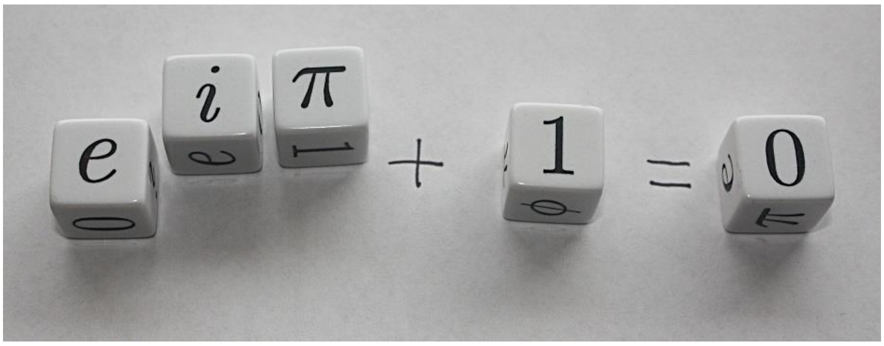
09 sujets d'examens blancs de mathématiques

2 Bac PC & SVT



Année scolaire : 2023/2024

Examen blanc

Sujet N ° 1

Matière : Mathématiques
Classe : 2 Bac SVT&SP
Année scolaire : 2023/2024
Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 3	Nombres complexes	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{9u_n - 11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Vérifier que $u_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{3u_n - 2}{11 - 9u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

2)- Montrer, par récurrence, que $0 \le u_n < \dfrac{2}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

3)- Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis déduire qu'elle est convergente. **2x0,25pt**

4)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{1}{3u_n - 2}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{-3}{5}$, puis écrire v_n en fonction de n **2x0,25pt**

b)- Calculer la limite de la suite (v_n), puis déduire celle de la suite (u_n) **2x0,25pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 0, -1)$ et $B(-1, 2, 3)$, et l'ensemble (S) des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BM} = 0$

1)- Vérifier que $AB = 2\sqrt{6}$, puis déterminer les coordonnées du point Ω milieu du segment $[AB]$. **2x0,5pt**

2)- Déterminer la nature de l'ensemble (S) et préciser ses éléments caractéristiques. **0,5pt**

3)- Donner une représentation paramétrique de la droite (AB). **0,5pt**

4)- Vérifier que le point O se trouve à l'intérieur de (S), puis déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par O et perpendiculaire à la droite (AB). **2x0,5pt**

Exercice 3 (3 points)

1)- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 26 = 0$ **1pt**

2)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points Ω, A et B d'affixes respectives $w = 1 + i$, $a = 1 - 5i$ et $b = 2(2 - i)$

a)- Montrer que $a - w = \overline{w}(b - w)$ **0,5pt**

b)- Vérifier que $\dfrac{b - a}{b - w} = i$, puis en déduire la nature du triangle ΩAB **0,5pt+0,25pt**

c)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\overline{z} - 1 - 5i| = |z - 1 - i|$ **0,5pt**

d)- En déduire que B appartient à (E) **0,25pt**

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : une boule noire portant le nombre 1, cinq boules vertes portant les nombres 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 2, et quatre boules rouges portant les nombres 1 ;2 ; 2 ; 2.
On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.
On considère les événements suivants :

- A : « Les trois boules tirées sont de même couleur »
- B : « Les trois boules tirées portent le même nombre »

- C : « Les trois boules tirées sont de même couleur ou elles portent le même nombre »

1)- Montrer que : $p(A)=\dfrac{7}{60}$ et $p(B)=\dfrac{1}{15}$, puis calculer $p(A\cap B)$ **1pt+1pt+0,5pt**

2)- En déduire que : $p(C)=\dfrac{7}{40}$ **0,5pt**

Problème (9 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-2e^{-2x}-4x$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

1)- a)- Vérifier que $f(x)=e^{2x}\left(\dfrac{1}{2}-2e^{-4x}-4xe^{-2x}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ **0,25pt**

b)- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-2x}=0$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ **0,25pt+2x0,5pt**

c)- En déduire une branche infinie à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ **0,25pt**

2)- a)- Vérifier que $f(x)=e^{-2x}\left(\dfrac{1}{2}e^{4x}-2-4xe^{2x}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **2x0,25pt**

b)- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-2x}}{x}=-\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ **0,25pt+0,5pt**

c)- En déduire une branche infinie à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ **0,25pt**

3)- a)- Montrer que $f'(x)=e^{-2x}\left(e^{2x}-2\right)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$ **0,5pt**

b)- Vérifier que $f'\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)=0$ puis interpréter géométriquement ce résultat. **2x0,25pt**

c)- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ **0,25pt**

4)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $1<\alpha<\dfrac{3}{2}$ **0,75pt**

5)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ (On prendra $\alpha\approx 1{,}1$) **0,75pt**

6)- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, les deux axes du repère et la droite d'équation $x=1$ **1pt**

7)- a)- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

b)- Construire, dans le même repère, la courbe représentative de la fonction f^{-1} **0,5pt**

c)- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0, puis exprimer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ en fonction de α **2x0,5pt**

Examen blanc

Sujet N° 2

Matière : Mathématiques
Année scolaire : 2023/2024
Classe : 2 Bac SVT&SP
Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Calcul de probabilités	03 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 4	Suites numériques	02 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (3 points)

Une urne U_1 contient deux boules blanches, une boule rouge et trois boules vertes.

