Montrer que la probabilité de tirer une boule blanche au moins est :* $$p=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$
1	**b)** *Quel est le nombre minimum de tirage pour lequel* $p \geq 0{,}999$? (*on prendra :* $\log 3 \approx 0{,}48$ *où* $\log$ *désigne le logarithme décimal*).
	Problème : (8 *points*) *On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle* $]0;2[$ *par :* $$f(x)=\ln\left(\frac{x}{2-x}\right).$$ *et soit* (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.*
1	**1.a)** *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$.
0,75	**b)** *Montrer que :* $f'(x)=\dfrac{2}{x(2-x)}$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;2[$.
0,5	**c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*
0,5	**2.a)** *Montrer que le point* $A(1,0)$ *est un centre de symétrie de la courbe* (C).
0,5	**b)** *Ecrire une équation cartésienne de la tangente* (T) *à la courbe* (C) *au point* $A(1,0)$.
	3. *On pose :* $\varphi(x)=f(x)-x$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;2[$.
0,5	**a)** *Montrer que :* $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)<0$ *et* $\varphi\left(\frac{7}{4}\right)>0$. (*on prendra :* $\ln 3 \approx 1{,}1$ *et* $\ln 7 \approx 1{,}94$).
0,75	**b)** *En déduire que l'équation* $f(x)=x$ *admet une solution* α *telle que* $\frac{3}{2}<\alpha<\frac{7}{4}$ *et interpréter le résultat graphiquement.*
0,5	**4.a)** *Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque* f^{-1}.
0,5	**b)** *Montrer que :* $(\forall x\in\mathbb{R}),\ f^{-1}(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}$.
1	**5.** *Construire dans le même repère la courbe* (C) *et la courbe* (Γ) *représentative de la fonction* f^{-1}.

0,5	**6.a)** *Calculer :* $\int_0^{\alpha} \frac{e^x}{1+e^x} dx$.
1	**b)** *Calculer l'aire du domaine plan délimité par les deux courbes* (C) *et* (Γ) *et les deux axes du repère.*

	Exercice 1 : (2 *points*)
0,75	**1.** *Résoudre l'équation différentielle :* $y''-6y'+9y=0$.
	2. *On considère l'équation différentielle suivante :* $(E): y''-6y'+9y=2e^{3x}$.
0,75	**a)** *Montrer que la fonction u définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $u(x)=x^2e^{3x}$ *est une solution particulière de l'équation* (E).
0,5	**b)** *Donner la solution générale de l'équation* (E).
	Exercice 2 : (4 *points*) *On considère dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$, *l'équation :* $z^2-2\sqrt{3}(1+i)z+8i=0$. *On désigne par* z_1 *et* z_2 *les deux solutions de cette équation telles que :* $\mathcal{R}_e(z_1)>\mathcal{R}_e(z_2)$.
0,75	**1.** *Déterminer* z_1 *et* z_2 *(remarquer que :* $(1-i)^2=-2i$ *).*
1	**2.a)** *Montrer que :* $z_1^2=4\left(\sqrt{3}+i\right)$ *et* $z_2=i\overline{z_1}$.
0,25	**b)** *Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe :* $4\left(\sqrt{3}+i\right)$.
1	**c)** *En déduire une forme trigonométrique de chacun des deux nombres complexes* z_1 *et* z_2.
1	**3.** *On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, *les deux points A et B d'affixes respectives* z_1 *et* z_2. *Calculer* $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ *puis en déduire que le triangle OAB est équilatéral.*
	Exercice 3 : (4 *points*) *On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ *le point* $A(1;-1;3)$ *et le plan* (P) *d'équation :* $x-y+3z=0$.
0,5	**1. a)** *Vérifier que :* $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* (OA).
0,75	**b)** *Déterminer une équation cartésienne du plan* (Q) *orthogonal à la droite* (OA) *au point A.*

0,25	c) *Vérifier que* (P) *est parallèle à* (Q).
	2. *On considère la sphère* (S) *tangente au plan* (Q) *en* A *et qui se coupe avec le plan* (P) *suivant le cercle* Γ *de centre* O *et de rayon* $\sqrt{33}$.
0,75	**a)** *Démontrer que* $\Omega(a,b,c)$ *centre de la sphère* (S) *appartient à* (OA) *puis en déduire que* $b=-a$ *et* $c=3a$.
1,25	**b)** *Démontrer que :* $\Omega A^2-\Omega O^2=33$ *puis en déduire que* $a-b+3c=-11$.
0,5	**c)** *En déduire les coordonnées de* Ω *centre de la sphère* (S) *puis démontrer que son rayon est égale à* $2\sqrt{11}$.
	Problème : (10 *points*) **I)** *On considère la fonction* g *définie sur l'intervalle* $[0;+\infty[$ *par :* $$g(x)=\ln(1+x)-x.$$
0,75	**1.a)** *Calculer* $g'(x)$ *pour tout* x *de* $[0;+\infty[$ *puis montrer que la fonction* g *est strictement décroissante sur* $[0;+\infty[$.
0,25	**b)** *En déduire que :* $g(x)\leq 0$ *pour tout* x *de* $[0;+\infty[$.
0,5	**2.** *Montrer que :* $0<\ln(1+x)<x$ *pour tout* x *de* $]0;+\infty[$.
	II) *On considère la fonction numérique* f *de la variable réelle* x *définie par :* $$f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$ *et* (C) *la courbe représentative de la fonction* f *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité 1cm).*
0,5	**1.** *Montrer que l'ensemble de définition de la fonction* f *est :* $$D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[.$$
0,5	**2.a)** *Montrer que la fonction* f *est impaire.*
0,5	**b)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.
0,75	**3.a)** *Montrer que :* $\forall x\in D,\ f'(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$.
0,5	**b)** *En déduire les variations de la fonction* f *sur l'intervalle* $]1;+\infty[$.
0,25	**4.a)** *Vérifier que la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$ *est une asymptote oblique de la courbe* (C).

0,5	**b)** *Etudier le signe de* $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.
	(*remarquer que :* $\forall x \in D,\ \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$).
0,25	**c)** *En déduire la position relative de la courbe* (C) *et la droite* (Δ).
1	**5.** *Construire la courbe* (C) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
	(*on prendra :* $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$ *et* $f(\sqrt{3}) \simeq 3$).
1,25	**6.a)** *Montrer que :* $\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = 5\ln 5 - 6\ln 3$ (*on pourra utiliser une intégration par parties*).
0,5	**b)** *En déduire, en* cm^2, *l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C) *et les droites d'équations respectives :* $x = 2$, $x = 4$ *et* $y = x$.
	III) *On considère la suite numérique* $(u_n)_{n\geq 2}$ *définie par :*
	$u_n = f(n) - n$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}^* - \{1\}$.
0,25	**1.a)** *Vérifier que :* $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}^* - \{1\}$.
0,75	**b)** *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 2}$ *est décroissante.*
0,5	**2.a)** *Montrer que :* $0 < u_n < \frac{2}{n-1}$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}^* - \{1\}$.
	(*on pourra utiliser le résultat de la question* **I) 2.**).
0,5	**b)** *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

	Exercice 1 : (3 *points*) *On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *les points* $A(1,2,-2)$, $B(1,-1,1)$ *et* $C(2,1,-2)$.
0,5	**1. a)** *Déterminer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
0,5	**b)** *Démontrer que* $x+y+z-1=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).
	2. *Soit* (S) *la sphère de centre* $\Omega(1,1,1)$ *et de rayon* $R=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
1,25	**a)** *Démontrer que le plan* (ABC) *est tangent à la sphère* (S) *puis déterminer les coordonnées de* H *point de contact de* (ABC) *et* (S).
0,75	**b)** *Soit* $M(a,b,c)$ *un point du plan* (ABC), *démontrer que :* $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{1}{3}$.
	Exercice 2 : (3 *points*) *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :* $u_0=0$ *et* $u_1=1$ *et* $u_{n+2}=\dfrac{2}{5}u_{n+1}-\dfrac{1}{25}u_n$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$. *On pose :* $v_n=u_{n+1}-\dfrac{1}{5}u_n$ *et* $w_n=5^n u_n$, *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,75	**1.** *Montrer que la suite* (v_n) *est géométrique de raison* $\dfrac{1}{5}$ *et exprimer* v_n *en fonction de* n.
0,25	**2. a)** *Montrer que la suite* (w_n) *est arithmétique de raison* 5.
0,5	**b)** *Exprimer* w_n *en fonction de* n *et en déduire* u_n *en fonction de* n.
0,75	**3. a)** *Montrer que* $0<u_{n+1}\leq\dfrac{2}{5}u_n$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}^*$.
0,75	**b)** *En déduire que* $0<u_n\leq\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}^*$ *puis calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
	Exercice 3 : (3 *points*) *Un sac* U_1 *contient cinq jetons : trois jetons portent le nombre 2 et deux jetons portent le nombre 3, un autre sac* U_2 *contient cinq jetons : trois jetons blancs et deux jetons rouges (les jetons sont indiscernables au toucher).* *On tire au hasard un jeton du sac* U_1 *et on note le nombre qu'il porte puis on tire*

aléatoirement et simultanément n jetons du sac U_2 où n est le nombre que porte le jeton tiré du sac U_1.

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de jetons rouges tirés.

2,75 **1.** *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*

0,25 **2.** *Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.*

Exercice 4 : (3 *points*)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2+2z+1+i=0.$$

On désigne par z_1 et z_2 les deux solutions de cette équation tel que $\mathcal{I}m(z_1)>0$.

0,75 **1.** *Déterminer z_1 et z_2 (remarquer que : $(1-i)^2=-2i$).*

2. *On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$,*

les points A , B , M_1 et M_2 d'affixes respectives -1 , $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, z_1 et z_2.

0,5 **a)** *Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.*

0,75 **b)** *Vérifier que $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{OB}$ et que A est le milieu du segment $[M_1M_2]$ puis construire les points : A , B , M_1 et M_2.*

1 **c)** *En déduire que $AOBM_1$ est un losange et que $\arg(z_1)\equiv\frac{7\pi}{8}[2\pi]$.*

Problème : (8 *points*)

I) *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$(E)\ :\ y''-2y'+y=x-1.$$

0,75 **1.** *Résoudre l'équation différentielle : $y''-2y'+y=0$.*

0,25 **2.a)** *Trouver une solution particulière de l'équation (E) de la forme:*

$$y_0 : x\mapsto ax+b.$$

0,25 **b)** *Donner la solution générale de l'équation (E).*

0,5 **c)** *Déterminer la solution h de l'équation (E) qui vérifie : $h(0)=0$ et $h'(0)=1$.*

3. *On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :*

$$g(x)=(x-1)e^x+x+1.$$

0,75 **a)** *Calculer $g'(x)$ pour tout x de $[0;+\infty[$ puis en déduire que la fonction g est*

	strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
0,25	**b)** *Montrer que :* $g(x)\geq 0$ *pour tout x de* $[0;+\infty[$ *(remarquer que :* $g(0)=0$*).*
	II) *On considère la fonction numérique f définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $$f(x)=\frac{xe^x}{\left(e^x-1\right)^2}.$$ (C) *est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,5	**1.** *Montrer que f est une fonction impaire.*
0,75	**2.a)** *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ *(on rappellera que :* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$*) puis interpréter graphiquement ce résultat.*
0,5	**b)** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ *puis interpréter graphiquement ce résultat* *(remarquer que :* $\forall x\in\mathbb{R}^*\ ,\ f(x)=\frac{x}{e^x\left(1-e^{-x}\right)^2}$*).*
0,75	**3.a)** *Montrer que :* $f'(x)=-\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^3}g(x)$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$.
0,5	**b)** *Donner le tableau de variations de la fonction f sur* $]0;+\infty[$.
0,5	**4.** *Construire* (C).
0,5	**5.a)** *Montrer que :* $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1}{e^x-1}dx=2\ln 2-\ln 3$ *(remarquer que :* $\forall x\in\mathbb{R}^*\ ,\ \frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x}{e^x-1}-1$*).*
0,5	**b)** *En posant* $t=e^x$, *montrer que :* $\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)dx=\int_2^3\frac{\ln t}{(t-1)^2}dt$
0,5	**6.a)** *En posant utilisant une intégration par parties, montrer que :* $$\int_2^3\frac{\ln t}{(t-1)^2}dt=3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$$
0,25	**c)** *En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C), *l'axe des abscisses et les deux droites d'équations :* $x=\ln 2$ *et* $x=\ln 3$ *(on prendra :* $\ln 2\simeq 0,7$ *et* $\ln 3\simeq 1,1$*).*

	Exercice 1 : (3 *points*)
	On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ *la sphère* (S) *d'équation :* $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$ *et le plan* (P) *d'équation :* $x-y+2z+1=0$.
1	**1.** *Démontrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(1,2,3)$ *et que son rayon est égale à* $\sqrt{6}$.
0,75	**2.** *Vérifier que le plan* (P) *est tangent à la sphère* (S).
0,5	**3.a)** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par* Ω *et orthogonale à* (P).
0,75	**b)** *Déterminer les coordonnées de* ω *point de contact de* (P) *et* (S).
	Exercice 2 : (3 *points*)
0,5	**1.a)** *Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe :* $(3-2i)^2$.
1	**b)** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2-2(4+i)z+10+20i=0$.
	2. *On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$, *les points A, B et C d'affixes respectives :* $a=1+3i, b=7-i$ *et* $c=5+9i$.
0,5	**a)** *Montrer que :* $\dfrac{c-a}{b-a}=i$.
1	**b)** *En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.*
	Exercice 3 : (2,5 *points*)
0,5	**1.** *Vérifier que :* $\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}-\{-1\}$.
1	**2.** *Montrer que :* $\int_0^2 \dfrac{x^2}{x+1}dx=\ln 3$.
1	**3.** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\int_0^2 x\ln(x+1)dx=\dfrac{3}{2}\ln 3$.
	Exercice 4 : (2,5 *points*)
	Un sac contient sept jetons portants les nombres : 0, 0, 0, −1, 1, 1, 1 (*les jetons sont indiscernables au toucher*). *On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément trois jetons du sac.*

	Soient les événements suivants : *A :" aucun jeton parmi les trois jetons tirés ne porte le nombre* 0 " *B :" tirer trois jetons portants des nombres différents deux à deux "* *C :" la somme des nombres portés par les trois jetons tirés est nulle"*
2,5	*Calculer la probabilité de chacun des deux événements A et B et montrer que la probabilité de l'événement C est :* $\frac{2}{7}$.
	Problème : (9 *points*) **I)** *On considère la fonction numérique g définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=e^{-x}+x-1$.
0,75	**1.** *Calculer* $g'(x)$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *puis en déduire que g est croissante sur* $[0,+\infty[$ *et décroissante sur* $]-\infty,0]$.
0,5	**2.** *Montrer que* $g(x)\geq 0$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *(remarquer que* $g(0)=0$ *)* *puis en déduire que* $e^{-x}+x\geq 1$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.
	II) *On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :* $$f(x)=\frac{x}{x+e^{-x}}.$$ *et soit* (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,5	**1.** *Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est* $\mathbb{R}$ *(on pourra utiliser le résultat de la question* **I) 2.**).
0,25	**2.a)** *Montrer que :* $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}^*$.
1,5	**b)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ *puis interpréter géométriquement ces deux résultats.*
0,75	**3.a)** *Montrer que :* $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.
0,5	**b)** *Etudier le signe de* $f'(x)$ *puis dresser le tableau de variations de la fonction f.*
0,5	**4.a)** *Ecrire une équation de la tangente à la courbe* (C) *au point O origine du*

	repère.
0,75	**b)** *Vérifier que :* $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *puis étudier le signe de* $x-f(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.
0,25	**c)** *En déduire la position relative de la courbe* (C) *et la droite* (Δ) *d'équation :* $y=x$.
1	**5.** *Construire* (Δ) *et* (C) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(on prendra* $\dfrac{1}{1-e}\simeq -0{,}6$ *).*
	II) *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :* $u_0=1$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,5	**1.** *Montrer par récurrence que :* $0\le u_n\le 1$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,5	**2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.* *(on pourra utiliser le résultat de la question* **II) 4.b)**).
0,75	**3.** *En déduire que* (u_n) *est convergente puis déterminer sa limite.*

	Exercice 1 : (3,5 *points*)
	On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ les points $A(2,0,-1)$, $B(2,4,2)$ et $C(3,3,3)$ et la sphère (S) d'équation cartésienne : $x^2+y^2+z^2-4x-4y-8z+20=0$.
1	**1.** *Démontrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(2,2,4)$ et que son rayon est égal à 2.*
0,75	**2.** *Soit (P) le plan passant par le point A et orthogonal à la droite (BC). Démontrer que $x-y+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (P).*
1	**3. a)** *Démontrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon égale à 1.*
0,25	**b)** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale à (P).*
0,5	**c)** *Déterminer les coordonnées du point ω centre du cercle (Γ).*
	Exercice 2 : (2,5 *points*)
	Un sac contient trois jetons blancs et quatre jetons noires (les jetons sont indiscernables au toucher). On tire au hasard et simultanément trois jetons du sac.
0,75	**1.** *Quelle est la probabilité de tirer exactement deux jetons blancs ?*
0,75	**2.** *Quelle est la probabilité de tirer trois jetons de même couleur ?*
1	**3.** *Quelle est la probabilité de tirer au moins un jeton blanc ?*
	Exercice 3 : (3 *points*)
	Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=2$ *et* $u_{n+1}=\frac{1}{5}(u_n-4n-1)$ *pour tout n de $\mathbb{N}$.* *On pose $v_n=u_n+n-1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.*
1	**1.** *Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.*
0,5	**2. a)** *Calculer v_n en fonction de n.*
0,5	**b)** *En déduire u_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*
1	**3.** *On pose $T_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ et $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ tel que n élément de $\mathbb{N}$.*

	Montrer que : $T_n=\frac{1}{4}\left(5-\frac{1}{5^n}\right)$ *et que* $S_n=T_n-\frac{(n+1)(n-2)}{2}$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
	Exercice 4 : (3 *points*)
0,25	**1.** *Vérifier que :* $\left(\sqrt{2}+2i\right)^2=-2+4\sqrt{2}i$.
0,75	**2.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $$z^2-\left(\sqrt{2}+2\right)z+2+\sqrt{2}-\sqrt{2}i=0.$$
	3. *On considère les deux nombres complexes :* $z_1=1-i$ *et* $z_2=1+\sqrt{2}+i$.
0,5	**a)** *Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe* z_1.
1	**b)** *Montrer que :* $z_1.z_2=\sqrt{2}\overline{z_2}$ ($\overline{z_2}$ *est le conjugué du nombre* z_2). *En déduire que :* $\arg(z_1)+2\arg(z_2)\equiv 0[2\pi]$.
0,5	**c)** *Déterminer un argument du nombre* z_2.
	Problème : (8 *points*)
	I) *Soit g la fonction numérique définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$.
1	**1.** *Montrer que :* $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ *pour tout* x *de* $]0,+\infty[$ *puis en déduire le sens de variations de la fonction sur* $]0,+\infty[$.
0,5	**2.** *Montrer que* $g(x)\leq 0$ *pour tout* x *de* $]0,1]$ *et que* $g(x)\geq 0$ *pour tout* x *de* $[1,+\infty[$ (*remarquer que* $g(1)=0$).
	II) *On considère la fonction numérique f définie par :* $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$. *Soit* (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,75	**1.a)** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (*on pourra poser* $t=\sqrt{x}$) *puis calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
0,25	**b)** *Vérifier que :* $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ *pour tout* x *de* $]0,+\infty[$.

