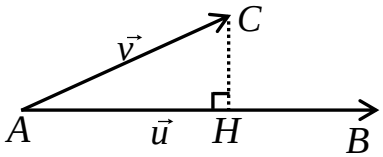
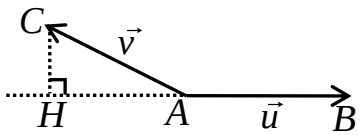
الجداء السلمي في الفضاء وتطبيقاته

I- الجداء السلمي في الفضاء :

1) تعريف :





لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين و A نقطة من الفضاء .
توجد نقطتان وحيدتان B و C من الفضاء بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$
الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{v}$ المعرف كما يلي :
- إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فإن $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ فإن النقط A و B و C تنتمي إلى مستوى (P).
في المستوى (P) ، لتكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) ، لدينا
$\vec{u}.\vec{v}=AB.AH$ إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما نفس المنحى ،
و $\vec{u}.\vec{v}=-AB.AH$ إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما منحيان متعاكسان ،

2) صيغة أخرى للجداء السلمي :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و A و B و C ثلاث نقط من الفضاء بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ ،
و α قياس الزاوية الهندسية $\left(BAC\right)$ ، لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=AB.AC.\cos\alpha$

3) خاصيات :

أ) تعامد متجهتين في الفضاء :

خاصية :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء ، تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v}=0$ ونكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$

ملاحظة :

المتجهة المنعدمة $\vec{0}$ عمودية على أية متجهة من الفضاء .

ب) منظم متجهة :

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و A و B نقطتين من الفضاء بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.
لدينا $\vec{u}.\vec{u}=AB.AB.\cos 0=AB^2$
إذن لكل متجهة غير منعدمة $\vec{u}$ لدينا $\vec{u}.\vec{u}>0$.
العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{u}$ يسمى المربع السلمي للمتجهة $\vec{u}$ ويرمز له بالرمز : $\vec{u}^2$
العدد $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ ويرمز له بالرمز $\|\vec{u}\|$ ونكتب : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$

ملاحظات :

- $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و α قياسا للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$ فإن : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\alpha$

ج) الجداء السلمي والعمليات :

خاصية :

مهما تكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات من الفضاء و k عددا حقيقيا فإن :
$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ ، $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ ، $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$ ، $(k\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$
$(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ ، $(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ و $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$
$|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ $\quad$ $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

II- صيغ تحليلية :

1) الأساس والمعلم المتعامدان الممنظمان :

تعريف :

لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير مستوائية و O نقطة من الفضاء .
يكون الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامدا ممنظما إذا كان $\vec{i}\perp\vec{j}$ و $\vec{j}\perp\vec{k}$ و $\vec{k}\perp\vec{i}$ و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$

يكون المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامدا ممنظما إذا كان الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامدا ممنظما .

في ما تبقى من الفقرات الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

2) الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

نشاط :

نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ ، أحسب $\vec{u}.\vec{v}$ بدلالة x و y و z و x' و y' و z' .

أ) خاصية :

لتكن المتجهتين $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ من الفضاء، لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

نتيجة :

لتكن المتجهتين $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ من الفضاء، لدينا : $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'+zz'=0$

ملاحظة :

نعتبر المتجهة $\vec{u}(x;y;z)$ ، لدينا : $\vec{u}.\vec{i}=x$ و $\vec{u}.\vec{j}=y$ و $\vec{u}.\vec{k}=z$

ب) الصيغة التحليلية لمنظم متجهة ولمسافة نقطتين :

نشاط :

نعتبر المتجهة $\vec{u}(x;y;z)$ والنقطتين : $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$

1) أحسب $\vec{u}^2$ واستنتج $\|\vec{u}\|$ بدلالة x و y و z .

2) حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ ثم استنتج AB بدلالة x_A و y_A و z_A و x_B و y_B و z_B.

خاصية :

- لتكن المتجهة $\vec{u}(x;y;z)$ والنقطتين $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ من الفضاء ،

لدينا : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

تمرين تطبيقي :

نعتبر النقط : $A(1;1;1)$ و $B(0;1;0)$ و $C(1;1+\sqrt{2};1)$ في معلم متعامد ممنظم .

بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

III- تطبيقات الجداء السلمي :

1) معادلة ديكارتية لمستوى محدد بنقطة ومتجهة منظمية عليه :

تعريف :

ليكن (P) مستوى ضمن الفضاء و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين من المستوى (P) .

كل متجهة غير منعدمة ومتعامدة مع $\vec{u}$ ومع $\vec{v}$ تسمى متجهة منظمية على (P) .

أي تكون متجهة $\vec{n}$ منظمية على (P) إذا وفقط إذا كان $\vec{n}\neq\vec{0}$ و $\vec{u}.\vec{n}=\vec{v}.\vec{n}=0$.

خاصية 1 :

لتكن $\vec{n}$ متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء ،

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ هي المستوى المار من النقطة A و $\vec{n}$ منظمية عليه .

نشاط :

ليكن (P) المستوى المار من النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec{n}(a;b;c)$ متجهة منظمية عليه ، لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء ،

$M\in(P)$ يكافئ $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ يكافئ $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

يكافئ $ax+by+cz+d=0$ حيث $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$

خاصية 2 :

الفضاء منسوب إلى معلم م م ، المعادلة الديكارتية للمستوى المار من النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec{n}(a;b;c)$ متجهة منظمية عليه هي على شكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$

عكسيا، كل معادلة على شكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ هي معادلة ديكارتية لمستوى يقبل $\vec{n}(a;b;c)$ متجهة منظمية عليه .

تمرين تطبيقي :

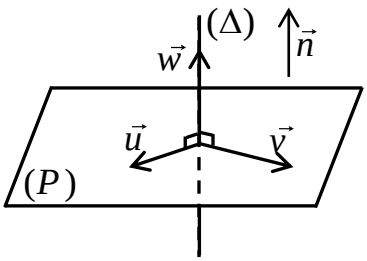
1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة $A(2;-1;3)$ والمتجهة $\vec{n}(3;5;-2)$ منظمية عليه .

2) حدد نقطة من المستوى (Q) ومتجهة منظمية عليه حيث : $(Q):2x-3y+4=0$.

2) تعامد المستقيمات والمستويات في الفضاء :

أ) تعامد مستقيم ومستوى في الفضاء :

خاصية :



ليكن (P) مستوى و (Δ) مستقيم ضمن الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ولتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين من المستوى (P) و $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه و $\vec{w}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)، لدينا :

$(P)\perp(\Delta)\Leftrightarrow(\vec{u}.\vec{w}=0$ و $\vec{v}.\vec{w}=0)\Leftrightarrow$ ($\vec{n}$ و $\vec{w}$ مستقيميتين)

تمرين تطبيقي :

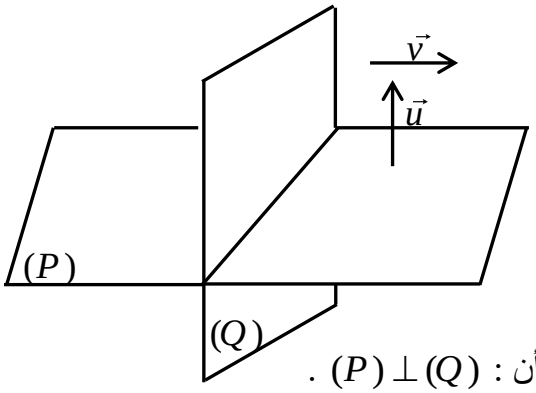
نعتبر في الفضاء المنسوب إلى م م م النقطة $A(-1;0;2)$ والمستوى : $(P):2x+3y-z-3=0$.

1) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة A والعمودي على (P) .

2) حدد مثلوث إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P) .