Une autre urne U_2 contient une boule blanche, deux boules rouges et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience suivante : « on tire une boule de U_1 puis on tire une boule de U_2 »

On considère les événements suivants :

- A : « Les deux boules tirées sont blanches »
- B : « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

1)- Montrer que : $p(A)=\dfrac{1}{12}$ **0,75pt**

2)- En utilisant la probabilité de l'événement contraire, montrer que : $p(B)=\dfrac{17}{24}$ **1pt**

3)- Calculer $p(A\cup B)$ **0,5pt**

4)- On répète cette expérience trois fois en remettant dans les urnes les deux boules tirées, après chaque tirage. Quelle est la probabilité pour que l'événement A soit réalisé exactement deux fois ? **0,75pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=\dfrac{i}{2}(\sqrt{3}-i)$, $b=\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}$ et $c=i$

1)- Vérifier que : $a=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis déduire une forme trigonométrique de a **2 x 0,25pt**

2)- Montrer que : $a=-ib^2$ **0,5pt**

3)- Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$

a)- Donner l'expression complexe de la rotation R **0,5pt**

b)- Vérifier que : $R(A)=B$ et $R(B)=C$ **2 x 0,25pt**

c)- Déduire la nature du triangle ABC en précisant une mesure de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}$ **2 x 0,25pt**

4)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|2z-1-i\sqrt{3}|=5$ **0,5pt**

Exercice 3 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point $A(2,4,-2)$, et soit (P) le plan médiateur du segment $[OA]$, c'est-à-dire : le plan orthogonal à (OA) et passant par le milieu de $[OA]$.

1)- Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[OA]$. **0,5pt**

2)- Montrer que $x+2y-z-6=0$ est une équation cartésienne du plan (P). **1pt**

3)- Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $OM^2+\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=0$

a)- Vérifier que : $OM^2+\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{IM}$ **0,5pt**

b)- En déduire que (S) est la sphère de diamètre $[OI]$. **0,5pt**

c)- Quelle est la position relative de la sphère (S) et le plan (P) ? **0,5pt**

Exercice 4 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{2+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $2 < u_n \leq 4$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente. **0,5pt + 0,25pt**

3)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{u_n - 2}\right)$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison à déterminer **0,25pt**

b)- Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire que : $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{2^{n+1}-1}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **2 x 0,25pt**

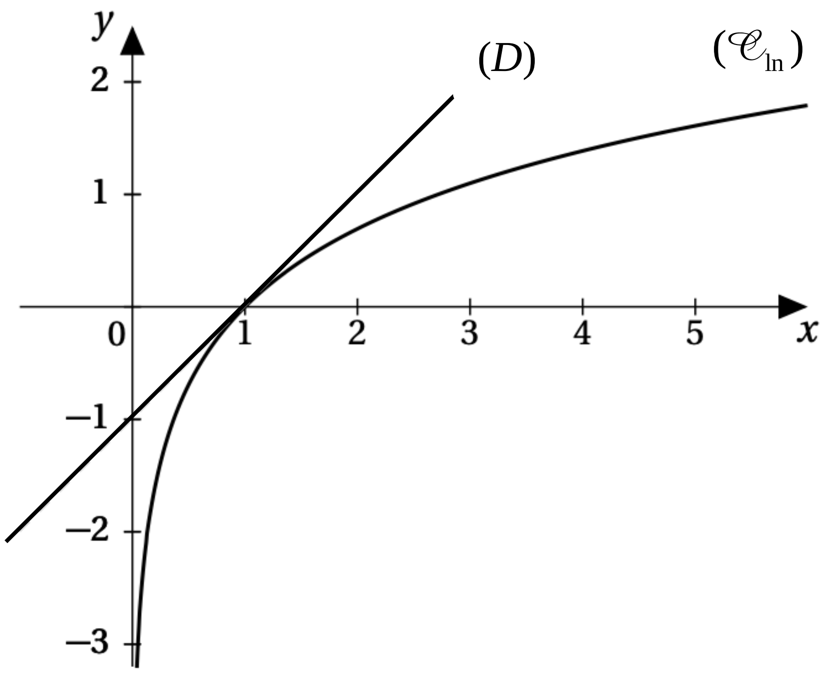
c)- Calculer la limite de la suite (u_n) **0,25pt**

Problème (9 points)

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + 2\ln x$

Dans la figure ci-dessous, (D) est la droite d'équation $y = x - 1$ et $(\mathscr{C}_{\ln})$ est la représentation graphique de la fonction ln.



1)- Calculer $g(1)$ **0,25pt**

2)- En utilisant la figure précédente, montrer que $(x - 1)$ et $\ln x$ ont le même signe. **0,75pt**

3)- En déduire que : $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$, et que : $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$ **0,5pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x}\right)\ln x - \dfrac{1}{x}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : 1cm).

1)- Vérifier que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat. **0,5pt + 0,25pt**

2)- a)- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **2 x 0,5pt**

b)- En déduire une branche infinie à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ **0,25pt**

3)- a)- Montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ **0,5pt**

b)- Dresser le tableau de variations de f **0,5pt**

4)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses exactement en deux points d'abscisses α et β **0,75pt**

5)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ *(On prendra $\alpha \approx 0,5$ et $\beta \approx 2,9$, et on admet qu'il existe un point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse comprise entre 1,7 et 1,8)* **1pt**