0,5	**c)** *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ *(on pourra poser* $t=\frac{1}{x}$*) puis interpréter géométriquement le résultat.*
0,5	**d)** *Montrer que* (C) *admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite d'équation :* $y=x$.
1,5	**2.** *Montrer que :* $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ *pour tout x de* $]0,+\infty[$ *puis dresser le tableau de variations de la fonction f.*
1	**3.** *Construire la courbe* (C) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,5	**4.a)** *Montrer que la fonction* $G:x\mapsto x\ln x-x$ *est une fonction primitive de la fonction* $g:x\mapsto \ln x$ *sur* $]0,+\infty[$.
0,75	**b)** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\int_1^e (\ln x)^2\,dx=e-2$.
0,75	**c)** *Déterminer l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C)*, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations :* $x=1$ *et* $x=e$

	Exercice 1 : (3 *points*)
	On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$; *les deux points* $A\left(0,-1,1\right)$ *et* $B\left(1,-1,0\right)$ *et la sphère* $\left(S\right)$ *d'équation :* $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0.$
1,25	**1.** *Montrer que le centre de la sphère* $\left(S\right)$ *est le point* $\Omega\left(1,0,2\right)$ *et que son rayon est* $\sqrt{3}$ *et vérifier que A appartient à* $\left(S\right)$.
1,25	**2.** *Déterminer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ *et montrer que* $x+y+z=0$ *est une équation cartésienne du plan* $\left(OAB\right)$.
0,5	**3.** *Montrer que le plan* $\left(OAB\right)$ *est tangent à la sphère* $\left(S\right)$ *au point A.*
	Exercice 2 : (3 *points*)
1	**1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2-6z+34=0.$
	2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, *les points A, B et C d'affixes respectives :* $a=3+5i$, $b=3-5i$ *et* $c=7+3i$. *Soit z l'affixe d'un point M du plan et* z' *l'affixe du point* M' *image de M par la translation T de vecteur* $\vec{u}$ *d'affixe* $4-2i$.
0,75	**a)** *Montrer que :* $z'=z+4-2i$ *et vérifier que le point C est l'image du point A par la translation T.*
0,5	**b)** *Montrer que :* $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$.
0,75	**c)** *En déduire que le triangle ABC est rectangle et que* $BC=2AC$.
	Exercice 3 : (3 *points*)
	Une urne contient six boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).
	1. *On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.*
1	**a)** *Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges et une verte.*
1	**b)** *Montrer que la probabilité de tirer une boule verte au moins est* $\dfrac{16}{21}$.
1	**2.** *On considère dans cette question l'épreuve suivante : On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges.*
	Problème : (11 *points*)
	I- *Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle* $\left]0,+\infty\right[$ *par :* $g\left(x\right)=x-2\ln x$.

0,5	**1. a)** *Calculer* $g'(x)$ *pour tout* x *de l'intervalle* $]0,+\infty[$.
0,5	**b)** *Montrer que* g *est décroissante sur* $]0,2]$ *et croissante sur* $[2,+\infty[$.
0,5	**2.** *En déduire que* $g(x)>0$ *pour tout* x *de l'intervalle* $]0,+\infty[$. (*remarquer que* $g(2)>0$)
	II- *On considère la fonction numérique* f *définie sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *par :* $$f(x)=x-(\ln x)^2.$$ *Soit* (C) *la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,75	**1.** *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ *et interpréter géométriquement ce résultat.*
0,5	**2. a)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$. (*on pourra poser* $t=\sqrt{x}$, *on rappelle que :* $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$)
0,75	**b)** *En déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$. (*remarquer que :* $f(x)=x\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)$)
0,5	**c)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ *puis en déduire que la courbe* (C) *admet, au voisinage de* $+\infty$, *une branche parabolique de direction la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$.
0,5	**d)** *Montrer que la courbe* (C) *est au-dessous de la droite* (Δ).
0,75	**3. a)** *Montrer que :* $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ *pour tout* x *de* $]0,+\infty[$ *et montrer que* f *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$.
0,25	**b)** *Dresser le tableau de variations de la fonction* f.
0,5	**c)** *Montrer que* $y=x$ *est une équation cartésienne de la tangente à la courbe* (C) *au point d'abscisse* 1.
0,5	**4.** *Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet une solution unique* α *dans* $]0,+\infty[$ *et que* $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$ (*on admet que* $(\ln 2)^2<\dfrac{1}{2}$).
1	**5.** *Tracer la droite* (Δ) *et la courbe* (C) *dans le repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$. (*on admet que* $I(e,e-1)$ *est un point d'inflexion de la courbe* (C) *et on prendra*

	$e \approx 2,7$).
0,5	**6. a)** *Montrer que* $H : x \mapsto x\ln x - x$ *est une fonction primitive de la fonction* $\ln : x \mapsto \ln x$ *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *puis montrer que :* $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.
0,75	**b)** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$.
0,5	**c)** *Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C), *la droite* (Δ) *et les deux droites d'équations :* $x = 1$ *et* $x = e$.
	III- *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :* $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,75	**1.** *Montrer que* $1 \leq u_n \leq 2$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$ *(on pourra utiliser le résultat de la question* **II-3. a)**).
0,5	**2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*
0,75	**3.** *En déduire que* (u_n) *est convergente puis déterminer sa limite.*

	Exercice 1 : (3 *points*)
1	**1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2 - 8z + 17 = 0$.
	2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, *les deux points A et B d'affixes respectives :* $a = 4 + i$ *et* $b = 8 + 3i$. *Soit z l'affixe d'un point M du plan et* z' *l'affixe du point* M' *image de M par la rotation R de centre le point* Ω *d'affixe* $\omega = 1 + 2i$ *et d'angle* $\frac{3\pi}{2}$.
0,75	**a)** *Montrer que :* $z' = -iz - 1 + 3i$.
0,75	**b)** *Vérifier que l'affixe du point C image du point A par la rotation R est* $c = -i$.
0,75	**c)** *Montrer que :* $b - c = 2(a - c)$ *puis en déduire que les points A, B et C sont alignés.*
	Exercice 2 : (3 *points*)
	On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *le plan* (P) *d'équation* $x + 2y + z - 1 = 0$ *et la sphère* (S) *d'équation :* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0$.
0,75	**1.** *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $I(2,3,-1)$ *et son rayon est* 3.
0,5	**2. a)** *Montrer que la distance du point I du plan* (P) *est* $\sqrt{6}$.
0,75	**b)** *En déduire que le plan* (P) *coupe la sphère* (S) *suivant un cercle* (Γ) *de rayon* $\sqrt{3}$.
0,5	**3. a)** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (D) *passant par I et orthogonale à* (P).
0,5	**b)** *Montrer que le centre du cercle* (Γ) *est le point* $H(1,1,-2)$.
	Exercice 3 : (3 *points*)
	Une urne contient quatre boules blanches et trois boules rouges. *(les boules sont indiscernables au toucher).* *On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.*
1	**1.** *Quelle est la probabilité de tirer trois boules blanches ?*
1	**2.** *Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est* $\frac{1}{7}$.
1	**3.** *Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au moins ?*
	Exercice 4 : (3 *points*)
	Soit (u_n) *la suite numérique définie par :* $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

1	**1.** *Montrer que :* $u_n > 1$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
	2. *On pose :* $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
1	**a)** *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{3}{5}$ *puis exprimer* v_n *en fonction de n.*
1	**b)** *Montrer que* $u_n = \dfrac{2}{2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *puis calculer la limite de la suite* (u_n).
	Problème : (8 *points*)
	I) *On considère la fonction numérique g définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x) = e^{2x} - 2x$.
1	**1.** *Calculer* $g'(x)$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *puis montrer que g est croissante sur* $[0,+\infty[$ *et décroissante sur* $]-\infty,0]$.
0,75	**2.** *En déduire que* $g(x) > 0$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$. *(remarquer que* $g(0)=1$*)*
	II) *On considère la fonction numérique f définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $$f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2x\right).$$ *Soit* (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,5	**1. a)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
0,25	**b)** *Vérifier que* $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right)\dfrac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}^*$.
0,5	**c)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ *(on rappelle que :* $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$*)*.
0,25	**d)** *En déduire que la courbe* (C) *admet, au voisinage de* $-\infty$, *une branche parabolique dont on précisera la direction.*
0,75	**2. a)** *Pour tout x de* $[0,+\infty[$, *vérifier que :* $$1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0 \text{ et que } 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x).$$
0,5	**b)** *En déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *(on rappelle que:* $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$*)*
0,5	**c)** *Montrer que la droite* (D) *d'équation* $y = 2x$ *est une asymptote oblique à la*

	courbe (C) *au voisinage de* $+\infty$.
0,75	**d)** *Montrer que :* $f(x)-2x \leq 0$ *pour tout* x *de* $[0,+\infty[$ *et en déduire que* (C) *est en-dessous de* (D) *sur l'intervalle* $[0,+\infty[$.
0,75	**3. a)** *Montrer que :* $f'(x)=\dfrac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$.
0,5	**b)** *Etudier le signe de* $f'(x)$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *puis dresser le tableau de variations de la fonction f.*
1	**4.** *Tracer* (D) *et* (C) *dans le repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$. (*on admet que la courbe* (C) *a deux points d'inflexion*).

Exercice 1 : (3 *points*)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *les points* $A(-2,2,8)$, $B(6,6,0)$, $C(2,-1,0)$ *et* $D(0,1,-1)$ *et* (S) *l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient :* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

0,75 — **1.** *Déterminer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ *et en déduire que* $x+2y+2z=0$ *est une équation cartésienne du plan* (OCD).

0,5 — **2.** *Vérifier que* (S) *est la sphère de centre* $\Omega(2,4,4)$ *et de rayon* 6.

0,5 — **3. a)** *Calculer la distance du point* Ω *au plan* (OCD).

0,5 — **b)** *En déduire que le plan* (OCD) *est tangent à la sphère* (S).

0,75 — **c)** *Vérifier que :* $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ *puis en déduire que O est le point de contact de la sphère* (S) *et le plan* (OCD).

Exercice 2 : (3 *points*)

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, *les points A, B et C d'affixes respectives :*

$$a=2-2i,\ b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ \text{ et } c=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i\ .$$

1 — **1.** *Ecrire sous forme trigonométrique chacun des deux nombres complexes a et b*

2. *On considère la rotation R de centre le point O et d'angle* $\frac{5\pi}{6}$.

0,75 — **a)** *Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe et* z' *l'affixe du point* M' *image de M par la rotation R.*
Montrer que : $z'=bz$.

0,5 — **b)** *Vérifier que le pont C est l'image du point A par la rotation R.*

0,75 — **3.** *Montrer que :* $\arg c\equiv\arg a+\arg b\,[2\pi]$ *puis en déduire un argument du nombre complexe c.*

Exercice 3 : (3 *points*)

Une urne contient 3 *boules blanches,* 4 *boules noires et* 5 *boules rouges (les boules sont indiscernables au toucher).*
On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1,5 — **1.** *On considère les deux événements suivants :*
A :" tirer trois boules de même couleur ".
B :" tirer trois boules de couleurs différentes deux à deux ".
Montrer que : $p(A)=\frac{3}{44}$ *et* $p(B)=\frac{3}{11}$.

2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent ces boules.*

0,25	**a)** *Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.*
1,25	**b)** *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.*
	Exercice 4 : (2 *points*) *On pose :* $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx$ *et* $J=\int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)dx$.
0,25	**1.a)** *Vérifier que :* $\frac{x}{x+3}=1-\frac{3}{x+3}$ *pour tout réel x différent de* -3.
0,75	**b)** *Montrer que :* $I=1-3\ln 2$.
1	**2.** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $J=-I$.
	Problème : (9 *points*) *On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :* $f(x)=2\ln\left(e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2\right)$. (C) *désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,75	**I) 1.** *Vérifier que :* $e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2=\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *puis en déduire que l'ensemble de définition de la fonction f est* $\mathbb{R}$ *et que :* $(\forall x\in\mathbb{R}),1-\frac{2}{\sqrt{e^{x}}}+\frac{2}{e^{x}}>0$.
0,75	**2.** *Calculer* $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ *puis montrer que :* $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\ln 4$ *et interpréter géométriquement ce résultat.*
1	**3.a)** *Montrer que :* $f'(x)=\frac{2\sqrt{e^{x}}\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)}{\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *et vérifier que* $f'(0)=0$.
1	**b)** *Etudier le signe de* $\sqrt{e^{x}}-1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle* $[0,+\infty[$ *et décroissante sur l'intervalle* $]-\infty,0]$.
0,25	**4.a)** *Vérifier que :* $(\forall x\in\mathbb{R}),\ f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^{x}}}+\frac{2}{e^{x}}\right)$.
0,5	**b)** *Montrer que la droite* (D) *d'équation* $y=2x$ *est une asymptote à la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$.
0,25	**5.a)** *Vérifier que :* $e^{x}-3\sqrt{e^{x}}+2=\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)\left(\sqrt{e^{x}}-2\right)$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.

0,5	**b)** *Etudier le signe de* $\sqrt{e^x}-2$ *et* $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ *sur* $\mathbb{R}$.
0,25	**c)** *En déduire que :* $e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}$ *pour tout x de l'intervalle* $[0,\ln 4]$.
0,5	**d)** *Montrer que :* $f(x)\leq x$ *pour tout x de l'intervalle* $[0,\ln 4]$.
0,75	**6.** *Construire la courbe* (C).
	(on admettra que la courbe (C) *possède deux points d'inflexion dont l'abscisse de l'un est inférieure à* -1 *et l'abscisse de l'autre est supérieure à* 2*, la détermination de ces deux points n'est pas demandée et on prendra* $\ln 4\simeq 1,4$*).*
	II) *Soit* (u_n) *la suite numérique définie par :*
	$u_0=1$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
	On pourra, ci-après, utiliser les résultats de l'étude de la fonction f.
0,75	**1.** *Montrer que :* $0\leq u_n\leq\ln 4$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,75	**2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*
1	**3.** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*

Exercice 1 : (3 *points*)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère le point $A(2,2,-1)$, le plan (P) d'équation $2x+y+2z-13=0$ et la sphère (S) de centre le point $\Omega(1,0,1)$ et de rayon 3.

0,75 **1.a)** *Montrer que $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) et vérifier que A appartient à (S).*

0,75 **b)** *Calculer la distance du point Ω au plan (P) puis en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S).*

2. *Soit (D) la droite passant par le point A et perpendiculaire au plan (P).*

0,75 **a)** *Démontrer que $\vec{u}(2,1,2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et que $(6,-6,-3)$ est le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$.*

0,75 **b)** *Calculer $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ puis en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A.*

Exercice 2 : (3 *points*)

1 **1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :*

$$z^2-6z+25=0.$$

2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, les points A, B , C et D d'affixes respectives:*

$$a=3+4i\ ,b=3-4i\ ,c=2+3i\ \text{et}\ d=5+6i\ .$$

0,5 **a)** *Calculer $\dfrac{d-c}{a-c}$ puis en déduire que les points A ,C et D sont alignés.*

0,5 **b)** *Montrer que le nombre $p=3+8i$ est l'affixe du point P image du point A par l'homothétie h de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.*

1 **c)** *Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\dfrac{d-p}{a-p}$ puis en déduire que $\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}\right)$ et que $PA=\sqrt{2}PD$.*

Exercice 3 : (3 *points*)

Une urne contient sept boules noires et deux boules blanches.
(les boules sont indiscernables au toucher)
On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.

0,5 — **1.** *Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.*

1,5 — **2.** *Montrer que* $p(X=0)=\frac{1}{36}$ *et* $p(X=1)=\frac{7}{18}$.

1 — **3.** *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique* $E(X)$.

Exercice 4 : (3 *points*)

Soit (u_n) *la suite numérique définie par :*

$$u_0=0 \text{ et } u_{n+1}=\frac{1+4u_n}{7-2u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1 — **1.** *Vérifier que* $1-u_{n+1}=\frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *et montrer par récurrence que* $1-u_n>0$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

2. *On pose* $v_n=\frac{2u_n-1}{u_n-1}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

1 — **a)** *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{5}{6}$ *puis exprimer* v_n *en fonction de n.*

1 — **b)** *Montrer que* $u_n=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *puis en déduire la limite de la suite* (u_n).

Exercice 5 : (2 *points*)

1 — **1.** *Déterminer les fonctions primitives de la fonction* $x \mapsto 2x\left(x^2-1\right)^{2009}$ *sur* $\mathbb{R}$ *et vérifier que :* $\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2-1\right)^{2009}dx=\frac{1}{2010}$.

1 — **2.** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :*

$$\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx=6\ln 3-2.$$

Exercice 6 : (6 *points*)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x)=x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right).$$

	et soit (C) *la courbe représentative de la fonction* f *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,5	**1.a)** *Vérifier que :* $f(x)=x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ *pour tout réel* x.
1	**b)** *Montrer que la fonction* f *est paire et que :* $$f(x)-x=\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} \text{ pour tout réel } x.$$
1	**c)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}=0$ *puis en déduire que la droite* (D) *d'équation* $y=x$ *est une asymptote à la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$.
0,5	**2.** *Montrer que la courbe* (C) *est au-dessous de la droite* (D) *sur l'intervalle* $[0,+\infty[$.
1	**3.a)** *Montrer que :* $f'(x)=\dfrac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$ *pour tout réel* x *et vérifier que :* $f'(0)=0$.
0,5	**b)** *Montrer que :* $e^{4x}-1\geq 0$ *pour tout* x *de l'intervalle* $[0,+\infty[$ *puis en déduire que :* $e^{4x}-1+4xe^{2x}\geq 0$ *pour tout* x *de l'intervalle* $[0,+\infty[$.
0,5	**c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction* f *sur l'intervalle* $[0,+\infty[$.
1	**4.** *Construire la courbe* (C) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$. *(on admettra que la courbe possède deux points d'inflexion que l'on ne demande pas de préciser).*

Exercice 1 : (3 *points*)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *les points* $A(-1,0,3)$, $B(3,0,0)$ *et* $C(7,1,-3)$ *et la sphère* (S) *d'équation :*

$$x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0.$$

1 — **1.** *Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ *et en déduire que* $3x+4z-9=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

0,5 — **2.** *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(3,1,0)$ *et son rayon est* 5.

3. *Soit* (Δ) *la droite passant par le point* Ω *et perpendiculaire au plan* (ABC).

0,5 — **a)** *Démontrer que* $\begin{cases} x=3+3t \\ y=1 \\ z=4t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* (Δ).

1 — **b)** *Démontrer que la droite* (Δ) *coupe la sphère* (S) *aux deux points* $E(6,1,4)$ *et* $F(0,1,-4)$.

Exercice 2 : (3 *points*)

1 — **1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$z^2-6z+10=0.$$

2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, *les points A, B et C d'affixes respectives:*

$$a=3-i\ ,\ b=3+i\ \text{et}\ c=7-3i\ .$$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' *l'affixe du point* M' *image de M par la rotation R de centre A et d'angle* $\dfrac{\pi}{2}$.

0,5 — **a)** *Montrer que :* $z'=iz+2-4i$.

0,25 — **b)** *Vérifier que l'affixe du point* C' *image du point C par la rotation R est* $c'=5+3i$.

1,25 — **c)** *Montrer que :* $\dfrac{c'-b}{c-b}=\dfrac{1}{2}i$ *puis en déduire que le triangle* BCC' *est rectangle en B et que* $BC=2BC'$.

Exercice 3 : (3 *points*)

Une urne contient cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules noires (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1 — **1.** *On considère les deux événements :*

A :" tirer une seule boule rouge"

et B :" tirer une boule blanche au moins".

Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{2}$ *et que* $p(B)=\dfrac{41}{42}$.

2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges tirées.*

0,25 — **a)** *Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont* : 0, 1, 2 *et* 3.

1 — **b)** *Montrer que* $p(X=2)=\dfrac{3}{10}$ *et* $p(X=0)=\dfrac{1}{6}$.

0,75 — **c)** *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*

Exercice 4 : (3 *points*)

On considère la suite numérique (u_n) *définie par :*

$$u_0=2 \text{ et } u_{n+1}=\frac{3u_n-1}{2u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0,75 — **1.** *Montrer par récurrence que* $u_n-1>0$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

2. *On considère la suite numérique* (v_n) *définie par :*

$$v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1 — **a)** *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$ *et en déduire que*

$$v_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0,75 — **b)** *Montrer que* $u_n=\dfrac{v_n-1}{2v_n-1}$ *et en déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

0,5 — **3.** *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$ *sachant que* (w_n) *est la suite numérique définie par :*

$w_n=\ln(u_n)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

Exercice 5 : (8 *points*)

I) *On considère la fonction numérique g définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=1+4xe^{2x}$.

