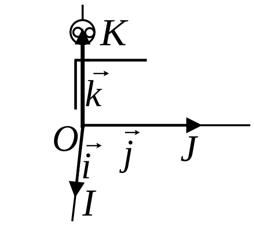
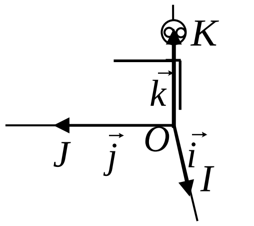
الجداء المتجهي





I– توجيه الفضاء :

1) تعريف :

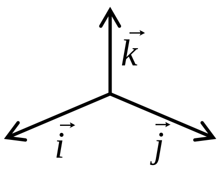
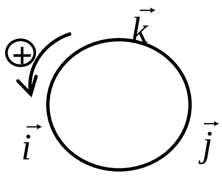
ليكن $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلما للفضاء نضع : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$ ‹‹ملاحظ أمبير››
المرتبط بالمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ هو شخص خيالي رأسه عند النقطة K وقدماه عند النقطة O
وينظر إلى النقطة I، النقطة J يمكنها أن تكون على يسار ملاحظ أمبير أو على يمينه .
نقول إن المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ مباشر إذا كانت النقطة J على يسار ملاحظ أمبير المرتبط بهذا
المعلم وغير مباشر إذا كانت النقطة J على يمينه .

2) الأساسات المباشرة :

ليكن $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساسا للفضاء المتجهي ،
نقول إن الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ مباشر إذا كان المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ مباشرا حيث O نقطة من الفضاء .

مثال :

ليكن $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساسا مباشرا ، ماذا عن الأساسات التالية :
$(\vec{j};\vec{k};\vec{i})$ ، $(\vec{j};\vec{i};\vec{k})$ ، $(\vec{k};\vec{i};\vec{j})$ ، $(\vec{k};\vec{j};\vec{i})$

II– الجداء المتجهي في الفضاء :

1) تعريف :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء ، الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو متجهة نرمز لها بالرمز $\vec{u}\wedge\vec{v}$
والمحددة بما يلي : - إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فإن $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فإن :
✱ المتجهة $\vec{u}\wedge\vec{v}$ عمودية على $\vec{u}$ وعلى $\vec{v}$.
✱ الأساس $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ مباشر .
✱ $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\alpha$ حيث α قياس الزاوية الهندسية المحددة بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

أمثلة : ليكن $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم ومباشر ، حدد : $\vec{i}\wedge\vec{j}$ ، $\vec{j}\wedge\vec{k}$ ، $\vec{k}\wedge\vec{i}$.

2) خاصيات الجداء المتجهي :

خاصية :

مهما تكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات من الفضاء و α عددا حقيقيا فإن :
$\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$ ، $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$ ، $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$ ،
$(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$

تمرين تطبيقي :

الفضاء منسوب إلى أساس م م م $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، أحسب $(\vec{i}+2\vec{j})\wedge(\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})$

III– تحليلية الجداء المتجهي :

خاصية :

الفضاء المتجهي منسوب إلى أساس م م م $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتين من
الفضاء ، لدينا :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

ملاحظة :

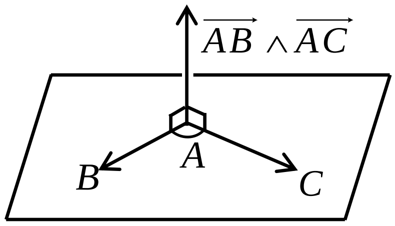
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'} \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & x' \\ \cancel{y} & \cancel{y'} \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ \cancel{z} & \cancel{z'} \end{vmatrix}\vec{k}$$

تمرين تطبيقي :

نعتبر $\vec{u}(1;-3;4)$ و $\vec{v}(2;0;-1)$ ، حدد مثلوث إحداثيات المتجهة : $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

IV– تطبيقات الجداء المتجهي :

1) معادلة ديكارتية لمستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمية :



خاصية :

إذا كانت A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء
فإن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

تمرين تطبيقي :

في الفضاء المنسوب إلى معلم م م م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;2;-1)$ و $B(2;3;1)$ و $C(0;-2;2)$.

1) حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

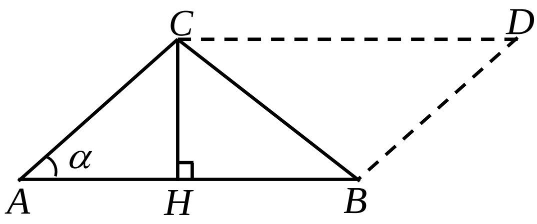
2) استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2) حساب مساحة مثلث :

لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية في الفضاء و α قياس الزاوية الهندسية $(B\hat{A}C)$.

لتكن S مساحة المثلث ABC و H المسقط العمودي للنقطة C على (AB)، لدينا :

$$S=\frac{1}{2}AB.CH=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$$



خاصية :

لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء .
مساحة المثلث ABC هي $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

ملاحظة : مساحة متوازي الأضلاع $ABDC$ هي $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

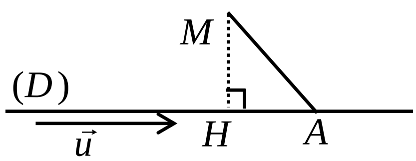
3) مسافة نقطة عن مستقيم في الفضاء :

تعريف :

ليكن (D) مستقيما ضمن الفضاء، A نقطة من الفضاء و H مسقطها العمودي على (D).
نسمي مسافة النقطة A عن المستقيم (D) المسافة AH ، ونرمز لها بالرمز : $d(A;(D))$

نشاط :

نعتبر في الفضاء المستقيم (D) المار من نقطة A والموجه بمتجهة $\vec{u}$ ،
لتكن M نقطة من الفضاء و H مسقطها العمودي على (D).



1) بين أن : $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\overrightarrow{HM}\wedge\vec{u}$ واستنتج أن : $HM=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

خاصية :

ليكن (D) مستقيما يمر من نقطة A و $\vec{u}$ متجهة موجهة له و M نقطة من الفضاء لدينا : $d(M;(D))=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

تمرين تطبيقي :

حدد مسافة النقطة O أصل المعلم عن المستقيم (D) المعرف بالتمثيل البارامتري :

$$\begin{cases}x=1-2t\\ y=-3+2t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z=-1+t\end{cases}$$

4) تحديد متجهة موجهة لتقاطع مستويين :

خاصية :

ليكن (P) و (Q) مستويين و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ على التوالي متجهتين منظميتين عليهما .
إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فإن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{u}\wedge\vec{v}$

تمرين تطبيقي :

نعتبر المستويين : $(P):x-2y+3z+1=0$ و $(Q):x+y-z+4=0$ والنقطة $A(-3;-1;0)$.

1) بين أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (D) .

2) تحقق من أن $A\in(P)\cap(Q)$.

3) استنتج تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) .