6)- Déterminer graphiquement le signe de la fonction f **0,5pt**

7)- a)- Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln^2(x)$ sur $]0,+\infty[$, puis déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_1^2 \left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) dx$$ **0,25pt + 0,5pt**

b)- En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^2 \left(\dfrac{x-2}{x}\right) \ln x \, dx = 2\ln(2) - \ln^2(2) - 1$ **0,75pt**

c)- Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ **0,75pt**

Examen blanc

Sujet N ° 3

Matière : Mathématiques — **Classe :** 2 Bac SVT&SP
Année scolaire : 2023/2024 — **Durée :** 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 2	Suites numériques	02 points
Exercice 3	Nombres complexes	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 1, -1)$, $B(2, 3, 1)$ et $C(0, 0, 1)$, et le vecteur $\vec{n}(3, -2, -1)$

1)- a)- Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés. **0,25pt**

b)- Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **0,5pt**

c)- En déduire que $3x-2y-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) **0,5pt**

2)- On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2=0$

a)- Montrer que la sphère (S) est de centre $\Omega(1,2,0)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$ **2 x 0,25pt**

b)- Calculer la distance $d(\Omega,(ABC))$, puis en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathscr{C})$, dont on déterminera le centre et le rayon. **0,5pt + 0,25pt**

3)- Déterminer les équations cartésiennes de (P_1) et (P_2) les deux plans tangents à la sphère (S) et parallèles à (ABC) **0,5pt**

Exercice 2 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=13$ et $u_{n+1}=\dfrac{4+u_n}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $u_n>1$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

2)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n=\ln(u_n-1)$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison à déterminer **0,5pt**

b)- Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire que : $u_n=12\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+1$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **2 x 0,25pt**

3)- Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $P_n=\left(\dfrac{u_1-1}{12}\right)\left(\dfrac{u_2-1}{12}\right)\dots\left(\dfrac{u_n-1}{12}\right)$

a)- Montrer que : $P_n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{n(n+1)}$ **0,5pt**

b)- Calculer la limite $\lim(P_n)^{\frac{1}{n+1}}$ **0,25pt**

Exercice 3 (3 points)

1)- Résoudre dans l'ensemble des nombre complexe l'équation : $z^2-(2+\sqrt{2})z+2+\sqrt{2}=0$ **0,75pt**

2)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=i$, $b=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $c=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Soit D l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

a)- Montrer que l'affixe du point D est $d=2-i$ **0,5pt**

b)- Vérifier que : $a-d=i\sqrt{2}(b-c)$ **0,5pt**

c)- En déduire que $ABDC$ est un losange et que $AD=\sqrt{2}BC$ **0,5pt + 0,25pt**

d)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-2+i|=|z-i|$ **0,5pt**

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient 8 boules portant les nombres 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 4 (Les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

- A : "Parmi les trois boules tirées, aucune ne porte le nombre 0"
- B : "Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est nul "
- C : "La somme des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 5 "

1)- Montrer que : $p(A)=\dfrac{5}{14}$, puis en déduire la valeur de $p(B)$ **1pt + 0,5pt**

2)- Montrer que : $p(C)=\dfrac{1}{7}$. **0,75pt**

3)- Calculer $p(A/C)$: la probabilité de l'événement A sachant que l'événement C est réalisé. **0,75pt**

Problème (9 points)

Partie I :

Le tableau ci-dessous représente le tableau de signe de la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1+xe^{-x}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

1)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ **2 x 0,25pt**

2)- En utilisant le tableau ci-dessus, dresser le tableau de variations de la fonction g **0,5pt**

3)- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ telle que $-\dfrac{3}{4}<\alpha<-\dfrac{1}{2}$ **0,75pt**

4)- En déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des deux intervalles $[\alpha,+\infty[$ et $]-\infty,\alpha]$ **2 x 0,25pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+1)e^{-x}-x+1$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

1)- a)- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **2 x 0,25pt**

b)- En déduire la branche parabolique de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ **0,25pt**

2)- a)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **0,25pt**

b)- Montrer que la droite (D) d'équation $y=-x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ **0,5pt**

c)- Étudier la position relative de la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ **0,5pt**

3)- a)- Vérifier que $f(\alpha)=-\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ **0,5pt**

b)- En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ **0,25pt**

4)- a)- Montrer que $f'(x) = -g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ **0,5pt**

b)- Calculer la limite $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, puis interpréter géométriquement le résultat. **2 x 0,25pt**

c)- Dresser le tableau de variations de f **0,5pt**

5)- Étudier la concavité de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et préciser son point d'inflexion. **0,5pt**

6)- Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en deux points B et C d'abscisses respectives β et γ telles que $1 < \beta < 2$ et $-2 < \gamma < -1$ **0,5pt**

7)- Construire la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ (On prendra $\alpha \approx -0,5$; $f(\alpha) \approx 2,5$; $\beta \approx 1,5$ et $\gamma \approx -1,5$) **1pt**

8)- Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq 2$ **0,5pt**

Examen blanc

Sujet N$^\circ$ 4

Matière : Mathématiques — **Classe :** 2 Bac SVT&SP

Année scolaire : 2023/2024 — **Durée :** 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02,5 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	08,5 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (2,5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{9}$, puis écrire v_n en fonction de n **0,5pt+0,5pt**

2)- Montrer que : $u_n = \dfrac{3 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$, puis déterminer la limite de (u_n) **0,5pt+0,5pt**

3)- Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n > 2,99$ **0,5pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 4$ et $b = 3 - i$

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

1)- Montrer que : $z' = -iz + 4 + 4i$ **0,5pt**

2)- Vérifier que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = 3 + i$ **0,5pt**

3)- En déduire la nature du triangle ABC **0,25pt**

4)- Soient t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et D l'image du point C par la translation t

a)- Déterminer d l'affixe du point D **0,5pt**

b)- En déduire la nature du quadrilatère $ABDC$ **0,5pt**

5)- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\overline{z} - 3 - i| = |3 + i|$ **0,75pt**