0,5 — **1.** *Montrer que :* $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.

0,5 — **2.** *Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle* $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ *et décroissante sur l'intervalle* $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$.

0,5 — **3.a)** *Montrer que* $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1-\dfrac{2}{e}$ *et vérifier que* $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)>0$.

0,25	**b)** *En déduire que :* $g(x)>0$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$.
	II) *Soit f la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$. *et soit* (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(\lVert\vec{i}\rVert=\lVert\vec{j}\rVert=2\,cm)$.
1	**1.** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *puis montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ *(on rappelle que :* $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$*)*
0,75	**2.** *Montrer que :* $f'(x)=g(x)$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
0,75	**3.a)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ *et en déduire que la courbe* (C) *admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées.*
0,5	**b)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ *et en déduire que la droite* (Δ) *d'équation* $y=x+1$ *est une asymptote à la courbe* (C) *au voisinage de* $-\infty$.
0,5	**c)** *Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite* (Δ) *et la courbe* (C) *puis montrer que la courbe* (C) *est en-dessous de la droite* (Δ) *sur l'intervalle* $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ *et qu'elle est au-dessus de la droite* (Δ) *sur l'intervalle* $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.
0,25	**4.a)** *Montrer que :* $y=x$ *est une équation cartésienne de la droite* (T) *tangente à la courbe* (C) *au point O.*
0,25	**b)** *Montrer que la courbe* (C) *possède un point d'inflexion d'abscisse* $-\frac{1}{2}$. *(la détermination de l'ordonnée du point d'inflexion n'est pas demandée).*
0,75	**5.** *Construire les deux droites* (Δ) *et* (T) *et la courbe* (C) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
1	**6.a)** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}$.
0,5	**b)** *Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C), *la droite* (T) *tangente à la courbe* (C) *et les deux droites d'équations* $x=0$ *et* $x=\frac{1}{2}$ *est égale à :* $(6-2e)\,cm^2$.

	Exercice 1 : (3 *points*)
	On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *les points* $A(0,-2,0)$, $B(1,1,-4)$ *et* $C(0,1,-4)$ *et la sphère* (S) *d'équation :* $$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0.$$
0,5	**1.** *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(1,2,3)$ *et son rayon est 5.*
1	**2. a)** *Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$ *et en déduire que* $4y+3z+8=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).
0,5	**b)** *Calculer* $d(\Omega,(ABC))$ *puis en déduire que le plan* (ABC) *est tangent à la sphère* (S).
	3. *Soit* (Δ) *la droite passant par le point* Ω *et perpendiculaire au plan* (ABC).
0,5	**a)** *Démontrer que* $\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* (Δ).
0,25	**b)** *Démontrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection de la droite* (Δ) *et le plan* (ABC) *est* $(1,-2,0)$.
0,25	**c)** *Vérifier que H est le point de contact du plan* (ABC) *et la sphère* (S).
	Exercice 2 : (3 *points*)
1	**1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$, *l'équation :* $$z^2-8\sqrt{3}z+64=0.$$
	2. *On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, *les points A, B et C d'affixes respectives:* $a=8i$, $b=4\sqrt{3}-4i$ *et* $c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)$. *Soit z l'affixe d'un point M du plan et* z' *l'affixe du point* M' *image de M par la rotation R de centre O et d'angle* $\frac{4\pi}{3}$.
0,5	**a)** *Montrer que :* $z'=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.
0,25	**b)** *Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R.*
0,75	**c)** *Montrer que :* $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *puis écrire le nombre* $\frac{a-b}{c-b}$ *sous forme trigonométrique.*
0,5	**d)** *En déduire que le triangle ABC est équilatéral.*

	Exercice 3 : (3 *points*)
	Une urne contient huit boules portant les nombres :
	1 , 1 , 1 , 2 , 2 , 2 , 3 , 3.
	(les boules sont indiscernables au toucher).
	On tire au hasard, successivement et sans remise , deux boules de l'urne.
1,25	**1.** *Soit A l'événement :" tirer deux boules portant le nombre 2"* *et B l'événement :" tirer deux boules dont une au moins porte le nombre 1".* *Montrer que* $p(A)=\frac{3}{28}$ *et que* $p(B)=\frac{13}{28}$.
	2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules portant un nombre impair.*
0,25	**a)** *Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.*
0,75	**b)** *Montrer que* $p(X=1)=\frac{15}{28}$.
0,75	**c)** *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*
	Exercice 4 : (3 *points*)
	On considère la suite numérique (u_n) *définie par :* $u_0=1$ *et* $u_{n+1}=\frac{3u_n}{21+u_n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,5	**1.** *Montrer que* $u_n>0$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,75	**2.** *Montrer que* $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,5	**3.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante et qu'elle est convergente.*
0,75	**4. a)** *Montrer par récurrence que* $u_n<\left(\frac{1}{7}\right)^n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}^*$.
0,5	**b)** *Déterminer la limite de la suite* (u_n).
	Exercice 5 : (8 *points*)
	I) *On considère la fonction numérique g définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$.
0,25	**1.a)** *Vérifier que :* $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$ *pour tout x de l'intervalle* $]0,+\infty[$.
0,5	**b)** *Montrer que:* $g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$ *pour tout x de l'intervalle* $]0,+\infty[$.
0,25	**2.a)** *Vérifier que :* $\frac{3x^2+3x+2}{x}>0$ *pour tout x de l'intervalle* $]0,+\infty[$.

0,5	**b)** *En déduire que le signe de* $g'(x)$ *est celui de* $x-1$ *sur* $]0,+\infty[$.
0,5	**3.a)** *Montrer que la fonction* g *est décroissante sur l'intervalle* $]0,1]$ *et qu'elle est croissante sur l'intervalle* $[1,+\infty[$.
0,5	**b)** *En déduire que* $g(x)>0$ *pour tout* x *de l'intervalle* $]0,+\infty[$ (*remarquer que* $g(1)>0$).
	II) *On considère la fonction numérique* f *définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $$f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}.$$ *et soit* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ (*on prendra* $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$).
1	**1.** *Montrer que :* $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ *pour tout* x *de l'intervalle* $]0,+\infty[$ *puis en déduire que la fonction* f *est croissante sur l'intervalle* $]0,+\infty[$.
0,5	**2.a)** *Montrer que :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ *puis interpréter géométriquement ce résultat.*
0,75	**b)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln x}{x^2}=0$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (*on rappelle que :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$).
0,5	**c)** *Montrer que la droite* (Δ) *d'équation* $y=x-1$ *est une asymptote à la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$.
0,5	**3.** *Montrer que* $y=3(x-1)$ *est une équation de la droite tangente à la courbe* (C) *au point de coordonnées* $(1,0)$.
0,75	**4.** *Construire la droite* (Δ) *et la courbe* (C). (*on admettra que la courbe* (C) *possède un point d'inflexion unique dont on ne demande pas de déterminer*).
1	**5.a)** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}\quad (\text{poser } u'(x)=\frac{1}{x^2} \text{ et } v(x)=\ln x)$$
0,5	**b)** *Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C), *la droite* (Δ) *et les droites d'équations* $x=1$ *et* $x=e$ *est égale à* $\left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$.

	Exercice 1 : (2,5 *points*)
0,5	**1. a)** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $x^2+4x-5=0$.
1	**b)** *Résoudre dans l'intervalle* $]0;+\infty[$ *l'équation :* $$\ln\left(x^2+5\right)=\ln\left(x+2\right)+\ln\left(2x\right).$$
1	**2.** *Résoudre dans l'intervalle* $]0;+\infty[$ *l'inéquation :* $$\ln x+\ln\left(x+1\right)\geq\ln\left(x^2+1\right).$$
	Exercice 2 : (3 *points*)
	On considère la suite numérique (u_n) *définie par :* $$u_0=1 \text{ et } u_{n+1}=\frac{u_n}{5+8u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$
0,5	**1.** *Montrer par récurrence que* $u_n>0$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
	2. *On pose :* $v_n=\dfrac{1}{u_n}+2$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
1,5	**a)** *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* 5 *puis exprimer* v_n *en fonction de n.*
1	**b)** *Montrer que* $u_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$ *puis calculer la limite de la suite* (u_n).
	Exercice 3 : (5 *points*)
1	**1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $$z^2-18z+82=0.$$
	2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, *les points A, B et C d'affixes respectives :* $$a=9+i,\ b=9-i \text{ et } c=11-i.$$
1	**a)** *Montrer que* $\dfrac{c-b}{a-b}=-i$ *puis en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.*
0,5	**b)** *Donner une forme trigonométrique du nombre complexe* $4\left(1-i\right)$.
1	**c)** *Montrer que :* $\left(c-a\right)\left(c-b\right)=4\left(1-i\right)$ *puis en déduire que :* $AC\times BC=4\sqrt{2}$.
1,5	**d)** *Soit* z *l'affixe d'un point M du plan et* z' *l'affixe du point* M' *image de M par la rotation R de centre B et d'angle* $\dfrac{3\pi}{2}$. *Montrer que :* $z'=-iz+10+8i$ *puis vérifier que l'affixe du point* C' *image du point C par la rotation R est* $9-3i$.

	Exercice 4 : (9,5 *points*)
	I- *On considère la fonction g définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=(1-x)e^{x}-1$.
0,5	**1.a)** *Montrer que :* $g'(x)=-xe^{x}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.
0,75	**b)** *Montrer que la fonction g est décroissante sur* $[0;+\infty[$ *et croissante sur l'intervalle* $]-\infty;0]$ *et vérifier que* $g(0)=0$.
0,5	**2.** *En déduire que :* $g(x)\leq 0$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.
	II- *Soit f la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=(2-x)e^{x}-x$. *et soit* (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité : 1cm).*
0,5	**1.a)** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
0,75	**b)** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ *puis en déduire que la courbe* (C) *admet une branche parabolique au voisinage de* $+\infty$ *dont on précisera la direction.*
0,75	**2.a)** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ *puis calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$. *(on rappelle que :* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$*).*
0,25	**b)** *Montrer que la droite* (D) *d'équation* $y=-x$ *est une asymptote à la courbe* (C) *au voisinage de* $-\infty$.
0,5	**3.a)** *Montrer que :* $f'(x)=g(x)$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.
0,25	**b)** *Interpréter géométriquement le résultat :* $f'(0)=0$
0,5	**c)** *Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$ *puis dresser le tableau de variations de la fonction f.*
0,5	**4.** *Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet une solution unique* α *dans* $\mathbb{R}$ *et que* $\frac{3}{2}<\alpha<2$ *(on admettra que* $e^{\frac{3}{2}}>3$*).*
0,5	**5.a)** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $f(x)+x=0$ *et en déduire que* (C) *et* (D) *se coupent au point* $A(2;-2)$.
0,25	**b)** *Etudier le signe de* $f(x)+x$ *sur* $\mathbb{R}$.
0,25	**c)** *En déduire que* (C) *est au-dessus de* (D) *sur* $]-\infty;2[$ *et en-dessous de* (D) *sur* $]2;+\infty[$.
0,5	**6.a)** *Montrer que la courbe* (C) *possède un point d'inflexion unique de coordonnées* $(0;2)$.
1	**b)** *Construire la droite* (D) *et la courbe* (C) *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1	**7.a)** *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :* $$\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}\,dx=3-\frac{4}{e}.$$
0,25	**b)** *En déduire, en* cm^2*, l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C)*, la droite* (D) *et les droites d'équations* $x=-1$ *et* $x=0$.

Exercice 1 : (2,5 *points*)

0,5 **1. a)** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $x^2-2x-3=0$.

1 **b)** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $e^x-\dfrac{3}{e^x}-2=0$.

1 **2.** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $e^{x+1}-e^{-x}\geq 0$.

Exercice 2 : (4 *points*)

1 **1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$, *l'équation :*

$$z^2-6z+18=0.$$

2. *On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, *les deux points A et B d'affixes respectives :* $a=3+3i$ *et* $b=3-3i$.

0,5 **a)** *Ecrire sous forme trigonométrique chacun des deux nombres complexes a et b.*

0,75 **b)** *Montrer que* b' *l'affixe du point* B' *image du point B par la translation de vecteur* $\overrightarrow{OA}$ *est 6.*

1 **c)** *Montrer que :* $\dfrac{b-b'}{a-b'}=i$ *puis en déduire que le triangle* $AB'B$ *est rectangle isocèle en* B'.

0,75 **d)** *Déduire de ce qui précède que le quadrilatère* $OAB'B$ *est un carré.*

Exercice 3 : (3,5 *points*)

On considère la suite numérique (u_n) *définie par :*

$$u_0=1 \text{ et } u_{n+1}=\frac{6u_n}{1+15u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0,5 **1. a)** *Vérifier que* $u_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{u_n-\frac{1}{3}}{15u_n+1}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

0,5 **b)** *Montrer par récurrence que* $u_n>\dfrac{1}{3}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

1,5 **2.** *On considère la suite numérique* (v_n) *définie par :*

$$v_n=1-\frac{1}{3u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

Montrer que (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{6}$ *puis exprimer* v_n *en fonction de n.*

1 **3.** *Montrer que* $u_n=\dfrac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *et en déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Exercice 4 : (10 *points*)

I- *On considère la fonction numérique f définie sur* $I =]0;+\infty[$ *par :*

$$g(x) = x - 1 + \ln x .$$

0,5 **1.a)** *Montrer que :* $g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$ *pour tout x de I.*

0,5 **b)** *Montrer que la fonction g est croissante sur I.*

1 **2.** *En déduire que* $g(x) \geq 0$ *sur* $[1;+\infty[$ *et que* $g(x) \leq 0$ *sur* $]0;1]$.

(*remarquer que* $g(1) = 0$).

II- *Soit f la fonction numérique définie sur I par :* $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln x$.

et soit (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ (*unité* 1cm).

0,75 **1. a)** *Montrer que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ *et donner une interprétation géométrique de ce résultat.*

1 **b)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

(*remarquer que* $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x}$ *pour tout x de I*).

0,5 **c)** *En déduire que la courbe* (C) *admet une branche parabolique au voisinage de* $+\infty$ *dont on précisera la direction.*

1 **2.a)** *Montrer que :* $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ *pour tout x de I.*

0,5 **b)** *En déduire que la fonction f est croissante sur* $[1;+\infty[$ *et décroissante sur* $]0;1]$.

0,25 **c)** *Dresser le tableau de variation de la fonction f sur I.*

1 **3.** *Construire* (C) (*on admettra que la courbe* (C) *possède un seul point d'inflexion d'abscisse comprise entre* 1,5 *et* 2).

0,5 **4.a)** *Montrer que* $H : x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ *est une fonction primitive de la fonction* $h : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ *sur l'intervalle I.*

0,75 **b)** *Montrer que* $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}$.

1 **c)** *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :* $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx = 1$.

0,25	**5.a)** *Vérifier que* $f(x)=\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$ *pour tout x de I.*
0,5	**b)** *Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C)*, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=0$ *et* $x=e$ *est égale à* $0.5\ cm^2$.

Exercice 1 : (3 *points*)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *les points* $A(1,1,-1)$, $B(0,1,-2)$ *et* $C(3,2,1)$ *et la sphère* (S) *d'équation :*

$$x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0.$$

0,5 **1.** *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(1,0,1)$ *et son rayon est* $\sqrt{3}$.

0,75 **2. a)** *Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ *et vérifier que* $x-z-2=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

1 **b)** *Vérifier que* $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ *puis en déduire que le plan* (ABC) *coupe la sphère* (S) *suivant un cercle* (Γ) *de rayon* 1.

3. *Soit* (Δ) *la droite passant par le point* Ω *et perpendiculaire au plan* (ABC).

0,25 **a)** *Démontrer que* $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* (Δ).

0,25 **b)** *Démontrer que le triplet de coordonnées de* H *point d'intersection de la droite* (Δ) *et le plan* (ABC) *est* $(2,0,0)$.

0,25 **c)** *En déduire le centre du cercle* (Γ).

Exercice 2 : (3 *points*)

0,75 **1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$, *l'équation :*

$$z^2-12z+61=0.$$

2. *On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$, *les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que :*

$$a=6-5i,\ b=4-2i \text{ et } c=2+i.$$

0,5 **a)** *Calculer* $\dfrac{a-c}{b-c}$ *et en déduire que les points A, B et C sont alignés.*

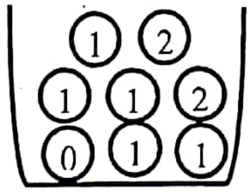
0,5 **b)** *On considère la translation* T *de vecteur* $\vec{u}$ *tel que l'affixe de* $\vec{u}$ *est* $1+5i$. *Vérifier que l'affixe du point* D *image du point* C *par la translation* T *est* $d=3+6i$.

0,75 **c)** *Montrer que :* $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$ *et que* $\dfrac{3\pi}{4}$ *est un argument du nombre complexe* $-1+i$.

0,5 **d)** *En déduire une mesure de l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$.

Exercice 3 : (3 *points*)

Une urne contient huit jetons indiscernables au toucher : un jeton portant le nombre 0, cinq jetons portant chacun le nombre 1 et deux jetons portant chacun le nombre 2.
On tire au hasard, simultanément, trois jetons de l'urne.



1 — **1.** *Soit A l'événement : « Les trois jetons tirés, portent des nombres différents deux à deux »*

Montrer que $p(A)=\frac{5}{28}$.

1 — **2.** *Soit B l'événement : « La somme des nombres portés par les trois jetons tirés est égale à 5»*

Montrer que $p(B)=\frac{5}{56}$.

1 — **3.** *Soit C l'événement : « La somme des nombres portés par les trois jetons tirés est égale à 4»*

Montrer que $p(C)=\frac{3}{8}$.

Exercice 4 : (3 *points*)

On considère la suite numérique (u_n) *définie par :*

$$u_0=11 \text{ et } u_{n+1}=\frac{10}{11}u_n+\frac{12}{11} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0,25 — **1.** *Vérifier que :* $u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

0,5 — **2.a)** *Montrer par récurrence que* $u_n<12$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

0,5 — **b)** *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*

0,25 — **c)** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*

3) *Soit* (v_n) *la suite numérique telle que :* $v_n=u_n-12$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

0,75 — **a)** *En utilisant la question* **1.** *montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{10}{11}$ *puis exprimer* v_n *en fonction de n.*

0,75 — **b)** *Montrer que* $u_n=12-\left(\frac{10}{11}\right)^n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *et calculer la limite de la suite* (u_n).

Exercice 5 : (8 *points*)

I- *Soit g la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par:* $g(x)=x^2-1+2x^2\ln x$.

0,75 — **1.** *Montrer que* x^2-1 *et* $2x^2\ln x$ *ont le même signe sur l'intervalle* $]0;1[$ *puis en*

	déduire que $g(x) \le 0$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $]0,1]$.
0,75	**2.** *Montrer que* x^2-1 *et* $2x^2\ln x$ *ont le même signe sur l'intervalle* $]1;+\infty[$ *puis en déduire que* $g(x) \ge 0$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $[1;+\infty[$.
	II- *On considère la fonction numérique f définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $$f(x) = (x^2-1)\ln x .$$ *et soit* (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité* $3cm$ *).*
0,5	**1. a)** *Montrer que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ *et donner une interprétation géométrique de ce résultat.*
1	**b)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *puis montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ *(on pourra écrire* $\frac{f(x)}{x}$ *sous la forme* $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ln x$ *).* *et en déduire que la courbe* (C) *admet une branche parabolique au voisinage de* $+\infty$ *dont on précisera la direction.*
1,25	**2.a)** *Montrer que :* $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $]0,+\infty[$ *et interpréter géométriquement le résultat* $f'(1) = 0$.
0,5	**b)** *Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle* $]0,1]$ *et croissante sur l'intervalle* $[1,+\infty[$.
0,5	**c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *puis montrer que* $f(x) \ge 0$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $]0;+\infty[$.
1	**3.** *Construire la courbe* (C) *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,5	**4.a)** *Montrer que* $u : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ *est une fonction primitive de la fonction* $x \mapsto x^2-1$ *sur* $\mathbb{R}$.
1	**b)** *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :* $$\int_1^2 (x^2-1)\ln x \, dx = \frac{2}{9}(1+3\ln 2).$$
0,25	**c)** *Calculer, en* cm^2*, l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C)*, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=1$ *et* $x=2$.