Exercice 3 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 2, -1)$, $B(3, 3, 0)$ et $C(2, 2, -3)$, et le vecteur $\vec{n}(2, -5, 1)$

1)- a)- Vérifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) **0,5pt**

b)- En déduire que $2x - 5y + z + 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) **0,5pt**

2)- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC) **0,25pt**

3)- Soit (S) la sphère de diamètre $[BC]$

a)- Vérifier que : $A \in (S)$ **0,5pt**

b)- Déterminer les coordonnées du point Ω centre de la sphère (S) **0,25pt**

c)- Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans tangents à (S) et parallèles au plan (ABC) **1pt**

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : six boules rouges portant les nombres -1 ; -1 ; 0 ; 0 ; 1 ; 2 et quatre boules vertes portant les nombres 0 ; 1 ; 2 ; 2.
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
On note le nombre porté par la première boule par *a* et le nombre porté par la deuxième boule par *b*
On considère les événements : A : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes »
B : « le nombre complexe $a + ib$ est imaginaire pur »
C : « le module du nombre complexe $a + ib$ est $\sqrt{2}$ »

1)- Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$ **3 x 0,75pt**

2)- Calculer $p(A\cap B)$ **0,5pt**

3)- Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier. **0,25pt**

Problème (8,5 points)

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x-2-2x\ln x$

On considère ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $]0,+\infty[$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$g(x)$	||	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\searrow$	

1)- Vérifier que : $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{2}{\sqrt{e}}-2$, puis déduire le signe de $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ sachant que : $\frac{2}{\sqrt{e}}\approx 1,2$ **2x0,25pt**

2)- En déduire, à partir du tableau précédent, le signe de la fonction g **0,5pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{\ln x}{(x-2)^2}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $2cm$).

1)- Vérifier que : $D_f=]0,2[\cup]2,+\infty[$, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f **0,25pt + 0,75pt**

2)- Déterminer les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ **0,75pt**

3)- a)- Montrer que : $\forall x\in D_f,\ f'(x)=\frac{g(x)}{x(x-2)^3}$ **0,75pt**

b)- En déduire que $f'(x)$ et $x-2$ ont des signes contraires **0,5pt**

c)- Dresser le tableau de variations de f **0,5pt**

4)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un seul point A que l'on déterminera **0,5pt**

5)- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point A **0,5pt**

6)- Construire la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (*on admet qu'il existe un point d'inflexion de* $(\mathscr{C}_f)$ *d'abscisse comprise entre* 0,4 *et* 0,6) **1,5pt**

7)- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$ **0,5pt**

8)- Construire dans le repère précédent $(\mathscr{C}_h)$ la courbe représentative de la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{\ln|x|}{(|x|-2)^2}$ **1pt**

Examen blanc

Sujet N ° 5

Matière : Mathématiques
Année scolaire : 2023/2024

Classe : 2 Bac SVT&SP
Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Calcul de probabilités	03 points
Exercice 4	Géométrie dans l'espace	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Exercice 1 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{e^3}(u_n + e^3 - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est minorée par 1 **0,25pt**

2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente. **2x0,25pt**

3)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = u_n - 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison. **0,25pt**

b)- Déterminer le terme général de la suite (v_n) **0,25pt**

c)- En déduire que : $u_n = 1 + \frac{1}{e^{3n}}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

4)- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

a)- Exprimer S_n en fonction de n **0,25pt**

b)- Montrer que : $\lim \frac{S_n}{n} = 1$ **0,25pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation : (E) : $z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{8} + 1 = 0$

1)- a)- Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = -\left(2\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$ **0,25pt**

b)- En déduire les soutions de l'équation (E) **0,5pt**

2)- On pose : $a = \cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}$

a)- Écrire a sous forme trigonométrique **0,25pt**

b)- Montrer que le nombre a^4 est imaginaire pur. **0,5pt**

3)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a^2 et $b = 1 - i$

a)- Vérifier que $\sqrt{2}\,a^2 = b$, puis en déduire que les points O, A et B sont alignés. **2x0,5pt**

b)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\frac{z}{a} - a\sqrt{2}\right| = 3$ **0,5pt**

Exercice 3 (3 points)

On dispose d'un dé cubique équilibré (non truqué) dont les faces portent les nombres suivants :

$$-1 \ ; \ -1 \ ; \ -1 \ ; \ 0 \ ; \ 1 \ ; \ 1$$

On lance ce dé deux fois de suite et on note le nombre obtenu pour chaque lancer.
On considère les événements suivants :

- A : « Les deux nombres obtenus sont différents »
- B : « La somme des deux nombres obtenus est nulle »
- C : « Les deux nombres obtenus sont différents sachant que leur somme est nulle »

1)- a)- Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$ **2x0,5pt + 1pt**

b)- En déduire si les événements A et B sont indépendants ou non ? **0,25pt**

2)- Pour tout entier naturel n, on considère l'événement S_n défini par :

« La somme des deux nombres obtenus est égale à n ».

Calculer la probabilité de l'événement S_n suivant les valeurs de n **0,75pt**

Exercice 4 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère la sphère (S) de centre $\Omega(0, 2, -1)$ et de rayon $R = 5$, et la droite (D) passant par le point $A(2, 5, 7)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$

1)- a)- Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z - 20 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) **0,25pt**

b)- Calculer la distance $d(\Omega, (Oxy))$, puis en déduire que le plan (Oxy) coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathscr{C})$ de rayon $r = 2\sqrt{6}$ **2x0,5pt**

2)- a)- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) **0,25pt**

b)- Montrer que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points à déterminer. **0,75pt**

3)- Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans tangents à (S) et perpendiculaires à la droite (D) **0,75pt**

Problème (9 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{\frac{-2}{x}}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : $1cm$)

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ **3x0,5pt**

2)- Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro. **0,75pt**

3)- Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement ce résultat. **2x0,5pt**

4)- a)- Montrer que $f'(x) = \left(\dfrac{(x+1)^2 + 1}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ **0,5pt**

b)- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

5)- a)- Vérifier que : $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}} - 1\right) = -2$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}} - 1\right) = -2$ **2x0,5pt**

b)- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ **2x0,5pt**

6)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses exactement en deux points à déterminer. **0,5pt**

7)- Construire la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ *(On admet que $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$)* **0,75pt**

8)- Déterminer graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(x+m)e^{\frac{2}{x}} - x = 1$ **0,75pt**

9)- a)- Vérifier que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 e^{\frac{-2}{x}}$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$ **0,25pt**

b)- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ **0,5pt**

Examen blanc

Sujet N ° 6

Matière : Mathématiques
Classe : 2 Bac SVT&SP
Année scolaire : 2023/2024
Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Questions indépendantes	02 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Calcul de probabilités	03 points
Exercice 4	Géométrie dans l'espace	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique et suites numériques	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (2 points)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes

1)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x-\ln(2e^{x}+1)\leq 0$ **0,5pt**

2)- Résoudre dans $\mathbb{R}^{2}$ le système : $\begin{cases} e^{x}-2e^{y}=1 \\ x-y=\ln 3 \end{cases}$ **0,5pt**

3)- a)- Vérifier que la fonction $H: x\mapsto \cos x+x\sin x$ est une primitive de $h: x\mapsto x\cos x$ sur $\mathbb{R}$ **0,25pt**

b)- Montrer que : $\dfrac{x}{1+x\tan x}=\dfrac{x\cos x}{\cos x+x\sin x}$, pour tout x de l'intervalle $[-1,1]$ **0,25pt**

c)- En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x\tan x}dx$ **0,5pt**

Exercice 2 (3 points)

1)- On pose : $Z=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)(1+i)$

a)- Écrire Z sous forme trigonométrique **0,5pt**

b)- Montrer que Z^{4} est un réel négatif **0,5pt**

2)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$, $b=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)(1+i)$ et $c=\overline{b}$

a)- Montrer que : $c-a=i(b-a)$, puis déduire la nature du triangle ABC **0,5pt + 0,25pt**

b)- Vérifier que : $a=b+c$ **0,25pt**

c)- En déduire la nature du quadrilatère $ABOC$ **0,5pt**

d)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\overline{z}\right|=\left|z-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)(1-i)\right|$ **0,5pt**

Exercice 3 (3 points)

On considère une urne contenant trois boules rouges et une boule verte (Les boules sont indiscernables au toucher), ainsi qu'un jeton parfaitement équilibré dont l'une des faces est rouge et l'autre est verte.

Une épreuve consiste à lancer le jeton : si la face supérieure est rouge, on ajoute une boule rouge dans l'urne ; si la face supérieure est verte, on ajoute une boule verte dans l'urne. Puis, on tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

On considère les deux événements suivants :

- A : " Aucune boule verte ne figure parmi les trois boules tirées "
- B : " La face supérieure du jeton est verte "

1)- a)- Montrer que : $p(B)=\dfrac{1}{2}$, $p(A/B)=\dfrac{1}{10}$ et $p(A/\overline{B})=\dfrac{2}{5}$ **0,25pt + 2 x 0,75pt**

b)- En utilisant la formule des probabilités totales, déduire la probabilité de l'événement A **0,5pt**

2)- Sachant qu'aucune boule verte ne figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la face supérieure du jeton soit rouge. **0,75pt**

Exercice 4 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le point $A(-1,1,3)$ et le plan (P) d'équation $2y+z+1=0$.

Soit (D) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-1 \\ y=1+2t \\ z=3+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

1)- Calculer la distance $d(A,(P))$ **0,25pt**

2)- Déterminer le triplet des coordonnées du point H intersection de la droite (D) et le plan (P) **0,25pt**

3)- On considère la sphère (S) de centre A et de rayon $R=3$

a)- Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle $(\mathscr{C})$ dont on déterminera son centre et son rayon. **1pt**

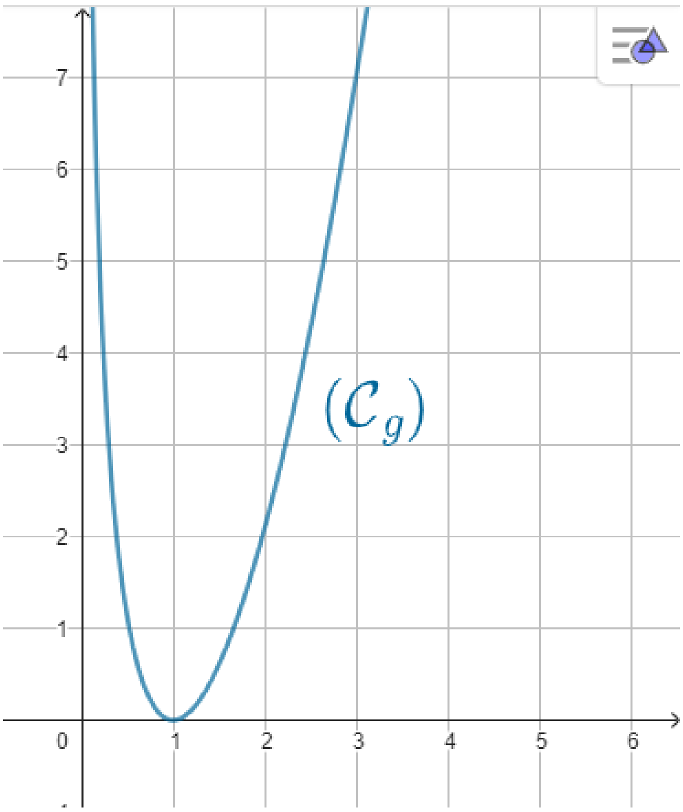
b)- Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S') de même centre que la sphère (S) et tangent au plan (P) **0,5pt**