Exercice 1 : (3 *points*)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *les points* $A(-3,0,0)$, $B(0,0,-3)$ *et* $C(0,2,-2)$ *et la sphère* (S) *de centre* $\Omega(1,1,1)$ *et de rayon* 3.

1,25 — **1. a)** *Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ *puis en déduire que* $2x-y+2z+6=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

0,75 — **b)** *Calculer* $d(\Omega,(ABC))$ *puis en déduire que le plan* (ABC) *est tangent à la sphère* (S).

2. *Soit* (D) *la droite passant par le point* Ω *et perpendiculaire au plan* (ABC).

0,5 — **a)** *Démontrer que* $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* (D).

0,5 — **b)** *Démontrer que le triplet de coordonnées de H point de contact du plan* (ABC) *et la sphère* (S) *est* $(-1,2,-1)$.

Exercice 2 : (3 *points*)

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, *les points A, B et C d'affixes respectives*: $a=2-i$, $b=6-7i$, $c=8+3i$.

0,75 — **1. a)** *Montrer que :* $\dfrac{c-a}{b-a}=i$.

0,75 — **b)** *En déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.*

2. *Soit z l'affixe d'un point M du plan et* z' *l'affixe du point* M' *image de M par la rotation R de centre* Ω *milieu du segment* $[BC]$ *et d'angle* $-\dfrac{\pi}{2}$.

0,5 — **a)** *Vérifier que l'affixe du point* Ω *est* $\omega=7-2i$

0,75 — **b)** *Montrer que :* $z'=-iz+9+5i$.

0,25 — **c)** *Montrer que le point C est l'image du point A par la rotation R.*

Exercice 3 : (3 *points*)

On considère la suite numérique (u_n) *définie par :*

$$u_0=3 \text{ et } u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{3u_n+4} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0,5 — **1.** *Montrer par récurrence que* $u_n>1$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

2. *On pose :* $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

0,5	**a)** *Vérifier que* $1-v_n=\frac{2}{u_n+1}$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$ *et en déduire que* $1-v_n>0$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,5	**b)** *Montrer que* $u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
1	**3.a)** *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{7}$ *et exprimer* v_n *en fonction de n.*
0,5	**b)** *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ *et en déduire la limite de la suite* (u_n).
	Exercice 4 : (3 *points*) *Une urne contient cinq boules rouges, quatre boules blanches et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).* *On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.*
1	**1.** *Montrer que la probabilité de tirer trois boules rouges est* $\frac{1}{22}$.
1	**2.** *Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est* $\frac{3}{44}$.
1	**3.** *Montrer que la probabilité de tirer une boule rouge au moins est* $\frac{37}{44}$.
	Exercice 5 : (8 *points*) *On considère la fonction numérique f définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=x+\frac{e^x-1}{e^x+1}$. *et soit* (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,75	**1.** *Montrer que* $f(-x)=-f(x)$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *et en déduire que le point O est centre de symétrie de la courbe* (C).
0,5	**2.** *Vérifier que :* $f(x)=x+1-\frac{2}{e^x+1}$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$. ***(il est préférable d'utiliser cette expression de*** $f(x)$ ***pour traiter les questions qui suivent).***
1,25	**3.a)** *Montrer que* $f'(x)=1+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *et vérifier que:* $f'(0)=\frac{3}{2}$.
0,5	**b)** *Montrer que la fonction f est croissante sur* $\mathbb{R}$.

0,5	**c)** *Montrer que* $y=\frac{3}{2}x$ *est une équation cartésienne de la droite* (T) *tangente à la courbe* (C) *au point O.*
0,5	**4.a)** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
0,5	**b)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ *et en déduire que la droite* (D) *d'équation* $y=x+1$ *est une asymptote à la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$.
0,25	**c)** *Montrer que la courbe* (C) *est au-dessous de la droite* (D).
1,5	**5.** *Construire les deux droites* (D) *et* (T) *et la courbe* (C). *(on rappelle que O est centre de symétrie de la courbe* (C)*).*
0,75	**6.a)** *Montrer que la fonction* $H : x \mapsto x-\ln(e^x+1)$ *est une fonction primitive de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$ *sur* $\mathbb{R}$.
0,5	**b)** *En déduire que :* $\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}\ln x\,dx=\ln 4-\ln 3$.
0,5	**c)** *Calculer, en* cm^2, *l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C), *la droite* (D) *et les droites d'équations* $x=0$ *et* $x=\ln 2$.

	Exercice 1 : (3 *points*)
	On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *les points* $A(-1,1,0)$, $B(1,0,1)$ *et* $\Omega(1,1,-1)$ *et la sphère* (S) *de centre* Ω *et de rayon* 3.
1	**1. a)** *Montrer que* $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ *et vérifier que* $x+y-z=0$ *est une équation cartésienne du plan* (OAB).
1	**b)** *Vérifier que* $d(\Omega,(OAB))=\sqrt{3}$ *puis montrer que le plan* (OAB) *coupe la sphère* (S) *suivant un cercle* (Γ) *de rayon* $\sqrt{6}$.
	2. *Soit* (Δ) *la droite passant par le point* Ω *et perpendiculaire au plan* (OAB).
0,5	**a)** *Démontrer que* $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=-1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* (Δ).
0,5	**b)** *Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle* (Γ).
	Exercice 2 : (3 *points*)
	On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, *les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que :* $a=7+2i$, $b=4+8i$ *et* $c=-2+5i$.
0,75	**1.a)** *Vérifier que :* $(1+i)(-3+6i)=-9+3i$ *et montrer que :* $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$.
1	**b)** *En déduire que :* $AC=AB\sqrt{2}$ *et donner une mesure de l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
	2. *Soit R la rotation de centre B et d'angle* $\dfrac{\pi}{2}$.
0,75	**a)** *Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est :* $d=10+11i$.
0,5	**b)** *Calculer* $\dfrac{d-c}{b-c}$ *et en déduire que les points B, C et D sont alignés.*
	Exercice 3 : (3 *points*)
	Une urne contient 10 *boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches.*
	On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.
1,5	**1.** *Soient les deux événements suivants :*
	A :" Tirer deux boules rouges et deux boules vertes "

	B :" *Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées* "
	Montrer que $p(A)=\frac{1}{7}$ *et que* $p(B)=\frac{1}{3}$.
	2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées.*
0,25	**a)** *Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont :* $0,1$ *et* 2.
1,25	**b)** *Montrer que* $p(X=1)=\frac{8}{15}$ *puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*

	Exercice 4 : (3 *points*)
	Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite numérique définie par :* $$u_1=0 \text{ et } u_{n+1}=\frac{25}{10-u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$
1	**1.** *Vérifier que* $5-u_{n+1}=\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ *pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et montrer par récurrence que* $5-u_n>0$ *pour tout n de* $\mathbb{N}^*$.
	2. *On considère la suite numérique* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $$v_n=\frac{5}{5-u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$
0,75	**a)** *Montrer que* $v_{n+1}=\frac{10-u_n}{5-u_n}$ *pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et vérifier que* $$v_{n+1}-v_n=1 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$
1	**b)** *Montrer que :* $v_n=n$ *pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et en déduire que* $$u_n=5-\frac{5}{n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$
0,25	**c)** *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

	Exercice 5 : (8 *points*)
	On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=(x-2)^2e^x$. *et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité : 1cm).*
0,25	**1.a)** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
0,5	**b)** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ *puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.*

0,25	**2.a)** *Vérifier que :* $f(x)=x^2e^x-4xe^x+4e^x$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$.
0,5	**b)** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ *et interpréter géométriquement ce résultat.* (*on rappelle que :* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x=0$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}^*$).
0,75	**3.a)** *Montrer que :* $f'(x)=x(x-2)e^x$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$.
1	**b)** *Montrer que la fonction* f *est croissante sur chacun des deux intervalles* $]-\infty,0]$ *et* $[2,+\infty[$ *et qu'elle est décroissante sur l'intervalle* $[0,2]$.
0,5	**c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction* f *sur* $\mathbb{R}$.
1	**4.a)** *Montrer que :* $f''(x)=(x^2-2)e^x$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *puis en déduire que la courbe* (C) *possède deux points d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer leurs ordonnées.*
1	**b)** *Construire* (C) *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,5	**5.a)** *Montrer que la fonction* $H:x\mapsto(x-1)e^x$ *est une fonction primitive de la fonction* $h:x\mapsto xe^x$ *sur* $\mathbb{R}$ *puis calculer* $\int_0^1 xe^x\,dx$.
0,75	**b)** *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :* $\int_0^1 x^2e^x\,dx=e-2$.
0,5	**c)** *Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C), *l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=0$ *et* $x=1$ *est égale à* $5(e-2)cm^2$.
0,5	**6.** *Utiliser la courbe pour donner le nombre de solutions de l'équation :* $x^2=e^{-x}+4x-4, x\in\mathbb{R}$.

	Exercice 1 : (3 *points*)
	On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *les points* $A(0,0,1)$, $B(1,1,1)$ *et* $C(2,1,2)$ *et la sphère* (S) *de centre* $\Omega(1,-1,0)$ *et de rayon* $\sqrt{3}$.
0,75	**1.** *Montrer que* $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ *est une équation cartésienne de la sphère et vérifier que le point A appartient à la sphère* (S).
0,75	**2. a)** *Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ *et en déduire que* $x-y-z+1=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).
0,75	**b)** *Calculer* $d(\Omega,(ABC))$ *puis en déduire que le plan* (ABC) *est tangent à la sphère* (S) *en A.*
	3. *Soit* (Δ) *la droite passant par le point* Ω *et perpendiculaire au plan* (ABC).
0,25	**a)** *Démontrer que* $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* (Δ).
0,5	**b)** *En déduire les coordonnées des deux points d'intersection de la droite* (Δ) *et la sphère* (S).
	Exercice 2 : (3 *points*)
0,75	**1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$, *l'équation :* $$z^2-8z+25=0.$$
	2. *On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, *les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que:* $$a=4+3i\ ,\ b=4-3i\ \text{et}\ c=10+3i$$ *et la translation T de vecteur* $\overrightarrow{BC}$.
0,75	**a)** *Montrer que l'affixe du point D image du point A par la translation T est* $d=10+9i$.
1	**b)** *Vérifier que* $\dfrac{b-a}{d-a}=-\dfrac{1}{2}(1+i)$ *puis écrire le nombre complexe* $-\dfrac{1}{2}(1+i)$ *sous une forme trigonométrique.*
0,5	**c)** *Montrer que :* $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$.
	Exercice 3 : (3 *points*)
	On considère la suite numérique (u_n) *définie par :*

	$u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,5	**1.** *Vérifier que :* $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,5	**2.a)** *Montrer par récurrence que* $u_n > 1$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,5	**b)** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*
0,25	**c)** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*
	3) *Soit* (v_n) *la suite numérique telle que :* $v_n = u_n - 1$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,5	**a)** *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{5}$ *et exprimer* v_n *en fonction de n.*
0,75	**b)** *En déduire que* $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$ *puis calculer la limite de la suite* (u_n).
	Exercice 4 : (3 *points*) *Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : quatre jetons blancs, trois jetons noirs et deux jetons verts.* *On tire au hasard, simultanément, trois jetons du sac.*
1	**1.** *Soient les deux événements suivants : A :" Tirer trois jetons de même couleur "* *B :" Tirer trois jetons de couleurs différentes deux à deux "* *Montrer que* $p(A) = \frac{5}{84}$ *et que* $p(B) = \frac{2}{7}$.
	2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons noirs tirés.*
0,25	**a)** *Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont :* 0, 1, 2 *et* 3.
1	**b)** *Montrer que* $p(X = 2) = \frac{3}{14}$ *et* $p(X = 1) = \frac{15}{28}$
0,75	**c)** *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*
	Exercice 5 : (8 *points*) **I-** *On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *par :* $g(x) = x^2 - x - \ln x$.
0,25	**1.a)** *Vérifier que* $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.
1	**b)** *Montrer que* $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$ *pour tout x de l'intervalle* $]0,+\infty[$ *et en déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle* $]0,1]$ *et qu'elle est croissante sur l'intervalle* $[1,+\infty[$.

0,5	**2.** *Montrer que* $g(x) \geq 0$ *pour tout* x *de l'intervalle* $]0,+\infty[$. (*remarquer que* $g(1)=0$).
	II- *On considère la fonction numérique* f *définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=x^2-1-(\ln x)^2$. *et soit* (C) *la courbe représentative de la fonction* f *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ (*unité* 1cm).
0,5	**1.a)** *Montrer que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ *et donner une interprétation géométrique de ce résultat.*
0,5	**b)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$. (*remarquer que* $f(x)=x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$).
0,25	**c)** *En déduire que la courbe* (C) *admet, au voisinage de* $+\infty$, *une branche parabolique dont on précisera la direction.*
1	**2.a)** *Montrer que :* $f'(x)=2\left(\frac{x^2-\ln x}{x}\right)$ *pour tout* x *de* $]0,+\infty[$.
0,75	**b)** *Vérifier que* $\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-\ln x}{x}$ *pour tout* x *de l'intervalle* $]0,+\infty[$ *et en déduire que la fonction* f *est croissante sur* $]0,+\infty[$.
0,5	**3.a)** *Montrer que* $y=2x-2$ *est une équation cartésienne de la droite* (T) *tangente à la courbe* (C) *au point* $A(1,0)$.
1	**b)** *Construire, dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$, *la droite* (T) *et la courbe* (C). (*on admettra que* A *est le seul point d'inflexion de la courbe* (C))
0,75	**4.a)** *Vérifier que* $H: x \mapsto x(\ln x-1)$ *est une fonction primitive de la fonction* $h: x\mapsto \ln x$ *sur* $]0,+\infty[$ *puis montrer que :* $\int_1^e \ln x\,dx=1$.
0,5	**b)** *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :* $\int_1^e (\ln x)^2\,dx=e-2$.
0,5	**c)** *Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C), *l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=1$ *et* $x=e$ *est égale à* $\frac{1}{3}(e^3-6e+8)cm^2$.

	Exercice 1 : (3 *points*)
	On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *les points* $A(0,3,1)$, $B(-1,3,0)$ *et* $C(0,5,0)$ *et la sphère* (S) *d'équation :* $$x^2+y^2+z^2-4x-5=0.$$
0,75	**1. a)** *Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ *et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.*
0,5	**b)** *Montrer que* $2x-y-2z+5=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC)
0,5	**2. a)** *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(2,0,0)$ *et son rayon est* 3.
0,75	**b)** *Montrer que le plan* (ABC) *est tangent à la sphère* (S).
0,5	**c)** *Déterminer le triplet de coordonnées de H point de contact du plan* (ABC) *et la sphère* (S).
	Exercice 2 : (3 *points*)
0,75	**1.** *Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$, *l'équation :* $$z^2-z\sqrt{2}+2=0$$
	2. *On considère le nombre complexe :* $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$.
0,5	**a)** *Montrer que le module de u est* $\sqrt{2}$ *et que* $\arg u\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
0,75	**b)** *En utilisant la forme trigonométrique du nombre u, montrer que* u^6 *est un nombre réel.*
	3. *On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, *les deux points A et B d'affixes respectives a et b tel que :* $a=4-4\sqrt{3}i$ *et* $b=8$. *Soit z l'affixe d'un point M du plan et* z' *l'affixe du point* M' *image de M par la rotation R de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{3}$.
0,5	**a)** *Exprimer* z' *en fonction de z.*
0,5	**b)** *Vérifier que B est l'image de A par la rotation R et en déduire que le triangle OAB est équilatéral.*
	Exercice 3 : (3 *points*)
	On considère la suite numérique (u_n) *définie par :* $$u_0=13 \text{ et } u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+7 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$
0,75	**1.** *Montrer par récurrence que* $u_n<14$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
	2. *Soit* (v_n) *la suite numérique telle que :* $v_n=14-u_n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

1	**a)** *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{2}$ *et exprimer* v_n *en fonction de n.*
0,75	**b)** *En déduire que* $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *puis calculer la limite de la suite* (u_n).
0,5	**c)** *Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle* $u_n > 13{,}99$.
	Exercice 4 : (3 *points*) *Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher portants les nombres :* 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1.
1	**1.** *On tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac.* *Soit A l'événement : " La somme des nombres portés par les deux jetons tirés est égale à 1"* *Montrer que* $p(A) = \frac{5}{9}$.
	2. *On considère le jeu suivant : Saïd tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac et il est considéré gagnant s'il tire deux jetons portant chacun le nombre* 1.
1	**a)** *Montrer que la probabilité pour que Saïd gagne est* $\frac{1}{6}$.
1	**b)** *Saïd a joué le jeu précédent trois fois (Saïd remet à chaque fois les deux jetons tirés dans le sac).* *Quelle est la probabilité pour que Saïd gagne exactement deux fois.*
	Problème : (8 *points*) **I)** *Soit g la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$.
0,5	**1.** *Montrer que* $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$ *et en déduire que la fonction g est croissante sur* $]0;+\infty[$.
0,75	**2.** *Vérifier que* $g(1) = 0$ *puis en déduire que* $g(x) \leq 0$ *pour tout x de* $]0,1]$ *et que* $g(x) \geq 0$ *pour tout x de* $[1,+\infty[$.
	II) *On considère la fonction numérique f définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$. *et soit* (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité* 1cm *).*

0,5	**1.** *Montrer que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ *et donner une interprétation géométrique de ce résultat.*
0,25	**2. a)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
1	**b)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ *(on pourra poser* $t=\sqrt{x}$ *) puis montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.
0,25	**c)** *Déterminer la branche infinie de la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$.
1,5	**3.a)** *Montrer que* $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$ *puis en déduire que la fonction f est décroissante sur* $]0,1]$ *et croissante sur* $[1,+\infty[$.
1	**b)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *puis en déduire que* $f(x)\geq 2$ *pour tout x de* $]0,+\infty[$.
0,75	**4.** *Construire* (C) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(on admettra que la courbe* (C) *possède un seul point d'inflexion que l'on ne demande pas de déterminer).*
	5. *On considère les deux intégrales I et J suivantes :* $$I=\int_1^e (1+\ln x)dx \quad et \quad J=\int_1^e (1+\ln x)^2 dx .$$
0,5	**a)** *Montrer que* $H: x\mapsto x\ln x$ *est une fonction primitive de la fonction* $h: x\mapsto 1+\ln x$ *sur* $]0,+\infty[$ *puis en déduire que* $I=e$.
0,5	**b)** *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :* $J=2e-1$.
0,5	**c)** *Calculer, en* cm^2, *l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C) *l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=1$ *et* $x=e$.

Exercice 1 : (3 *points*)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *le point* $A(0,0,1)$; *le plan* (P) *d'équation* $2x+y-2z-7=0$ *et la sphère* (S) *de centre* $\Omega(0,3,-2)$ *et de rayon* 3.

0,5 **1.a)** *Montrer que* $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par le point A et perpendiculaire au plan* (P).

0,5 **b)** *Vérifier que* $H(2,1,-1)$ *est le point d'intersection du plan* (P) *et la droite* (Δ).

0,75 **2.a)** *Montrer que* $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=3\left(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\right)$ *où* $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

0,5 **b)** *Montrer que la distance du point* Ω *à la droite* (Δ) *est égale à* 3.

0,75 **c)** *En déduire que la droite* (Δ) *est tangente à la sphère* (S) *et vérifier que H est le point de contact de la droite* (Δ) *et la sphère* (S).