Problème (9 points)

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2+\ln^2(x)-2\ln x-1$

On considère ci-dessous la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.



1)- Calculer $g(1)$ **0,25pt**

2)- Déterminer graphiquement le signe de la fonction g **0,5pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln^2(x)}{x}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1)- Montrer que : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat **0,5pt + 0,25pt**

2)- a)- Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x} = 0$ (*on pourra poser* $t = \sqrt{x}$), puis calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **0,5pt + 0,25pt**

b)- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ **0,5pt**

c)- Vérifier que $f(x) - x = \frac{(1-\ln x)(1+\ln x)}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, puis étudier la position relative de la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ **0,25pt + 0,5pt**

3)- a)- Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ **0,5pt**

b)- Calculer $f'(1)$, puis interpréter géométriquement le résultat. **2 x 0,25pt**

c)- Dresser le tableau de variations de f **0,25pt**

4)- a)- Montrer que $f''(x) = \frac{2\ln x(3-\ln x)}{x^3}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ **0,5pt**

b)- En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ possède deux points d'inflexion I et J d'abscisses respectives 1 et e^3 **0,5pt**

5)- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ telle que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$ **0,75pt**

6)- Construire la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (*La construction du point J n'est pas demandée et on prendra* $\alpha \approx 0,3$) **0,75pt**

7)- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

Partie III :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $e^{-1} \le u_n \le e$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente. **0,5pt + 0,25pt**

3)- Calculer la limite de la suite (u_n) **0,25pt**

Examen blanc

Sujet N ° 7

Matière : Mathématiques
Classe : 2 Bac SVT&SP
Année scolaire : 2023/2024
Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 3	Nombres complexes	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $0 < u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

2)- a)- Vérifier que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis déduire la monotonie de (u_n) **2x0,25pt**

b)- En déduire que la suite (u_n) est convergente. **0,25pt**

3)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2 **0,25pt**

b)- Écrire v_n en fonction de n **0,25pt**

4)- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n}$

a)- Montrer que : $S_n = 2^{n+1} + n - 2$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ **0,25pt**

b)- Calculer $\lim \frac{S_n}{n.2^n}$ **0,25pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $A(1, 2, 3)$ et le plan (P) d'équation $x + y + z - 3 = 0$

1)- Vérifier que : $d(A,(P)) = \sqrt{3}$ **0,25pt**

2)- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire au plan (P) **0,5pt**

3)- Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P) **0,5pt**

4)- Soit (S) la sphère de centre A et qui coupe le plan (P) selon le cercle (Γ) de rayon $r = 2$

a)- Quel est le centre du cercle (Γ) ? **0,25pt**

b)- Vérifier que le rayon de la sphère (S) est $R = \sqrt{7}$, puis déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) **0,25pt + 0,5pt**

5)- Soit (Q_m) le plan d'équation $x - y + mz + 1 = 0$, où m est un réel positif.

Déterminer la valeur de m pour que le plan (Q_m) soit tangent à la sphère (S) **0,75pt**

Exercice 3 (3 points)

1)- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 3z\sqrt{3} + 9 = 0$ **0,75pt**

2)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2(\sqrt{3} + i)$, $b = \overline{a}$ et $c = -8i$

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et soit D l'image du point C par la rotation R

a)- Écrire a sous forme trigonométrique, puis déduire un argument de $\frac{a}{b}$ **0,5pt+0,25pt**

b)- Montrer que le triangle OAB est équilatéral. **0,5pt**

c)- Donner l'expression complexe de la rotation R **0,5pt**

d)- Montrer que le point A est le milieu du segment $[OD]$ **0,5pt**

Exercice 4 (3 points)

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher : cinq boules vertes portant les nombres 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 et cinq boules rouges portant les nombres 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3.

On tire au hasard, successivement et sans remise trois boules du sac.

On considère les événements suivants :

- A : « Tirer trois boules portent le même nombre »
- B : « Tirer exactement deux boules de même couleur parmi trois boules tirées »
- C : « Tirer trois boules portent des nombres de même parité »

1)- a)- Montrer que : $p(A)=\frac{7}{40}$, $p(B)=\frac{5}{6}$ et $p(A\cap B)=\frac{2}{15}$ **3x0,5pt**

b)- En déduire que : $p(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{8}$ (*Remarquer que* $\overline{A}\cap\overline{B}$ *est l'événement contraire de* $A\cup B$) **0,5pt**

2)- Les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse. **0,5pt**

3)- Calculer $p(C)$ **0,5pt**

Problème (9 points)

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]1,+\infty[$ par : $g(x)=2x+(x-1)\ln(x-1)$

On considère ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $]1,+\infty[$

x	1		$1+\frac{1}{e^3}$		$+\infty$
$g(x)$	||	$\searrow$	$g\left(1+\frac{1}{e^3}\right)$	$\nearrow$	

1)- Vérifier que : $g\left(1+\frac{1}{e^3}\right)=2-\frac{1}{e^3}$, puis déduire le signe de $g\left(1+\frac{1}{e^3}\right)$ sachant que : $\frac{1}{e^3}\approx 0,04$ **2x0,25pt**

2)- En déduire, à partir du tableau ci-dessus, le signe de la fonction g est strictement positive sur $]1,+\infty[$ **0,5pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}\ln(x-1)$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat **0,5pt +0,25pt**

2)- a)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis vérifier que : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x\in]1,+\infty[$ **2x0,25pt**

b)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ (*on pourra poser* $t=\sqrt{x}$), puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ **0,5pt+0,25pt**

c)- En déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction à déterminer **0,25pt**

3)- a)- Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2(x-1)\sqrt{x}}$ pour tout $x\in]1,+\infty[$ **0,5pt**

b)- En déduire que f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ **0,5pt**

4)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un seul point A que l'on déterminera **0,5pt**

5)- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point A **0,25pt**

6)- Construire la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ **1pt**

Partie III :

1)- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

2)- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0, puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ **2x0,5pt**

3)- Construire, dans le même repère, la courbe représentative de la fonction f^{-1} **0,5pt**

4)- Déterminer graphiquement les deux limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{x}$ **2x0,5pt**

Examen blanc

Sujet N ° 8

Matière : Mathématiques
Classe : 2 Bac SVT&SP
Année scolaire : 2023/2024
Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 3	Nombres complexes	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 22$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{\ln 3} u_n - \dfrac{24(1-\ln 3)}{\ln 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est majorée par 24 **0,25pt**

2)- Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente. **2x0,25pt**

3)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = 24 - u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison. **0,25pt**

b)- Déterminer le terme général de la suite (v_n) **0,25pt**

c)- En déduire que : $u_n = 24 - 2\left(\dfrac{1}{\ln 3}\right)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}$, puis calculer $\lim u_n$ **2x0,25pt**

4)- On considère la suite numérique (w_n) définie par : $w_n = (1+u_n)e^{23-u_n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

Calculer $\lim w_n$ **0,25pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1,\,0,\,-1)$ et $B(3,\,2,\,5)$,

et l'ensemble (P) des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$

1)- a)- Vérifier que le point O appartient à l'ensemble (P), puis montrer que (P) est le plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ **2x0,5pt**

b)- En déduire que $x + y + 3z = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) **0,5pt**

2)- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (P) **0,25pt**

3)- Soit (S) la sphère de centre A telle que (P) est un plan tangent à cette sphère.

a)- Calculer le rayon de la sphère (S) **0,25pt**

b)- Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + \dfrac{18}{11} = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) **0,5pt**

c)- Déterminer le point d'intersection du plan (P) et la sphère (S) **0,5pt**

Exercice 3 (3 points)

1)- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$ **0,5pt**

2)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 3 + i\sqrt{3}$

a)- Vérifier que $b - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a)$ **0,5pt**

b)- En déduire la nature du triangle ABC **0,5pt**

c)- Déterminer g l'affixe du point G le centre de gravité du triangle ABC **0,5pt**

d)- Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|3\bar{z} - 6 + 2i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC **0,5pt**

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges portant les nombres -1 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2, quatre boules vertes portant les nombres -1 ; 1 ; 2 ; 2 et une boule jaune porte le nombre 1

On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne.

On note le nombre porté par la première boule par a, le nombre porté par la deuxième boule par b et le nombre porté par la troisième boule par c

On considère les événements suivants :

- A : « les trois boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux »
- B : « le produit abc est strictement positif »
- C : « le point $M(a, b, c)$ n'appartient pas au plan (P) d'équation $x + y + z - 2 = 0$ »

1)- Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$ **2x0,5pt+0,75pt**

2)- Sachant que les boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux, calculer la probabilité que l'événement B est réalisé. **0,75pt**

3)- On répète cette expérience trois fois en remettant dans les urnes les trois boules tirées, après chaque tirage. Quelle est la probabilité pour que l'événement A soit réalisé exactement deux fois ? **0,5pt**

Problème (9 points)

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + 2x\ln x$

1)- Calculer $g(1)$, puis vérifier que : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -1$ **2x0,25pt**

2)- Montrer que : $g'(x) = 3 + 2\ln x$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g **2x0,5pt**

3)- En déduire que : $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$, et $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$ **2x0,5pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = (x-1)\sqrt{|\ln x|}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : $1,5cm$).

1)- Vérifier que : $D_f =]0,+\infty[$, puis calculer $f(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **3x0,25pt**

2)- Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat. **2x0,25pt**

3)- a)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ **0,5pt**

b)- En déduire une branche infinie à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ **0,25pt**

4)- Étudier la dérivabilité de f en 1, puis interpréter graphiquement le résultat. **0,5pt +0,25pt**

5)- a)- Montrer que : $f'(x) = \dfrac{|g(x)|}{2x\sqrt{|\ln x|}}$ pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ **1pt**

b)- Dresser le tableau de variations de f **0,5pt**

6)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ **1pt**

7)- a)- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ **0,75pt**

b)- Construire dans le repère précédent $(\mathscr{C}_h)$ la courbe représentative de la fonction h définie par :

$h(x) = f^{-1}(|x|)$ **0,5pt**

Examen blanc

Sujet N ° 9

Matière : Mathématiques
Année scolaire : 2023/2024

Classe : 2 Bac SVT&SP
Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Calcul de probabilités	03 points
Exercice 2	Calcul intégral	02 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 4	Nombres complexes	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique et suites numériques	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (3 points)