Exercice 2 : (3 *points*)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$u_1=5 \text{ et } u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{1+u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

0,75 **1.** *Montrer par récurrence que* $u_n>2$ *pour tout n de* $\mathbb{N}^*$.

2. *On considère la suite numérique* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$v_n=\frac{3}{u_n-2} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

1 **a)** *Montrer que* $v_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{u_n-2}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}^*$ *et montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est arithmétique de raison* 1.

0,75 **b)** *Exprimer* v_n *en fonction de n et en déduire que :* $u_n=2+\dfrac{3}{n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}^*$.

0,5 **c)** *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Exercice 3 : (3 *points*)

Pour déterminer les deux questions d'un examen oral dans un concours de recrutement, le candidat tire au hasard, successivement et sans remise, deux cartes d'une urne contenant 10 *cartes : huit cartes concernant les mathématiques et deux cartes concernant la langue française (on suppose que les cartes sont indiscernables au toucher).*

1,5	**1.** *On considère l'événement A :" Tirer deux cartes concernant la langue française "* *et l'événement B :" Tirer deux cartes concernant deux matières différentes ".* *Montrer que* $p(A)=\dfrac{1}{45}$ *et que* $p(B)=\dfrac{16}{45}$.
	2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de cartes tirées concernant la langue française.*
0,25	**a)** *Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0 ,1 et 2.*
1,25	**b)** *Montrer que* $p(X=0)=\dfrac{28}{45}$ *puis donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*
	Exercice 4 : (3 *points*)
0,75	**1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$, *l'équation :* $$z^2-4z+5=0.$$
	2. *On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$, *les points A , B , C , D et* Ω *d'affixes respectives:* $$a=2+i\ ,\ b=2-i\ ,\ c=i\ ,\ d=-i \text{ et } \omega=1.$$
0,25	**a)** *Montrer que :* $\dfrac{a-\omega}{b-\omega}=i$.
0,5	**b)** *En déduire que le triangle* ΩAB *est rectangle et isocèle en* Ω.
	2. *Soit z l'affixe d'un point M du plan et* z' *l'affixe du point* M' *image de M par la rotation R de centre* Ω *et d'angle* $\dfrac{\pi}{2}$.
0,5	**a)** *Montrer que :* $z'=iz+1-i$.
0,5	**b)** *Vérifier que :* $R(A)=C$ *et* $R(D)=B$.
0,5	**c)** *Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre.*
	Exercice 5 : (8 *points*) *On considère la fonction numérique f définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\left(xe^x-1\right)e^x$. *et soit* (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ *(unité 2cm).*
0,75	**1.** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ *et donner une interprétation géométrique de ce résultat.*
0,75	**2.a)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$
0,5	**b)** *En déduire que la courbe* (C) *admet, au voisinage de* $+\infty$, *une branche*

parabolique dont on précisera la direction.

1 **3.a)** *Montrer que :* $f'(x)=e^{x}\left(e^{x}-1+2xe^{x}\right)$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *puis vérifier que* $f'(0)=0$.

0,5 **b)** *Montrer que* $e^{x}-1\geq 0$ *pour tout* x *de* $[0,+\infty[$ *et que* $e^{x}-1\leq 0$ *pour tout* x *de* $]-\infty,0]$.

1,25 **c)** *Montrer que la fonction* f *est croissante sur* $[0,+\infty[$ *et qu'elle est décroissante sur* $]-\infty,0]$ *puis dresser le tableau de variations de la fonction* f *sur* $\mathbb{R}$.

0,75 **4.a)** *Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet une solution unique* α *dans l'intervalle* $[0,+\infty[$ *et que* $\frac{1}{2}<\alpha<1$.*(on admettra que* $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$*)*

0,75 **b)** *Construire, dans le repère* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$*, la droite la courbe* (C).

(on admettra que la courbe (C) *possède un seul point d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer).*

0,75 **5.** *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :* $\int_{0}^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,dx=\frac{1}{4}$.

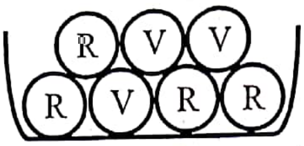
1 **6.** *Calculer, en* cm^{2}*, l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C)*, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=0$ *et* $x=\frac{1}{2}$.

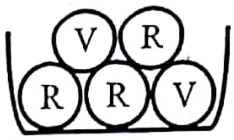
	Exercice 1 : (3 *points*)
	On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *les points deux points* $A(2,1,0)$ *et* $B(-4,1,0)$.
0,5	**1.** *Soit* (P) *le plan passant par le point* A *et* $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ *est un vecteur qui lui est normal.* *Montrer que* $x+y-z-3=0$ *est une équation cartésienne du plan* (P).
0,75	**2.** *Soit* (S) *l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient la relation :* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$. *Montrer que* (S) *est la sphère de centre* $\Omega(-1,1,0)$ *et de rayon* 3.
0,5	**3. a)** *Calculer la distance du point* Ω *du plan* (P) *et en déduire que* (P) *coupe* (S) *suivant un cercle* (C).
0,5	**b)** *Montrer que le centre du cercle est le point* $H(0,2,-1)$.
0,75	**4.** *Montrer que* $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$ *et en déduire l'aire du triangle OHB.*
	Exercice 2 : (3 *points*)
	I- *On considère le nombre complexe a tel que :* $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.
0,5	**1.** *Montrer que le module du nombre complexe a est* $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
0,25	**2.** *Vérifier que* $a=2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)+2i\sin\frac{\pi}{4}$.
0,25	**3. a)** *En linéarisant* $\cos^2\theta$, θ *est un nombre réel, montrer que :* $1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$.
0,5	**b)** *Montrer que* $a=4\cos^2\frac{\pi}{8}+4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$. (*on rappelle que* $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$)
0,5	**c)** *Montrer que* $4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ *est une forme trigonométrique du nombre a puis montrer que* $a^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$
	II- *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$, *les deux points* Ω *et A d'affixes respectives* ω *et a tels que :* $\omega=\sqrt{2}$ *et* $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ *et la rotation R de centre* Ω *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.
0,5	**1.** *Montrer que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est* $2i$.
0,5	**2.** *Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que* $\lvert z-2i\rvert=2$.

Exercice 3 : (3 *points*)

Une urne U_1 contient 7 boules : quatre boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

Une autre urne U_2 contient 5 boules : trois boules rouges et deux boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

L'urne U_1 

L'urne U_2 

2 **I)** *On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne U_1.*

Soit l'événement A :"On tire une seule boule rouge et deux vertes" et l'événement B :" On tire trois boules de même couleur".

Montrer que $p(A)=\dfrac{12}{35}$ *et* $p(B)=\dfrac{1}{7}$.

1 **II)** *On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard deux boules de U_1 puis on tire au hasard une seule boule de U_2.*

Soit l'événement C :"On tire trois boules rouges".

Montrer que $p(C)=\dfrac{6}{35}$.

Problème : (11 *points*)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x telle que :

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}.$$

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2cm).

0,5 ***I)* 1.** *Montrer que* $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$ *(D_f est l'ensemble de définition de la fonction f).*

0,75 **2. a)** *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x)$ *puis interpréter géométriquement les deux résultats obtenus.*

0,5 **b)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera.*

0,5 **c)** *Montrer que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ *et donner une interprétation géométrique à ce résultat (pour calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ *; remarquer que* $x(1-\ln x)=x-x\ln x$ *).*

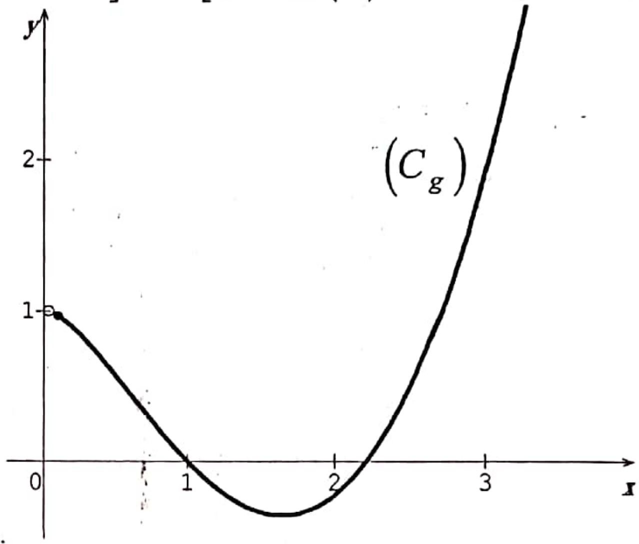
0,75 **3. a)** *Montrer que* $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ *pour tout* x *de* D_f.

1 **b)** *Montrer que la fonction* f *est décroissante sur l'intervalle* $]0,1]$ *et croissante sur chacun des deux intervalles* $[1,e[$ *et* $]e,+\infty[$.

0,25 **c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction* f *sur* D_f.

II **)** *Soit* g *la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par:* $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$.

et soit (C_g) *la courbe représentative de la fonction* g *dans un repère orthonormé (voir figure).*



0,5 **1. a)** *Déterminer graphiquement le nombre de solution (s) de l'équation* (E) *suivante :*

$$g(x)=0 \ , \ x\in\,]0,+\infty[.$$

0,5 **b)** *On donne le tableau de valeurs suivant :*

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	$-0{,}14$	$-0{,}02$	0,12	0,28

Montrer que l'équation (E) *admet une solution* α *telle que :* $2,2<\alpha<2,3$.

0,25 **2. a)** *Vérifier que* $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ *pour tout* x *de* D_f.

0,5 **b)** *Montrer que la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$ *coupe la courbe* (C_f) *aux deux points d'abscisses* 1 *et* α.

0,5 **c)** *Déterminer, à partir de* (C_g), *le signe de la fonction* g *sur l'intervalle* $[1,\alpha]$ *et montrer que* $f(x)-x\le 0$ *pour tout* x *de* $[1,\alpha]$.

1,25 **3.** *Tracer, dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$, *la droite* (Δ) *et la courbe* (C_f).

0,75 **4. a)** *Montrer que* $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$.

(remarquer que : $\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ *pour tout* x *de* D_f *)*

0,75 **b)** *Calculer, en* cm^2, *l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C_f), *la*

	droite (Δ), *et les deux droites d'équations* $x=1$ *et* $x=\sqrt{e}$.
	III) *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :*
	$u_0=2$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,5	**1.** *Montrer par récurrence que* $1\leq u_n\leq\alpha$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,5	**2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question* ***II***)**2. c)**).
0,75	**3.** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 1 : (3 *points*)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *le plan* (P) *d'équation* $x+y+z+4=0$ *et la sphère* (S) *de centre* $\Omega(1,-1,-1)$ *et de rayon* $\sqrt{3}$.

0,75 **1. a)** *Calculer la distance* $d\left(\Omega,(P)\right)$ *et en déduire que le plan* (P) *est tangent à la sphère* (S).

0,5 **b)** *Vérifier que le point* $H(0,-2,-2)$ *est le point de contact du plan* (P) *et la sphère* (S).

2. *On considère les deux points* $A(2,1,1)$ *et* $B(1,0,1)$.

0,75 **a)** *Vérifier que* $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ *et en déduire que* $x-y-z=0$ *est une équation cartésienne du plan* (OAB).

0,5 **b)** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par* Ω *et orthogonale au plan* (OAB).

0,5 **c)** *Déterminer les coordonnées de chacun des deux points d'intersection de la droite* (Δ) *et la sphère* (S).

Exercice 2 : (3 *points*)

0,75 **1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$z^2+10z+26=0.$$

2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, *les points A, B, C et* Ω *d'affixes respectives a, b, c et* ω *tels que :*

$$a=-2+2i\ ,\ b=-5+i\ ,c=-5-i\ \text{et}\ \omega=-3.$$

0,5 **a)** *Montrer que :* $\dfrac{b-\omega}{a-\omega}=i$.

0,5 **b)** *En déduire la nature du triangle* ΩAB.

3. *Soit le point D image du point C par la translation T de vecteur* $\vec{u}$ *d'affixe* $6+4i$.

0,5 **a)** *Montrer que l'affixe d du point D est* $1+3i$.

0,75 **b)** *Montrer que :* $\dfrac{b-d}{a-d}=2$ *et en déduire que le point A est le milieu du segment* $[BD]$.

Exercice 3 : (3 *points*)

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1,5 **1.** *On considère l'événement A suivant :" tirer une boule blanche au moins".*

	et l'événement B suivant :" tirer deux boules de même couleur".
	Montrer que $p(A)=\dfrac{13}{28}$ *et* $p(B)=\dfrac{1}{4}$.
	2. *Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules blanches tirées.*
0,5	**a)** *Montrer que* $p(X=2)=\dfrac{1}{28}$.
1	**b)** *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique* $E(X)$.
	Problème : (11 *points*)
	I- *Soit g la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=e^x-2x$.
0,75	**1.** *Calculer* $g'(x)$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *puis en déduire que g est décroissante sur* $]-\infty,\ln 2]$ *et croissante sur* $[\ln 2,+\infty[$.
0,5	**2.** *Vérifier que* $g(\ln 2)=2(1-\ln 2)$ *puis déterminer le signe de* $g(\ln 2)$.
0,5	**3.** *En déduire que* $g(x)>0$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.
	II- *On considère la fonction numérique f définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\dfrac{x}{e^x-2x}$.
	et soit (C) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *(unité :1cm).*
1	**1. a)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$.
	(remarquer que $e^x-2x=x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)$ *pour tout x de* $\mathbb{R}^*$*)*
0,5	**b)** *Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats.*
0,75	**2. a)** *Montrer que* $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.
0,75	**b)** *Etudier le signe de* $f'(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur* $\mathbb{R}$.
0,25	**c)** *Montrer que* $y=x$ *est une équation de la droite* (T) *tangente à la courbe* (C) *au point O origine du repère.*
1	**3.** *Tracer, dans le même repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$*, la droite* (T) *et la courbe* (C).
	(on prendra $\dfrac{1}{e-2}\approx 1{,}4$ *et on admettra que la courbe* (C) *a deux points d'inflexion l'abscisse de l'un appartient à l'intervalle* $]0,1[$ *et l'abscisse de*

	l'autre est supérieur à $\frac{3}{2}$).
0,75	**4. a)** *Montrer que* $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$ *pour tout x de l'intervalle* $[0,+\infty[$.
0,75	**b)** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$.
0,5	**c)** *Soit, en* cm^2, $A(E)$ *l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C), *l'axe des abscisses et les deux droites d'équations* $x=0$ *et* $x=1$. *Montrer que :* $1-\frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$.
	III- *Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle* $]-\infty,0]$ *par :* $$h(x)=f(x).$$
0,5	**1.** *Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque* h^{-1} *définie sur un intervalle J que l'on précisera.*
0,5	**2.** *Tracer, dans le même repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$, *la courbe* $(C_{h^{-1}})$ *représentative de la fonction* h^{-1}.
	IV- *Soit* (u_n) *la suite numérique définie par :* $$u_0=-2 \text{ et } u_{n+1}=h(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$
0,5	**1.** *Montrer par récurrence que* $u_n \leq 0$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,75	**2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.* (*remarquer, graphiquement, que :* $h(x) \geq x$ *pour tout x de l'intervalle* $]-\infty,0]$).
0,75	**3.** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

	Exercice 1 : (3 *points*) *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :* $u_0 = 4$ *et* $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,5	**1.** *Montrer par récurrence que* $u_n < 5$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,75	**2.** *Vérifier que :* $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *et en déduire que la suite* (u_n) *est croissante.*
0,25	**3.** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*
	4. *Soit* (v_n) *la suite numérique telle que* $v_n = 5 - u_n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,75	**a)** *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{2}{5}$ *et exprimer* v_n *en fonction de n.*
0,75	**b)** *En déduire que* $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *puis calculer la limite de la suite* (u_n).
	Exercice 2 : (3 *points*) *On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *le plan* (P) *d'équation* $2x - z - 2 = 0$ *et la sphère* (S) *d'équation :* $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.
1	**1.** *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(-1,0,1)$ *et son rayon est* 3 .
0,5	**2. a)** *Calculer la distance du point* Ω *au plan* (P).
0,5	**b)** *En déduire que le plan* (P) *coupe la sphère* (S) *suivant un cercle* (Γ).
1	**3.** *Montrer que le rayon du cercle* (Γ) *est 2 et déterminer les coordonnées du point H centre du cercle* (Γ).
	Exercice 3 : (3 *points*)
0,75	**1. a)** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2 - 8z + 32 = 0$.
0,75	**b)** *On considère le nombre complexe a tel que :* $a = 4 + 4i$. *Ecrire le nombre complexe a sous sa forme trigonométrique puis en déduire que* a^{12} *est un nombre réel négatif.*
	2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, *les points A , B et C d'affixes respectives a, b et c tels que :*

$a = 4+4i$, $b = 2+3i$ *et* $c = 3+4i$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' *l'affixe du point* M' *image de M par la rotation R de centre C et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

0,5 **a)** *Montrer que :* $z' = iz + 7 + i$.

0,5 **b)** *Vérifier que d l'affixe du point D image du point A par la rotation R est* $3+5i$.

0,5 **c)** *Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tel que :* $|z-3-5i| = |z-4-4i|$ *est la droite* (BC).

Exercice 4 : (3 *points*)

Une urne contient 5 jetons : deux jetons blancs, deux verts et un rouge (les jetons sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et avec remise trois jetons de l'urne.

1 **1.** *Soit l'événement A :"les trois jetons tirés sont de même couleur ".*

Montrer que $p(A) = \frac{17}{125}$.

2 **2.** *Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de jeton (s) blanc (s) tirés.*
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 5 : (8 *points*)

I- *Soit g la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $g(x) = 1 - x + x\ln x$.

0,5 **1. a)** *Montrer que* $g'(x) = \ln x$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$.

0,5 **b)** *Montrer que la fonction g est décroissante sur* $]0,1]$ *et croissante sur* $[1,+\infty[$.

0,75 **2.** *Calculer* $g(1)$ *et en déduire que* $g(x) \geq 0$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$.

II- *On considère la fonction numérique f définie sur* $]0;+\infty[$ *par :*

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}.$$

et soit (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ (*unité* 1cm).

0,75 **1.** *Montrer que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ *et interpréter géométriquement ce résultat.*

(*pour calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; *remarquer que* $f(x) = \frac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2}$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$).

0,75 **2.** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ *et en déduire la branche infinie de la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$.

0,75	**3. a)** *Montrer que* $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$.
0,25	**b)** *Interpréter géométriquement le résultat* $f'(1)=0$.
0,5	**c)** *Montrer que la fonction f est croissante sur* $]0;+\infty[$.
0,75	**4.** *Tracer, dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$, *la courbe* (C).
	(*on admettra que la courbe* (C) *possède deux points d'inflexion tels que* 1 *est l'abscisse de l'un de ces deux points et l'abscisse de l'autre est comprise entre* 2 *et* 2,5 *et on prendra* $f(0,3)=0$).
0,5	**5. a)** *Montrer que* $\int_1^e \dfrac{2\ln x}{x}dx=1$.
0,75	**b)** *Calculer, en* cm^2, *l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C), *l'axe des abscisses et les deux droites d'équations* $x=1$ *et* $x=e$.
	6. *Soit h la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par:* $h(x)=3-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln(x^2)}{\lvert x\rvert}$.
0,75	**a)** *Montrer que la fonction h est paire et que* $h(x)=f(x)$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$.
0,5	**b)** *Tracer, dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$, *la courbe* (C') *représentant la fonction h.*

Exercice 1 : (2,5 *points*)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0,75 — **1.** *Vérifier que :* $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n - 3)}{2+(3-u_n)}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *puis montrer par récurrence que* $u_n < 3$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

2. *Soit* (v_n) *la suite numérique définie par :* $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3-u_n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

0,75 — **a)** *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$ *et en déduire que*

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0,5 — **b)** *Montrer que* $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1+v_n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *puis exprimer* u_n *en fonction de n.*

0,5 — **c)** *Déterminer la limite de la suite* (u_n).

Exercice 2 : (3 *points*)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, *les points* $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$ *et* $C(2,2,1)$ *et la sphère* (S) *d'équation :*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0.$$

0,5 — **1. a)** *Montrer que* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

0,5 — **b)** *En déduire que* $2x + 2y + z - 9 = 0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

0,5 — **2. a)** *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(1,-1,0)$ *et son rayon est* 6.

0,5 — **b)** *Montrer que* $d(\Omega,(ABC)) = 3$ *et en déduire que le plan* (ABC) *coupe la sphère* (S) *suivant un cercle* (Γ).

0,5 — **3. a)** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par le point* Ω *et orthogonale au plan* (ABC).

0,5 — **b)** *Montrer que le centre du cercle* (Γ) *est le point B.*

Exercice 3 : (3 *points*)

0,75 — **1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$z^2 - 4z + 29 = 0.$$

	2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$*, les points* Ω*, A et B d'affixes respectives* ω*, a et b tels que :* $\omega=2+5i$, $a=5+2i$ *et* $b=5+8i$.
0,75	**a)** *Soit u le nombre complexe tel que :* $u=b-\omega$. *Vérifier que* $u=3+3i$ *puis montrer que* $\arg u\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.
0,25	**b)** *Déterminer un argument du nombre complexe* $\overline{u}$. ($\overline{u}$ *désigne le conjugué du nombre complexe u*)
0,75	**c)** *Vérifier que* $a-\omega=\overline{u}$ *puis en déduire que :* $\Omega A=\Omega B$ *et* $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
0,5	**d)** *On considère la rotation R de centre* Ω *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$. *Déterminer l'image du point A par la rotation R.*
	Exercice 4 : (3 *points*) *Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher). On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.*
1	**1.** *Soit l'événement A :" les deux boules tirées sont rouges". Montrer que* $p(A)=\frac{2}{15}$.
	2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne.*
0,5	**a)** *Montrer que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est* $\{2,3,4\}$.
1,5	**b)** *Montrer que* $p(X=3)=\frac{8}{15}$ *puis déterminer la loi de probabilité de X.*
	Problème : (8,5 *points*) *On considère la fonction numérique f définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$. *et soit* (C_f) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ *(unité :1cm).*
0,25	**I) 1. a)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.
0,5	**b)** *Montrer que la droite* (D) *d'équation* $y=2x-2$ *est une asymptote à la courbe* (C_f) *au voisinage de* $-\infty$.

0,5	**2. a)** *Montrer que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
0,5	**b)** *Montrer que* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ *et interpréter géométriquement le résultat.*
0,5	**3. a)** *Montrer que* $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$.
0,25	**b)** *Dresser le tableau de variations de la fonction* f *sur* $\mathbb{R}$. (*remarquer que* $f'(0) = 0$).
0,75	**c)** *Montrer qu'il existe un unique réel* α *de l'intervalle* $]1, \ln 4[$ *tel que :* $f(\alpha) = 0$.
0,5	**4. a)** *Montrer que la courbe* (C_f) *est au-dessus de la droite* (D) *sur l'intervalle* $]\ln 4, +\infty[$ *et qu'elle est en-dessous de la droite* (D) *sur l'intervalle* $]-\infty, \ln 4[$.
0,5	**b)** *Montrer que la courbe* (C_f) *admet un seul point d'inflexion de coordonnées* $(0, -5)$.
0,75	**c)** *Tracer la droite* (D) *et la courbe* (C_f) *dans le même repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (*on prendra* $\ln 4 \approx 1,4$ *et* $\alpha \approx 1,3$).
0,5	**5. a)** *Montrer que* $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x)\,dx = -\dfrac{9}{2}$.
0,5	**b)** *Calculer, en* cm^2*, l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C_f)*, la droite* (D)*, l'axe des ordonnées et la droite d'équation* $x = \ln 4$.
0,5	**II) 1. a)** *Résoudre l'équation différentielle* $(E): y'' - 3y' + 2y = 0$.
0,5	**b)** *Déterminer la solution* g *de l'équation* (E) *qui vérifie les deux conditions :* $g(0) = -3$ *et* $g'(0) = -2$.
	2. *Soit* h *la fonction numérique définie sur l'intervalle* $]\ln 4, +\infty[$ *par :* $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$.
0,75	**a)** *Montrer que la fonction* h *admet une fonction réciproque* h^{-1} *et que* h^{-1} *est définie sur* $\mathbb{R}$.
0,75	**b)** *Vérifier que* $h(\ln 5) = \ln 5$ *puis déterminer* $(h^{-1})'(\ln 5)$.

	Exercice 1 : (3 *points*) *On considère la suite numérique (u_n) définie par :* $$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$
0,5	**1.a)** *Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.*
0,5	**b)** *Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.*
0,25	**c)** *En déduire que la suite (u_n) est convergente.*
	2. *Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = u_n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.*
1	**a)** *Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$ et exprimer v_n en fonction de n.*
0,75	**b)** *Montrer que $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis déterminer la limite de la suite (u_n).*
	Exercice 2 : (3 *points*) *On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les deux points $A(1,3,4)$ et $B(0,1,2)$.*
0,5	**1. a)** *Montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.*
0,5	**b)** *Montrer que $2x + 2y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).*
0,5	**2.** *Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0$.* *Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(3,-3,3)$ et son rayon est 5.*
0,75	**3. a)** *Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S).*
0,75	**b)** *Déterminer les coordonnées de H point de contact du plan (OAB) et la sphère (S).*
	Exercice 3 : (3 *points*)
0,75	**1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :* $$z^2 - 8z + 41 = 0.$$
	2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω tels que :* $$a = 4 + 5i,\ b = 3 + 4i,\ c = 6 + 7i \text{ et } \omega = 4 + 7i.$$

0,75 **a)** *Calculer* $\dfrac{c-b}{a-b}$ *et en déduire que les points A, B et C sont alignés.*

0,75 **b)** *Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle* $-\dfrac{\pi}{2}$.

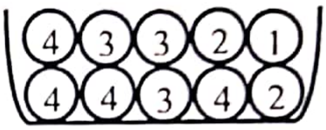
Montrer que : $z' = -iz - 3 + 11i$.

0,75 **c)** *Déterminer l'image du point C par la rotation R puis donner une forme trigonométrique du nombre* $\dfrac{a-\omega}{c-\omega}$.

Exercice 4 : (3 *points*)

Une urne contient 10 *boules portant les nombres :* 1 , 2 , 2 , 3 , 3 , 3 4 , 4 , 4 , 4.
(les boules sont indiscernables au toucher).

On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.



1 **1.** *Soit l'événement A :" les deux boules tirées portent deux nombres pairs".*

Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{3}$.

2 **2.** *On répète l'épreuve précédente trois fois en remettant à chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.*

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé.

Montrer que $p(X=1) = \dfrac{4}{9}$ *puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*

Problème : (8 *points*)

I - *Soit g la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $g(x) = \dfrac{2}{x} - 1 + 2\ln x$.

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g sur $]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

0,25 **1.** *Calculer* $g(1)$.

0,75 **2.** *Déduire à partir du tableau que :*

$$g(x) > 0 \text{ pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[.$$

II - *On considère la fonction numérique f définie sur* $]0;+\infty[$ *par :*

$$f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x .$$

et soit (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé*

	$(O;\vec{i};\vec{j})$ (*unité 2cm*).
0,75	**1.** *Montrer que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ *et donner une interprétation géométrique à ce résultat.*
0,5	**2. a)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (*pour calculer cette limite on pourra écrire* $f(x)$ *sous forme* $f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$).
0,5	**b)** *Montrer que la courbe* (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de* $+\infty$.
0,75	**3. a)** *Montrer que* $f'(x) = g(x)$ *pour tout* x *de* $]0;+\infty[$.
0,75	**b)** *En déduire que la fonction* f *est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$ *et dresser le tableau de variations de la fonction* f *sur* $]0;+\infty[$.
0,5	**4. a)** *Montrer que* $I(1,0)$ *est un point d'inflexion de la courbe* (C).
0,25	**b)** *Montrer que* $y = x - 1$ *est une équation cartésienne de la droite* (T) *tangente à la courbe* (C) *au point I.*
0,75	**c)** *Tracer dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *la droite* (T) *et la courbe* (C)
0,5	**5. a)** *Montrer que* $\int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)dx = \frac{7}{4}$.
0,75	**b)** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $$\int_1^2 (x+1)\ln x\, dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}.$$
0,5	**c)** *Calculer, en* cm^2, *l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C), *l'axe des abscisses et les deux droites d'équations* $x = 1$ *et* $x = 2$.
0,5	**6.** *Résoudre graphiquement l'inéquation :* $(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$, $x \in]0,+\infty[$.

Exercice 1 : (3 *points*)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, *on considère le plan* (P) *passant par le point* $A(0,1,1)$ *et dont* $\vec{u}(1,0,-1)$ *est un vecteur normal et la sphère* (S) *de centre le point* $\Omega(0,1,-1)$ *et de rayon* $\sqrt{2}$.

0,5 **1.a)** *Montrer que* $x-z+1=0$ *est une équation cartésienne du plan* (P).

0,75 **b)** *Montrer que le plan* (P) *est tangent à la sphère* (S) *et vérifier que* $B(-1,1,0)$ *est le point de contact.*

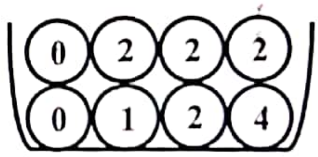
0,25 **2.a)** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par le point* A *et orthogonale au plan* (P).

0,75 **b)** *Montrer que la droite* (Δ) *est tangente à la sphère* (S) *au point* $C(1,1,0)$.

0,75 **3.** *Montrer que* $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ *et en déduire l'aire du triangle OCB.*

Exercice 2 : (3 *points*)

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre comme indiqué sur la figure ci-contre.



On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1,5 **1.** *Soit A l'événement :*

« *Parmi les trois boules tirées, aucune ne porte le nombre* 0»

et B l'événement :

« *Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égale à* 8»

Montrer que $p(A)=\frac{5}{14}$ *et que* $p(B)=\frac{1}{7}$.

2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.*

0,5 **a)** *Montrer que* $p(X=16)=\frac{3}{28}$

1 **b)** *Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\frac{3}{28}$

Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

Exercice 3 : (3 *points*)

On considère les nombres complexes a et b tels que :

$$a=\sqrt{3}+i \text{ et } b=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i.$$

0,25 **1.a)** *Vérifier que* $b=(1+i)a$.

0,5 **b)** *En déduire que* $|b|=2\sqrt{2}$ *et que* $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

0,5 — **c)** *Déduire de ce qui précède que* $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2. *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c telle que : $c=-1+i\sqrt{3}$.

0,75 — **a)** *Vérifier que* $c=ia$ *et en déduire que* $OA=OC$ *et que* $\left(\overline{\overrightarrow{OA}},\overline{\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

0,5 — **b)** *Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur* $\overrightarrow{OC}$.

0,5 — **c)** *En déduire que le quadrilatère OABC est un carré.*

Problème : (11 *points*)

I) *Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *par :*

$$g(x)=x^2+x-2+2\ln x .$$

0,25 — **1.** *Vérifier que:* $g(1)=0$.

1 — **2.** *A partir du tableau de variations de la fonction g ci-contre :*
Montrer que $g(x)\leq 0$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $]0,1]$ *et que* $g(x)\geq 0$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $[1,+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

II) *On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *par :*

$$f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x .$$

Soit (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité : 1cm).*

0,5 — **1.** *Montrer que :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ *et interpréter géométriquement le résultat.*

0,25 — **2.a)** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

0,75 — **b)** *Montrer que la courbe* (C) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite* (D) *d'équation* $y=x$.

1 — **3.a)** *Montrer que :* $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $]0,+\infty[$.

0,75 — **b)** *Montrer que f est décroissante sur l'intervalle* $]0,1]$ *et croissante sur l'intervalle* $[1,+\infty[$.

0,25	**c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle* $]0,+\infty[$.
0,5	**4.a)** *Résoudre dans l'intervalle* $]0,+\infty[$ *l'équation :* $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0$.
0,5	**b)** *En déduire que la courbe* (C) *coupe la droite* (D) *en deux points dont on déterminera les coordonnées.*
0,75	**c)** *Montrer que* $f(x)\leq x$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $[1,2]$ *et en déduire la position relative de la courbe* (C) *et la droite* (D) *sur l'intervalle* $[1,2]$.
1	**5.** *Construire, dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$, *la droite* (D) *et la courbe* (C) *(on admettra que la courbe* (C) *possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2,4 et 2,5).*
0,5	**6.a)** *Montrer que :* $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$.
0,25	**b)** *Montrer que la fonction* $H:x\mapsto 2\ln x-x$ *est une fonction primitive de la fonction* $h:x\mapsto \frac{2}{x}-1$ *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$.
0,5	**c)** *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :* $$\int_1^2\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x\,dx=(1-\ln 2)^2.$$
0,5	**d)** *Calculer, en* cm^2, *l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C), *la droite* (D) *et les droites d'équations* $x=1$ *et* $x=2$.
	III) *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :* $$u_0=\sqrt{3}\ \text{et}\ u_{n+1}=f(u_n)\ \text{pour tout entier naturel } n.$$
0,5	**1.** *Montrer par récurrence que :* $1\leq u_n\leq 2$ *pour tout entier naturel n.*
0,5	**2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question* **II) 4. c)**).
0,75	**3.** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 1 : (3 *points*)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère la sphère (S) *d'équation :* $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$
et le plan (P) *d'équation :* $y-z=0$.

0,5 **1.a)** *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(1,1,1)$ *et son rayon est* 2.

0,5 **b)** *Calculer* $d\left(\Omega,(P)\right)$ *et en déduire que le plan* (P) *coupe la sphère* (S) *suivant un cercle* (C).

0,5 **c)** *Déterminer le centre et le rayon du cercle* (C).

2. *Soit* (Δ) *la droite passant par le point* $A(1,-2,2)$ *et orthogonale au plan* (P).

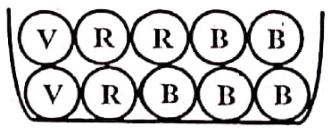
0,25 **a)** *Montrer que* $\vec{u}(0,1,-1)$ *est un vecteur directeur de la droite* (Δ).

0,75 **b)** *Montrer que* $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{2}\left\|\vec{u}\right\|$ *et en déduire que la droite* (Δ) *coupe la sphère* (S) *en deux points.*

0,5 **c)** *Déterminer les coordonnées de chacun des deux points de contact de la droite* (Δ) *et la sphère* (S).

Exercice 2 : (3 *points*)

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher : cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules vertes (voir figure ci-contre).



On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1,5 **1.** *Soit A l'événement :*

" *Parmi les quatre boules tirées, il y'a une seule boule verte seulement* ".

et B l'événement :

"*Parmi les quatre boules tirées, il y'a exactement trois boules de même couleur*".

Montrer que $p(A)=\dfrac{8}{15}$ *et que* $p(B)=\dfrac{19}{70}$.

2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.*

0,5 **a)** *Montrer que* $p(X=2)=\dfrac{2}{15}$.

1 **b)** *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique est égale à* $\dfrac{4}{5}$.

Exercice 3 : (3 *points*)

0,75 **1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$z^2+4z+8=0.$$

2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que:*

$$a=-2+2i\ ,b=4-4i\ et\ c=4+8i\ .$$

0,5 **a)** *Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que : $z'=-iz-4$.*

0,75 **b)** *Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC.*

3. *Soit ω l'affixe du point Ω milieu du segment $[BC]$.*

0,5 **a)** *Montrer que $|c-\omega|=6$.*

0,5 **b)** *Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z-\omega|=6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.*

Exercice 4 : (2,5 *points*)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=17\ \ et\ u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+12\ pour\ tout\ entier\ naturel\ n.$$

0,5 **1.a)** *Montrer par récurrence que : $u_n>16$ pour tout entier naturel n.*

0,5 **b)** *Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.*

2. *Soit (v_n) la suite numérique tel que : $v_n=u_n-16$ pour tout entier naturel n.*

0,5 **a)** *Montrer que (v_n) est une suite géométrique.*

0,5 **b)** *En déduire que $u_n=16+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel n puis déterminer la limite de la suite (u_n).*

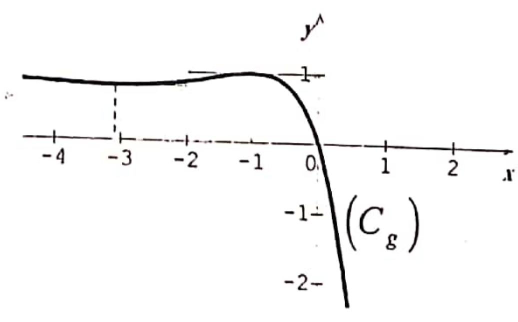
0,5 **c)** *Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n<16{,}001$.*

Problème : (8,5 *points*)

I) *Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-(x+1)^2e^x$.*

0,25 **1.** *Vérifier que : $g(0)=0$.*

1 **2.** *A partir de la représentation graphique de la fonction g (voir figure ci-contre) Montrer que $g(x)\geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty,0]$ et que*



	$g(x) \leq 0$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $[0,+\infty[$.
	II) *On considère la fonction numérique f définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $$f(x) = x+1-(x^2+1)e^x.$$ *Soit* (C_f) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité : 2cm).*
0,75	**1.a)** *Vérifier que :* $f(x) = x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ *pour tout réel x puis en déduire que* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
0,5	**b)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ *et en déduire que la droite* (D) *d'équation* $y = x+1$ *est une asymptote à la courbe* (C_f) *au voisinage de* $-\infty$.
0,25	**c)** *Montrer que la courbe* (C_f) *est au-dessous de la droite* (D).
0,5	**2.a)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (*on pourra écrire* $f(x)$ *sous la forme* $x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$)
0,25	**b)** *Montrer que la courbe* (C_f) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche parabolique dont on précisera la direction.*
0,75	**3.a)** *Montrer que* $f'(x) = g(x)$ *pour tout réel x.*
0,75	**b)** *Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle* $]-\infty,0]$ *et décroissante sur l'intervalle* $[0,+\infty[$ *et dresser le tableau de variations de la fonction f sur* $\mathbb{R}$.
0,75	**c)** *Montrer que la courbe* (C_f) *possède un deux points d'inflexion d'abscisses* -3 *et* -1.
1	**4.** *Construire, dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$, *la droite* (D) *et la courbe* (C_f). (*on prendra* $f(-3) \approx -2,5$ *et* $f(-1) \approx -0,7$)
0,5	**5.a)** *Vérifier que la fonction* $H : x \mapsto (x-1)e^x$ *est une fonction primitive de la fonction* $h : x \mapsto xe^x$ *sur* $\mathbb{R}$ *puis montrer que :* $\int_{-1}^{0} xe^x\,dx = \frac{2}{e}-1$.
0,75	**b)** *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :* $$\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx = 3\left(1-\frac{2}{e}\right).$$
0,5	**c)** *Calculer, en* cm^2, *l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C_f), *la droite* (D), *l'axe des abscisses et la droite d'équation* $x = -1$.

Exercice 1 : (3 *points*)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, *on considère les points* $A(0;-2;-2)$, $B(1;-2;-4)$ *et* $C(-3;-1;2)$.

1 — **1.** *Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ *et en déduire que* $2x+2y+z+6=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

0,5 — **2.** *On considère la sphère* (S) *dont une équation est :*

$$x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0.$$

Vérifier que la sphère (S) *a pour centre* $\Omega(1;0;1)$ *et pour rayon* $R=5$.

0,25 — **3. a)** *Vérifier que* $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par le point* Ω *et orthogonale au plan* (ABC).

0,5 — **b)** *Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite* (Δ) *et du plan* (ABC).

0,75 — **4.** *Vérifier que* $d(\Omega;(ABC))=3$, *puis montrer que le plan* (ABC) *coupe la sphère* (S) *selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.*

Exercice 2 : (3 *points*)

0,75 — **1.** *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation :*

$$2z^2+2z+5=0.$$

2. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, *on considère la rotation R de centre O et d'angle* $\frac{2\pi}{3}$.