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : trois boules rouges, deux boules vertes et une boule noire.
On tire au hasard successivement et avec remise deux boules de l'urne.
On considère les deux événements suivants :

- A : « Tirer deux boules vertes »
- B : « Tirer deux boules de même couleur »

1)- Montrer que : $p(A)=\dfrac{1}{9}$ et $p(B)=\dfrac{7}{18}$ **1pt+1pt**

2)- Dans cette question, on rajoute n boules vertes dans l'urne précédente.

a)- Exprimer $p(A)$ en fonction de n **0,5pt**

b)- Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour que $p(A)>\dfrac{1}{4}$ **0,5pt**

Exercice 2 (2 points)

On pose : $I=\int_0^1 x(2+\cos x)e^{1-x}\,dx$

1)- Montrer que $e^{1-x}\leq(2+\cos x)e^{1-x}\leq 3e^{1-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ **0,25pt**

2)- En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_0^1 xe^{1-x}\,dx$ **0,5pt**

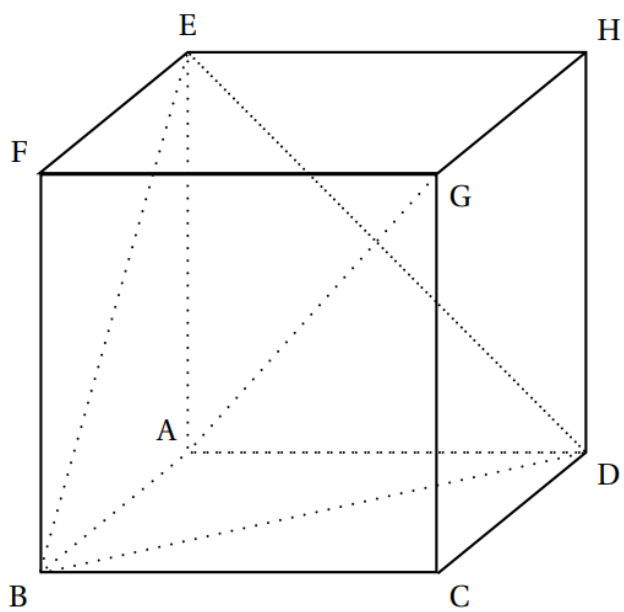
3)- En déduire que $e-2\leq I\leq 3(e-2)$ **0,5pt**

4)- a)- Vérifier que la fonction $H:x\mapsto\dfrac{1}{2}\big((x+1)\sin x-x\cos x\big)e^{1-x}$ est une primitive de $h:x\mapsto x\cos(x)e^{1-x}$ sur $\mathbb{R}$ **0,25pt**

b)- Déterminer la valeur exacte de l'intégrale I **0,5pt**

Exercice 3 (3 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 et on munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$



1)- a)- Vérifier que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE) **0,5pt**

b)- En déduire que $x+y+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (BDE) **0,5pt**

2)- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG) **0,25pt**

3)- Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AG]$, puis calculer $d(I,(BDE))$ **2 x 0,25pt**

4)- Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{GM}=0$

a)- Déterminer la nature de l'ensemble (S) et préciser ses éléments caractéristiques. **0,5pt**

b)- Montrer que $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$ est une équation cartésienne de (S) **0,25pt**

c)- Montrer que le plan (BDE) coupe (S) suivant un cercle $(\mathscr{C})$, dont on déterminera son centre et son rayon. **0,5pt**

Exercice 4 (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a=3-i$ et $b=11-i$

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la transformation h définie par : $z'=\left(1-4m+(1+m)i\right)z-4+4i$, où m est un nombre réel

1)- Déterminer la valeur de m pour que h soit une homothétie. Préciser alors le centre Ω et le rapport k de cette homothétie. **0,5pt + 2 x 0,25pt**

2)- a)- Vérifier que le point B est l'image du point A par l'homothétie h **0,5pt**

b)- En déduire que les points Ω, A et B sont alignés. **0,5pt**

3)- Déterminer l'affixe du point C image du point O par la translation de vecteur $\vec{u}+2\vec{v}$ **0,5pt**

4)- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\bar{z}-1+2i|=2$ **0,5pt**

Problème (9 points)

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x+e^x$

1)- Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

2)- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ telle que $-1<\alpha<0$ **1pt**

3)- En déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des deux intervalles $[\alpha,+\infty[$ et $]-\infty,\alpha]$ **2 x 0,25pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\ln(1+xe^{-x})$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $2cm$)

1)- Vérifier que $D_f=]\alpha,+\infty[$ **0,5pt**

2)- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, puis interpréter graphiquement ce résultat. **2x0,25pt**

3)- a)- Montrer que $f(x)=\ln(g(x))-x$ pour tout x de D_f **0,25pt**

b)- Calculer la limite $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat. **2 x 0,25pt**

4)- a)- Montrer que $f'(x)=\dfrac{1-x}{g(x)}$ pour tout x de D_f **0,5pt**

b)- Dresser le tableau de variations de f **0,5pt**

5)- Montrer que le point O est le seul point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses. **0,5pt**

6)- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point O **0,5pt**

7)- Construire la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ *(On prendra $\alpha \approx -0,5$ et on admet qu'il existe un unique point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse comprise entre* $2,1$ *et* $2,2$) **1pt**

8)- Déterminer graphiquement, la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (T) **0,5pt**

Partie III :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,5pt**

2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente. **0,5pt + 0,25pt**

3)- Calculer la limite de la suite (u_n) **0,5pt**