0,25 — **a)** *Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe* $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

0,5 — **b)** *On considère le point A d'affixe* $a=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ *et le point B image du point A par la rotation R. Soit b l'affixe du point B.*
Montrer que $b=d\cdot a$.

3. *Soit t la translation de vecteur* $\overrightarrow{OA}$ *et C l'image de B par la translation t et c l'affixe de C.*

0,75 — **a)** *Vérifier que* $c=b+a$ *et en déduire que* $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

(*on pourra utiliser la question* **2.b)**)

0,75 **b)** *Déterminer* $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ *puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral.*

Exercice 3 : (3 *points*)

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : __cinq boules rouges__ portant les nombres 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 et __quatre boules blanches__ portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 2.

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

Soient les événements :

A :" les trois boules tirées sont de même couleur "

B :" les trois boules tirées portent le même nombre "

C :" les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre "

1,5 **1.** *Montrer que* $p(A)=\frac{1}{6}$, $p(B)=\frac{1}{4}$ *et* $p(C)=\frac{1}{42}$.

2. *On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A.*

0,5 **a)** *Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale X.*

1 **b)** *Montrer que* $p(X=1)=\frac{25}{72}$ *et calculer* $p(X=2)$.

Problème : (11 *points*)

I) *Soit g la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=e^x-x^2+3x-1$.

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

0,25 **1.** *Vérifier que :* $g(0)=0$.

0,5 **2.** *Déterminer le signe de* $g(x)$ *sur chacun des intervalles* $]-\infty;0]$ *et* $[0;+\infty[$.

II) *Soit f la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=(x^2-x)e^{-x}+x$.

et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité : 1 cm).*

0,5 **1. a)** *Vérifier que* $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *puis montrer que* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

0,75 **b)** *Calculer* $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ *puis en déduire que* (C) *admet une asymptote* (D) *au voisinage de* $+\infty$ *d'équation* $y=x$.

0,5	**c)** *Vérifier que* $f(x)=\dfrac{x^2-x+xe^x}{e^x}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *puis calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
0,5	**d)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ *et interpréter le résultat géométriquement.*
0,25	**2. a)** *Montrer que* $f(x)-x$ *et* x^2-x *ont le même signe pour tout x de* $\mathbb{R}$.
0,5	**b)** *En déduire que* (C) *est au-dessus de* (D) *sur chacun des intervalles* $]-\infty;0]$ *et* $[1;+\infty[$, *et en dessous de* (D) *sur l'intervalle* $[0;1]$.
0,75	**3. a)** *Montrer que* $f'(x)=g(x)e^{-x}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.
0,5	**b)** *En déduire que la fonction f est décroissante sur* $]-\infty;0]$ *et croissante sur* $[0;+\infty[$.
0,25	**c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*
0,25	**4. a)** *Vérifier que* $f''(x)=(x^2-5x+4)e^{-x}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.
0,5	**b)** *En déduire que la courbe* (C) *admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives* 1 *et* 4.
1	**5.** *Construire* (D) *et* (C) *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.*(on prend :* $f(4)\simeq 4.2$*)*
0,5	**6. a)** *Montrer que la fonction* $H: x\mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ *est une primitive de la fonction* $h: x\mapsto -x^2e^{-x}$ *sur* $\mathbb{R}$ *puis en déduire que* $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx=\dfrac{2e-5}{e}$.
0,75	**b)** *A l'aide d'une intégration par parties montrer que* $\int_0^1 xe^{-x}\,dx=\dfrac{e-2}{e}$.
0,75	**c)** *Calculer en* cm^2 *l'aire du domaine plan limité par* (C) *et* (D) *et les droites d'équations* $x=0$ *et* $x=1$.
	III) *Soit* (u_n) *la suite numérique définie par :* $u_0=\dfrac{1}{2}$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,75	**1.** *Montrer que* $0\le u_n\le 1$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$. *(on pourra utiliser le résultat de la question* **II) 3. b)***)*
0,5	**2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*
0,75	**3.** *En déduire que* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 1 : (3 *points*)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, *on considère la sphère* (S) *de centre* $\Omega(2;1;2)$ *et de rayon égale à 3 et le plan* (P) *passant par le point* $A(-1;0;3)$ *et* $\vec{u}(4;0;-3)$ *est un vecteur normal à* (P).

0,5 — **1.** *Montrer que* $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ *est une équation cartésienne de la sphère* (S).

0,5 — **2.** *Vérifier que* $4x-3z+13=0$ *est une équation cartésienne du plan* (P).

0,5 — **3. a)** *Vérifier que* $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1 \\ z=2-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par* Ω *et orthogonale à* (P).

0,5 — **b)** *Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite* (Δ) *et du plan* (P).

0,25 — **4. a)** *Calculer* $d(\Omega;(P))$.

0,75 — **b)** *Montrer que le plan* (P) *est tangent à la sphère* (S) *en un point que l'on déterminera.*

Exercice 2 : (3 *points*)

0,75 — **1.** *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation :*

$$z^2-2\sqrt{2}z+4=0.$$

2. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, *on considère le point A d'affixe* $a=\sqrt{2}(1-i)$ *et la rotation R de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{3}$.

0,25 — **a)** *Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe a.*

0,5 — **b)** *Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est :*

$$b=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

0,5 — **3. a)** *On considère le point C d'affixe* $c=1+i$.
Montrer que $b^2-c^2=2\sqrt{3}$.

0,5 — **b)** *Soit t la translation de vecteur* $\overrightarrow{OC}$ *et D l'image de B par la translation t.*
Montrer que $OD=|b+c|$.

0,5 — **c)** *En déduire que* $OD\times BC=2\sqrt{3}$.

Exercice 3 : (3 *points*)

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges portant chacune le nombre 1, 3 boules rouges portant chacune le nombre 2 et 6 boules vertes portant chacune le nombre 2.

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne, et on considère les événements suivants :

A :" les deux boules tirées portent le même nombre "

B :" les deux boules tirées sont de couleurs différentes "

C :" les deux boules tirées portent deux nombres dont la somme est égale à 3 "

1,5 **1.** *Montrer que* $p(A)=\frac{13}{22}$ *et* $p(B)=\frac{6}{11}$ *puis calculer* $p(C)$.

0,5 **2. a)** *Montrer que* $p(A\cap B)=\frac{3}{11}$.

0,5 **b)** *Les deux événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.*

0,5 **3.** *Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité de tirer deux boules portant le même nombre.*

Exercice 4 : (2 *points*)

0,5 **1. a)** *Montrer que la fonction* $H : x \mapsto xe^x$ *est une primitive de la fonction* $h : x \mapsto (x+1)e^x$ *sur* $\mathbb{R}$.

0,5 **b)** *En déduire que* $\int_0^1 (x+1)e^x\,dx = e$.

1 **2.** *A l'aide d'une intégration par parties calculer* $\int_0^1 (x^2+2x-1)e^x\,dx$.

Problème : (9 *points*)

I) *Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle* $]0;+\infty[$ *par :*

$$g(x)=x^3-1-2\ln^2 x+2\ln x.$$

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

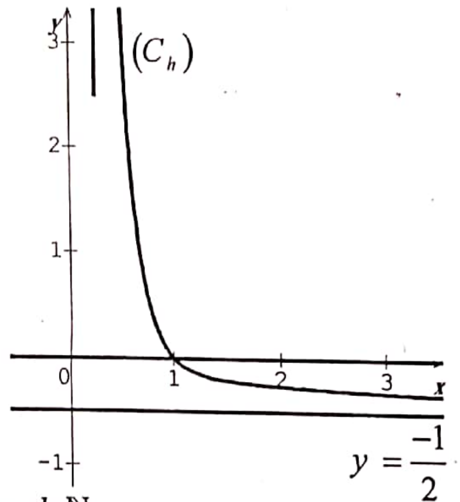
0,25 **1.** *Calculer :* $g(1)$.

0,5 **2.** *Déterminer, à partir de ce tableau, le signe de* $g(x)$ *sur chacun des intervalles* $]0;1]$ *et* $[1;+\infty[$.

II) *On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle* $]0;+\infty[$ *par :*

$$f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2.$$

et soit (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,5	**1. a)** *Vérifier que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
0,5	**b)** *Montrer que la droite* (D) *d'équation* $y=x-\frac{1}{2}$ *est une asymptote à la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$.
0,25	**c)** *Déterminer la position relative de la droite* (D) *et la courbe* (C).
0,75	**2.** *Montrer que* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$ *et interpréter le résultat géométriquement.*
1	**3. a)** *Montrer que* $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ *pour tout* x *de l'intervalle* $]0;+\infty[$.
0,5	**b)** *Montrer que la fonction* f *est décroissante sur l'intervalle* $]0;1]$ *et croissante sur l'intervalle* $[1;+\infty[$.
0,5	**c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction* f *sur l'intervalle* $]0;+\infty[$.
1	**4.** *Construire dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *la droite* (D) *et la courbe* (C) *(unité : 1 cm)*
	III) *On considère la fonction numérique* h *définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $$h(x)=f(x)-x.$$
0,25	**1. a)** *Vérifier que* $h(1)=0$.
0,75	**b)** *Dans la figure ci-contre,* (C_h) *est la représentation graphique de la fonction h.* *Déterminer le signe de* $h(x)$ *sur chacun des intervalles* $]0;1]$ *et* $[1;+\infty[$ *puis en déduire que :* $f(x)\leq x$ *pour tout* x *de l'intervalle* $[1;+\infty[$.
	
	2. *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :* $u_0=e$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,75	**a)** *Montrer par récurrence que* $1\leq u_n\leq e$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,75	**b)** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.* (*on pourra utiliser le résultat de la question* **III) 1. b)**)
0,75	**3.** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

	Exercice 1 : (3 *points*)
	Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, *on considère les points* $A(1;-1;-1)$, $B(0;-2;1)$ *et* $C(1;-2;0)$.
0,75	**1.a)** *Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.
0,5	**b)** *En déduire que* $x+y+z+1=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).
0,75	**2.** *Soit* (S) *la sphère d'équation :* $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$. *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est* $\Omega(2;-1;1)$ *et que son rayon est* $R=\sqrt{5}$.
0,5	**3. a)** *Calculer* $d(\Omega;(ABC))$ *la distance du point* Ω *au plan* (ABC).
0,5	**b)** *En déduire que le plan* (ABC) *coupe la sphère* (S) *selon un cercle* (Γ). *(la détermination du centre et du rayon de* (Γ) *n'est pas demandée)*
	Exercice 2 : (3 *points*)
0,75	**1.** *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation :* $z^2-2z+4=0$.
	2. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, *on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :* $a=1-i\sqrt{3}$, $b=2+2i$, $c=\sqrt{3}+i$ *et* $d=-2+2\sqrt{3}i$.
0,5	**a)** *Vérifier que :* $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$.
0,25	**b)** *En déduire que les points A, C et D sont alignés.*
0,5	**3.** *On considère z l'affixe d'un point M et* z' *l'affixe de* M' *image de M par la rotation R de centre O et d'angle* $\frac{-\pi}{3}$. *Vérifier que :* $z'=\frac{1}{2}az$.
	4. *Soient H l'image du point B par la rotation R, h son affixe et P le point d'affixe p tel que* $p=a-c$.
0,5	**a)** *Vérifier que :* $h=ip$.
0,5	**b)** *Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.*
	Exercice 3 : (3 *points*)
	Une urne contient dix boules : trois boules vertes, six boules rouges et une boule noire indiscernables au toucher. *On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.* *On considère les événements suivants :* *A : « Obtenir trois boules vertes. »*

	B : « *Obtenir trois boules de même couleur.* » C : « *Obtenir au moins deux boules de même couleur.* »
2	**1.** *Montrer que* $p(A)=\frac{1}{120}$ *et* $p(B)=\frac{7}{40}$.
1	**2.** *Calculer* $p(C)$.
	Problème : (11 *points*) **Première partie :** *Soit f la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$. *et* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité:1 cm).*
0,5	**1.** *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} f(x)$ *puis interpréter le résultat géométriquement.*
0,25	**2. a)** *Vérifier que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$.
0,5	**b)** *En déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
0,5	**c)** *Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ *puis en déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$.
0,75	**d)** *Montrer que* (C) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche parabolique de direction asymptotique la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$.
0,5	**3. a)** *Vérifier que pour tout x de* $]0;1]:(x-1)+\ln x\leq 0$ *et que pour tout x de* $[1;+\infty[:(x-1)+\ln x\geq 0$.
1	**b)** *Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$.
0,5	**c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*
0,5	**4. a)** *Montrer que* $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$.
0,5	**b)** *En déduire que* (C) *admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.*
0,5	**5. a)** *Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ *et déduire la position relative de* (C) *et* (Δ).

1	**b)** *Construire* (Δ) *et* (C) *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,5	**6. a)** *Montrer que la fonction* $H: x \mapsto x\ln x - x$ *est une primitive de la fonction* $h: x \mapsto \ln x$ *sur* $]0;+\infty[$.
0,75	**b)** *A l'aide d'une intégration par parties montrer que* $\int_1^e (\ln x)^2\,dx = e-2$.
0,5	**c)** *Calculer en* cm^2 *l'aire du domaine plan limité par* (C) *et* (Δ) *et les droites d'équations* $x=1$ *et* $x=e$.
	Deuxième partie :
	Soit (u_n) *la suite numérique définie par :* $u_0=1$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,5	**1.a)** *Montrer par récurrence que* $1\le u_n \le e$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,5	**b)** *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*
0,5	**c)** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente .*
0,75	**2.** *Calculer la limite de la suite* (u_n).

Exercice 1 : (3 *points*)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, *on considère les points* $A(1;2;2)$, $B(3;-1;6)$ *et* $C(1;1;3)$.

0,75 — **1.a)** *Vérifier que* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

0,5 — **b)** *En déduire que* $x - 2y - 2z + 7 = 0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

0,75 — **2.** *Soient les points* $E(5;1;4)$ *et* $F(-1;1;12)$ *et* (S) *l'ensemble des points* M *vérifiant :* $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$.
Montrer que (S) *est la sphère de centre* $\Omega(2;1;8)$ *et de rayon* $R = 5$.

0,5 — **3. a)** *Calculer* $d(\Omega;(ABC))$ *distance du point* Ω *au plan* (ABC).

0,5 — **b)** *En déduire que le plan* (ABC) *coupe la sphère* (S) *selon un cercle* (Γ) *de rayon* $r = 4$.

Exercice 2 : (3 *points*)

0,75 — **1.a)** *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation :*

$$z^2 - 3z + 3 = 0.$$

0,5 — **b)** *On pose :* $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; *écrire a sous forme trigonométrique.*

0,5 — **2.** *On considère le nombre complexe* $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; *vérifier que :* $b^2 = i$.

0,5 — **3.** *On pose :* $h = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$; *montrer que :* $h^4 + 1 = a$.

4. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, *on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

0,5 — **a)** *Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R.*
Montrer que : $c = ib$.

0,25 — **b)** *En déduire la nature du triangle OBC.*

Exercice 3 : (3 *points*)

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne.
Soient les événements suivants :

A : " les trois boules tirées sont de même couleur."
B : " il n'y a aucune boule blanche parmi les boules tirées."
C : " il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées."

2	**1.** *Montrer que* $p(A)=\frac{1}{6}$ *et* $p(B)=\frac{8}{27}$.
1	**2.** *Calculer* $p(C)$.
	Problème : (11 *points*) X **Première partie :** *Soit f la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $f(x)=2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$. *et* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité:1 cm).*
0,5	**1.a)** *Vérifier que* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ *et interpréter le résultat géométriquement.*
0,5	**b)** *Vérifier que* $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ *et interpréter le résultat géométriquement.*
0,5	**2.a)** *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
0,5	**b)** *Montrer que la courbe* (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de* $+\infty$.
0,75	**3.a)** *Montrer que :* $f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}^*$.
0,25	**b)** *Vérifier que pour tout x de* $\mathbb{R}$, $x^2-2x+4>0$.
0,75	**c)** *Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur* $]0;2[$ *et strictement croissante sur chacun des intervalles* $]-\infty;0[$ *et* $[2;+\infty[$.
0,5	**d)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f sur* $\mathbb{R}^*$.
1	**4.** *Construire la courbe* (C) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,5	**5.a)** *Vérifier que la fonction* $H:x\mapsto\frac{1}{x}e^{x-4}$ *est une fonction primitive de la fonction* $h:x\mapsto\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ *sur* $[2;4]$.
0,25	**b)** *Vérifier que* $f(x)=2+8e^{x-4}-32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}^*$.
0,5	**c)** *Calculer l'intégrale* $\int_2^4 e^{x-4}\,dx$.
0,75	**d)** *Calculer en* cm^2 *l'aire du domaine plan limité par* (C), *l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=2$ *et* $x=4$.
	Deuxième partie : **1.** *On considère la fonction numérique g définie sur* $[2;4]$ *par :* $g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2$.

0,25	**a)** *Calculer* $g(4)$.
0,5	**b)** *Vérifier que pour tout x de l'intervalle* $[2;4]$,
	$$g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2\left(e^{x-4}-1\right).$$
0,5	**c)** *Vérifier que pour tout x de l'intervalle* $[2;4]$, $e^{x-4}-1\leq 0$
	puis en déduire que pour tout x de l'intervalle $[2;4]$, $g(x)\leq 0$.
0,5	**2.a)** *Vérifier que pour tout x de l'intervalle* $[2;4]$, $f(x)-x=\left(\dfrac{x-2}{x}\right)g(x)$.
0,25	**b)** *En déduire que pour tout x de l'intervalle* $[2;4]$, $f(x)\leq x$.
	3. *Soit* (u_n) *la suite numérique définie par :*
	$$u_0=3 \text{ et } u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$
0,5	**a)** *Montrer par récurrence que* $2\leq u_n\leq 4$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,5	**b)** *Déterminer la monotonie de la suite* (u_n) *et en déduire qu'elle est convergente.*
0,75	**c)** *Calculer la limite de la suite* (u_n).

Exercice 1 : (4 points)

Soit (u_n) **la suite numérique définie par :** $u_0 = \dfrac{3}{2}$ **et** $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2u_n+5}$ **pour tout** n **de** $I\!N$

0.25 **1) Calculer** u_1

0.5 **2) Montrer par récurrence que pour tout** n **de** $I\!N$**,** $u_n > 0$

1 **3)a) Montrer que pour tout** n **de** $I\!N$**,** $0 < u_{n+1} \le \dfrac{2}{5}u_n$

puis en déduire que pour tout n **de** $I\!N$**,** $0 < u_n \le \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

0.5 **b) Calculer** $\lim u_n$

4) On considère la suite numérique (v_n) **définie par** $v_n = \dfrac{4u_n}{2u_n+3}$ **pour tout** n **de** $I\!N$**.**

0.75 **a) Montrer que** (v_n) **est une suite géométrique de raison** $\dfrac{2}{5}$

1 **b) Déterminer** v_n **en fonction de** n **et en déduire** u_n **en fonction de** n **pour tout** n **de** $I\!N$**.**

Exercice 2 : (5 points)

1) Dans l'ensemble □ des nombres complexes, on considère l'équation :

$(E)\ :\ z^2 - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)z + 16 = 0$

0.5 **a) Vérifier que le discriminant de l'équation** (E) **est** $\Delta = -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

1 **b) En déduire les solutions de l'équation** (E) **.**

2) Soient les nombres complexes $a = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$**,** $b = 1 + i\sqrt{3}$ **et** $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

0.75 **a) Vérifier que** $b\overline{c} = a$ **, puis en déduire que** $ac = 4b$

0.5 **b) Ecrire les nombres complexes** b **et** c **sous forme trigonométrique.**

0.5 **c) En déduire que** $a = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$**, on considère les points** B, C **et** D **d'affixes respectives** b **,** c **et** d **telle que** $d = a^4$ **. Soit** z **l'affixe d'un point** M **du plan et** z' **l'affixe de** M' **image de** M **par la rotation** R **de centre** O **et d'angle** $\dfrac{\pi}{12}$

0.5 **a) Vérifier que** $z' = \dfrac{1}{4}az$

0.25 **b) Déterminer l'image du point** C **par la rotation** R

0.25 **c) Déterminer la nature du triangle** OBC **.**

0.75 **d) Montrer que** $a^4 = 128b$ **et en déduire que les points** O**,** B **et** D **sont alignés**

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction numérique g **définie sur** $]0,+\infty[$ **par** $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$

0.5 **1)a) Montrer que pour tout** x **de** $]0,+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

0.5 **b) Montrer que** g **est croissante sur** $[1,+\infty[$

0.5 **c) en déduire que pour tout** x **de** $[1,+\infty[$, $0\le \ln x\le 2\sqrt{x}$ **(remarquer que** $2\sqrt{x}-2\le 2\sqrt{x}$ **)**

1 **d) Montrer que pour tout** x **de** $[1,+\infty[$, $0\le \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}\le \dfrac{8}{\sqrt{x}}$ **et en déduire** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$

0.75 **2) a) Montrer que la fonction** $G: x\mapsto x\left(-1+\dfrac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)$ **est une primitive de** g **sur** $]0,+\infty[$

0.75 **b) Calculer l'intégrale** $\int_1^4 g(x)dx$

Problème : (7 points)

On considère la fonction numérique f **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $f(x)=-x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

et (C) **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O,\vec{i}\,;\vec{j})$ **(unité : 2cm)**

0.5 **1) Montrer que** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

0.5 **2) a) Démontrer que la droite** (Δ) **d'équation** $y=-x+\dfrac{5}{2}$ **est une asymptote à la courbe** (C) **au voisinage de** $-\infty$

0.75 **b) Résoudre l'équation** $e^{x-2}-4=0$ **puis montrer que la courbe** (C) **est au dessus de** (Δ) **sur l'intervalle** $]-\infty,2+\ln 4]$ **et en dessous de** (Δ) **sur l'intervalle** $[2+\ln 4,+\infty[$

0.5 **3) Montrer que** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ **puis interpréter géométriquement le résultat**

0.5 **4) a) Montrer que pour tout** x **de** $\mathbb{R}$ $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$

0.25 **b) Dresser le tableau de variations de la fonction** f

0.75 **5) Calculer** $f''(x)$ **pour tout** x **de** $\mathbb{R}$ **puis montrer que** $A(2,2)$ **est un point d'inflexion de** (C)

0.5 **6) Montrer que l'équation** $f(x)=0$ **admet une solution unique** α **telle que** $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$

1 **7) Construire** (Δ) **et** (C) **dans le repère** $(O,\vec{i}\,;\vec{j})$ **ci-dessous (on prend** $\ln 2\simeq 0,7$ **et** $\ln 3\simeq 1,1$**)**

0.5	**8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$**
0.75	**b) Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1}** **(remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)**
0.5	**c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2-\ln 3)=2+\ln 3$)**

·/·

Exercice 1 : (2 points)

Soit (u_n) **la suite numérique définie par :** $u_0 = 1$ **et** $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 8}{2u_n - 5}$ **pour tout** n **de** $I\!N$

0.5 **1) Montrer que pour tout** n **de** $I\!N$ **,** $u_n < 2$

2) On pose pour tout n **de** $I\!N$ **,** $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$

0.5 **a) Montrer que** (v_n) **est une suite arithmétique de raison** 2

0.75 **b) Ecrire** v_n **en fonction de** n **et en déduire** u_n **en fonction de** n **pour tout** n **de** $I\!N$.

0.25 **c) Calculer la limite de la suite** (u_n)

Exercice 2 : (5 points)

0.75 **1) Résoudre dans l'ensemble** $\mathbb{C}$ **des nombres complexes l'équation :** $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

2) On pose $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

0.75 **a) Ecrire** a **sous forme trigonométrique et en déduire que** a^{2020} **est un nombre réel**

0.5 **b) Soit le nombre complexe** $b = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$ **. Prouver que** $b^2 = a$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ **, on considère les points** A **,** B **et** C **d'affixes respectives** a **,** b **et** c **tel que** $c = 1$**. La rotation** R **de centre** O **et d'angle** $\dfrac{\pi}{8}$ **transforme le point** M **d'affixe** z **au point** M' **d'affixe** z'.

0.25 **a) Vérifier que** $z' = bz$

0.5 **b) Déterminer l'image de** C **par la rotation** R **et montrer que** A **est l'image de** B **par** R.

0.75 **4) a) Montrer que** $|a-b| = |b-c|$ **et en déduire la nature du triangle** ABC

0.5 **b) Déterminer une mesure de l'angle** $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

5) Soit T **la translation de vecteur** $\vec{u}$ **et** D **l'image de** A **par** T

0.25 **a) Vérifier que l'affixe de** D **est** $b^2 + 1$

0.75 **b) Montrer que** $\dfrac{b^2+1}{b} = b + \overline{b}$ **et en déduire que les points** O **,** B **et** D **sont alignés**

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction numérique u **définie sur** $\mathbb{R}$ **par :** $u(x)=e^{x}-2x+2-3e^{-x}$

0.5 **1)a) Montrer que pour tout** x **de** $\mathbb{R}$ **,** $u'(x)=\dfrac{(e^{x}-1)^{2}+2}{e^{x}}$

0.25 **b) poser le tableau de variation de la fonction** u **(sans calcul de limite) ;**

0.5 **c) En déduire le signe de la fonction** u **sur** $\mathbb{R}$ **(remarquer que** $u(0)=0$ **)**

2) Soit la fonction v **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $v(x)=e^{2x}-2xe^{x}+2e^{x}-3$

0.5 **a)Vérifier que pour tout** x **de** $\mathbb{R}$ **,** $v(x)=e^{x}u(x)$

0.5 **b) En déduire le signe de la fonction** v **sur** $\mathbb{R}$

0.5 **3) a) Montrer que la fonction** W **définie par** $W(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+(4-2x)e^{x}-3x$ **est une primitive de la fonction** v **sur** $\mathbb{R}$

0.5 **b) Calculer l'intégrale** $\int_{0}^{2}v(x)dx$

0.75 **c) Montrer que** $\dfrac{9}{2}$ **est le minimum absolu de la fonction** W **sur** $\mathbb{R}$ **.**

Problème : (9 points)

I - Soit g **la fonction numérique définie sur** $]0,+\infty[$ **par :** $g(x)=e^{1-x}+\dfrac{1}{x}-2$

0.5 **1) Monter que** $g'(x)<0,$ **pour tout** $x\in\,]0,+\infty[$

0.5 **2) Déduire le tableau de signe de** $g(x)$ **sur l'intervalle** $]0,+\infty[$ **; (remarquer que** $g(1)=0$ **)**

II – On considère la fonction numérique f **définie sur** $]0,+\infty[$ **par :**

$f(x)=(1-x)e^{1-x}-x^{2}+5x-3-2\ln x$ **et** (C) **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$ **(unité : 2** cm **)**

0.5 **1) Montrer que** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ **puis interpréter le résultat géométriquement**

0.5 **2) a) Montrer que** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

0.75 **b) Montrer que** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ **puis interpréter le résultat géométriquement**

1 **3) a) Montrer que pour tout** x **de** $]0,+\infty[$ **,** $f'(x)=(x-2)g(x)$

0.75 **b) Montrer que la fonction** f **est décroissante sur** $]0,1]$ **et sur** $[2,+\infty[$ **et croissante sur** $[1,2]$

0.25 **c) Dresser le tableau de variations de la fonction** f **sur** $]0,+\infty[$ **, (on admet** $f(2)\approx 1,25$ **)**

0.5 — **4) Sachant que $f(3) \approx 0{,}5$ et $f(4) \approx -1{,}9$ montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3,4[$.**

1 — **5) Construire (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$**

III - On pose $h(x) = f(x) - x$ pour tout x de l'intervalle $[1,2]$

0.5 — **1) a) A partir du tableau de variations de la fonction h ci-contre montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1,2]$**

x	**1**	**2**
$h(x)$	0 ↘	$h(2)$

0.25 — **b) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1,2]$**

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de IN

0.75 — **a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de IN**

0.5 — **b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.**

0.75 — **c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$**

Exercice 1 : (2 points)

0.5 **1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $e^{2x}-4e^{x}+3=0$

0.5 **b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** $e^{2x}-4e^{x}+3\leq 0$

0.5 **c) Calculer** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}$

0.5 **2) Montrer que l'équation** $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ **admet une solution dans l'intervalle** $[-1,0]$

Exercice 2 : (4 points)

Soit (u_n) **la suite numérique définie par :** $u_0=\dfrac{1}{2}$ **et** $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3-2u_n}$ **pour tout** n **de** $I\!N$

0.25 **1) Calculer** u_1

0.5 **2) Montrer par récurrence que pour tout** n **de** $I\!N$, $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$

0.5 **3) a) Montrer que pour tout** n **de** $I\!N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{1}{2}$

0.5 **b) En déduire la monotonie de la suite** (u_n)

0.75 **4) a) Montrer que pour tout** n **de** $I\!N$, $0<u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ **; puis calculer la limite de la suite** (u_n)

0.5 **b) On pose** $v_n=\ln(3-2u_n)$ **pour tout** n **de** $I\!N$ **, calculer** $\lim v_n$

0.5 **5) a) Vérifier que pour tout** n **de** $I\!N$, $\dfrac{1}{u_{n+1}}-1=3\left(\dfrac{1}{u_n}-1\right)$

0.5 **b) En déduire** u_n **en fonction de** n **pour tout** n **de** $I\!N$

Exercice 2 : (5 points)

0.75 **1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :** $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

2) Soient les nombres complexes $a=e^{i\frac{\pi}{6}}$ **et** $b=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0.25 **a) Ecrire** a **sous forme algébrique .**

0.5 **b) Vérifier que** $\overline{a}b=\sqrt{3}$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ **, on considère les points** A **,** B **et** C **d'affixes respectives** a **,** b **et** $\overline{a}$ **.**

0.5 **3) Montrer que le point** B **est l'image du point** A **par une homothétie** h **de centre** O **dont on déterminera le rapport.**

	4) Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
0.5	a) Ecrire z' en fonction de z et a.
0.25	b) Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer que $d=a+1$
0.5	c) Soit I le point d'affixe le nombre 1 , montrer que $ADIO$ est un losange .
0.75	5)a) Vérifier que $d-b=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$; en déduire un argument du nombre $d-b$
0.5	b) Ecrire le nombre $1-b$ sous forme trigonométrique.
0.5	c) Déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}\right)$
	Problème : (9 points)
	Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=2x\ln x-2x$ si $x>0$
	et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 1cm)
0.5	1) Montrer que f est continue à droite au point 0.
0.5	2)a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
0.5	b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat
0.75	3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat
0.5	b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$
0.5	c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$
0.5	4) a) Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ les équations $f(x)=0$ et $f(x)=x$
1	b) Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (on prend $e^{\frac{3}{2}}\simeq 4.5$)
0.5	5) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{1+e^2}{4}$
0.5	b) En déduire : $\int_1^e f(x)\,dx$
0.25	6)a) Déterminer le minimum de f sur $]0,+\infty[$
0.5	b) En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\ln x\geq\frac{x-1}{x}$

	7) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1,+\infty[$
0.5	**a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.**
0.75	**b) Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1}**
	8) on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} h(x)=x^3+3x \; ; \; x\le 0 \\ h(x)=2x\ln x-2x \; ; \; x>0 \end{cases}$
0.5	**a) Etudier la continuité de h au point 0**
0.5	**b) Etudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat.**
0.25	**c) La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? justifier.**

Exercice 1 : (4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout n de $I\!N$

0.5 1) Montrer que pour tout n de $I\!N$, $0 < u_n < 1$

0.5 2) a) Montrer que pour tout n de $I\!N$ $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$

0.5 b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3) On pose $v_n = \frac{1}{1-u_n}$ pour tout n de $I\!N$

0.75 a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

0.75 b) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $I\!N$

0.5 c) Calculer la limite de la suite (u_n)

0.5 4) A partir de quelle valeur de n, a-t-on $u_n \geq \frac{1011}{1012}$?

Exercice 2 : (5 points)

0.75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que: $a = 3 + 2i$; $b = 3 - 2i$ et $c = -1 - 2i$

0.5 a) Ecrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique.

0.5 b) En déduire la nature du triangle ABC

3) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R, et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$

0.5 a) Ecrire z' en fonction de z

0.25 b) Vérifier que C est l'image de A par R

0.5 4) a) Montrer que les points A, C et D sont alignés.

0.5 b) Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D

0.5 c) Déterminer l'affixe m du point E pour que le quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme

0.5 5) a) Montrer que $\frac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel.

0.5 b) En déduire que le quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle.

Exercice 3 : (3 points)

On considère la fonction numérique h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x+\ln x$

0.5	1) Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
0.5	2) Déterminer $h(]0;+\infty[)$
0.5	3) a) En déduire que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$
0.5	b) Montrer que $0<\alpha<1$
0.5	4) a) Vérifier que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\frac{1}{\alpha}$
0.5	b) En déduire que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)>2$

Problème : (8 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2-xe^{-x+1}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm)

0.5	1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.
0.5	2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
0.75	b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=-\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.
0.75	3) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x)=(x-1)e^{-x+1}$
0.5	b) Dresser le tableau de variations de la fonction f
0.5	4) a) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$
0.5	b) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 2
1	5) Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prend : $f(2)\simeq 1,25$)
0.5	6) Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{x-1}\geq x$
0.5	7) a) En utilisant une intégration par parties, calculer : $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$
0.5	b) En déduire que $\int_0^2 f(x)dx=4-e+3e^{-1}$
	8) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty,1]$
0.5	a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
0.75	b) Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
0.25	c) A partir de la courbe représentative de g^{-1} , déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{g^{-1}(x)}{x}\right)$

Exercice 1 (3points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

0,5 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$

0,25 b) En déduire que $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$
Déterminer une équation de la sphère (S)

0,5 3) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

4) On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

0,25 a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0,5 b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées

0,5 c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$, puis en déduire la distance $d\left(A,(\Delta)\right)$

Exercice 2 (3points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe $a=-1-i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b=-1+i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

0,5 1) Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d=-2$

2) On considère la rotation R de centre D et d'angle $\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

0,5 Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c=-4$

0,5 3) a) Ecrire le nombre $\dfrac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique

0,5 b) En déduire que $\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2=\dfrac{c-d}{b-d}$

4) Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2 , (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')

0,25 a) Vérifier que $|z+2|=2$

0,5 b) Prouver que $z+\overline{z}=-8$ (remarquer que $|z|=4$)

0,25 c) En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice 3 (3points) :

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne.

0,75 — 1) Montrer que $p(A)=\frac{1}{6}$; où A est l'évènement " N'obtenir aucune boule rouge "

0,75 — 2) Calculer $p(B)$; où B est l'évènement " Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes "

0,75 — 3) Montrer que $p(C)=\frac{1}{2}$; où C est l'évènement " Obtenir exactement une boule rouge "

0,75 — 4) Calculer $p(D)$; où D est l'évènement " Obtenir au moins deux boules rouges "

Exercice 4 (2.5points) :

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(x+1)e^x$

0,75 — 1) a) Vérifier que $x\mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I=\int_{-1}^{0}h(x)\,dx$

0,75 — b) A l'aide d'une intégration par parties calculer $J=\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^x\,dx$

0,5 — 2) a) Résoudre l'équation différentielle $(E): y''-2y'+y=0$

0,5 — b) Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0)=1$ et $h'(0)=2$

Problème (8.5points) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x(e^{\frac{x}{2}}-1)^2$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

0,5 — 1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

0,5 — 2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

0,5 — 3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

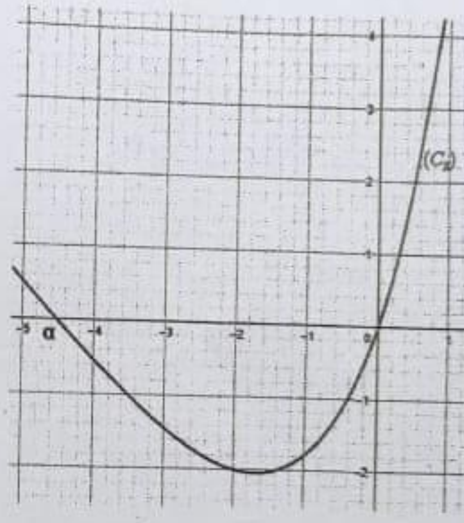
0,75 — b) Etudier le signe de $(f(x)-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

0,5 — 4) a) Montrer que $f'(x)=(e^{\frac{x}{2}}-1)^2+xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 — b) Vérifier que $x(e^{\frac{x}{2}}-1)\geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$

0,25 — c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

0,5	5) a) Montrer que $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$; où $g(x)=(2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4$ pour tout x de $\mathbb{R}$
0,5	b) A partir de la courbe ci-contre de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha)=0$)
0,5	c) Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.
1	6) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ (On prend : $\ln(4)\simeq 1,4$, $\alpha\simeq -4,5$ et $f(\alpha)\simeq -3,5$)
0,5	7) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$
0,25	b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 4)$
	8) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
0,5	a) Montrer par récurrence que $0<u_n<\ln 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$
0,5	b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
0,25	c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
0,5	d) Calculer la limite de la suite (u_n).



Exercice 1 (2,5 points) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u_n + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $I\!N$

0,5 1) a) Montrer que pour tout n de $I\!N$, $u_n > 1$

0,75 b) Montrer que pour tout n de $I\!N$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\sqrt{2}-2}{2}(u_n - 1)$ et déduire que la suite (u_n) est décroissante et convergente

2) On pose pour tout n de $I\!N$, $v_n = u_n - 1$

0,5 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

0,5 b) Ecrire u_n en fonction de n puis déduire la limite de la suite (u_n).

0,25 c) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{2021}$

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(3,0,-1)$ et de rayon $R=3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$

0,25 1) a) Calculer la distance ΩA

0,5 b) Montrer que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.

0,25 c) Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S)

0,5 2) Soit le point $M_a(2a-3,\ 3-2a,\ a-1)$ où $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduire que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

0,5 3) a) Vérifier que $2x-2y+z-9a+13=0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)

0,5 b) Montrer que $d(\Omega,(P_a)) = |3a-6|$

0,5 c) Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S).

Exercice 3 (3 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $Z_A = 1+5i$, $Z_B = 1-5i$ et $Z_C = 5-3i$

0,25 1) Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$

0,5 2) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de B par h

3) On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R

4) Soit F le point d'affixe $Z_F = -1+i$

a) Vérifier que $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$

b) En déduire que $\overline{(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})} + \overline{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})} \equiv \pi [2\pi]$

c) Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF

d) Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

Exercice 4 (3 points) :

Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1) On considère les événements suivants: A : " Obtenir exactement deux boules rouges "

B : " Obtenir exactement une boule verte "

a) Montrer que $p(A) = \frac{12}{55}$ et $p(B) = \frac{21}{44}$

b) Calculer $p(A/B)$: la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2) Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes.

Problème (8,5 points) :

Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2 \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$)

1) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

2) a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement

3) a) Montrer que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

b) Dresser le tableau de variations de f

0,5	**4) a) Sachant que $f''(x)=2x^2(6\ln x-5)\ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0,+\infty[$**
0,5	**b) Déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses**
1	**5) a) Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (on prend : $\sqrt{e}\simeq 1,6$ et $e^2\simeq 7,2$)**
0,5	**b) En utilisant la courbe (C), déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x-1)=-1$**
	6) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f\left(\lvert x\rvert\right)$
0,5	**a) Montrer que la fonction g est paire**
0,5	**b) Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$**
0,5	**7) a) On pose $I=\int_1^e x^4(\ln x-1)\,dx$, en utilisant une intégration par parties, montrer que $I=\dfrac{6-e^5}{25}$**
0,5	**b) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=x^5(\ln x-1)^2$. Vérifier que $h'(x)=5f(x)+2x^4(\ln x-1)$**
0,5	**c) Déduire que $\int_1^e f(x)\,dx=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}I$**
0,5	**d) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$**