ب) تعامد مستويين في الفضاء :

خاصية :



ليكن (P) و (Q) مستويان ضمن الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم، ولتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ على التوالي متجهتين منظميتين عليهما ، لدينا : $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

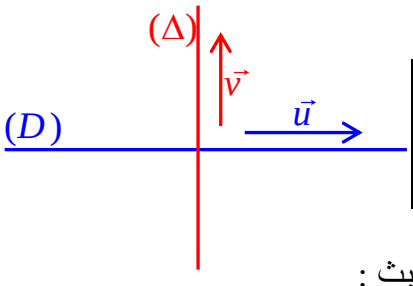
تمرين تطبيقي :

في الفضاء المنسوب إلى معلم م م، نعتبر المستويين :

$(P):2x-y+3z+1=0$ و $(Q):x-y-z+2=0$ بين أن : $(P)\perp(Q)$.

ج) تعامد مستقيمين في الفضاء :

خاصية :



ليكن (D) و (Δ) مستقيمين ضمن الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم، ولتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ على التوالي متجهتين موجهتين لهما ، لدينا : $(D)\perp(\Delta)\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

تمرين تطبيقي :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم م م المستقيمين، بين أن : $(D)\perp(\Delta)$ حيث :

$$(D):\begin{cases}x=4-2t\\y=7+t\\z=3-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})\qquad\text{و}\qquad(\Delta):\begin{cases}x=2t\\y=1+t\\z=5-3t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

IV- مسافة نقطة عن مستوى :

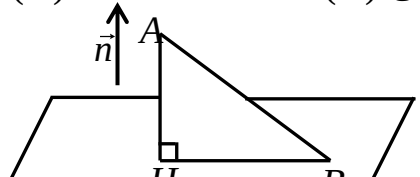
تعريف :

ليكن (P) مستوى ضمن الفضاء و A نقطة من الفضاء و H المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P) .

نسمي مسافة النقطة A عن المستوى (P) المسافة AH ونكتب : $d(A;(P))=AH$

نشاط 1 :

ليكن (P) مستوى و A نقطة من الفضاء و H المسقط العمودي لـ A على (P) ، لتكن B نقطة من (P) .



1) بين أن $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=\vec{n}.\overrightarrow{AH}$ حيث $\vec{n}$ متجهة منظمية على (P) .

2) استنتج أن $AH=\dfrac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{AB}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$.

خاصية 1 :

ليكن (P) مستوى و B نقطة منه و $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه ، و A نقطة من الفضاء : $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{AB}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

نشاط 2 :

نعتبر في الفضاء النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ والمستوى $(P):ax+by+cz+d=0$ و B نقطة من (P) .

1) نضع $B(x_B;y_B;z_B)$ ، تحقق من أن : $ax_B+by_B+cz_B=-d$

2) حيث $\vec{n}(a;b;c)$ ، أحسب $\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ بدلالة a و b و c و d و x_A و y_A و z_A .

3) استنتج أن : $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

خاصية 2 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم م م نعتبر المستوى $(P):ax+by+cz+d=0$ والنقطة $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$

مسافة النقطة A عن المستوى (P) هي : $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

مثال:

نعتبر المستوى $(P):2x+3y+6z+3=0$ و النقطة $A\left(4;3;-1\right)$ ، أحسب $d\left(A;(P)\right)$

V- دراسة تحليلية للفلكة :

تذكير : في جميع الفقرات المتبقية الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

تعريف :

لتكن Ω نقطة من الفضاء و R عدد حقيقي موجب قطعا ، الفلكة $S(\Omega;R)$ التي مركزها Ω وشعاعها R هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M=R$.

1) معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركزها وشعاعها :

نشاط :

نعتبر الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ وشعاعها R .

ما هو الشرط اللازم والكافي لكي تنتمي النقطة $M\left(x;y;z\right)$ إلى الفلكة (S) ؟

خاصية :

معادلة الفلكة التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ وشعاعها R هي $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

وتكتب أيضا على شكل : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ حيث $d=a^2+b^2+c^2-R^2$

مثال :

حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1;2;-1)$ وشعاعها $R=\sqrt{3}$.

2) معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

خاصية :

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء ،

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ هي الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$.

مثال :

حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A\left(1;3;0\right)$ و $B\left(1;-5;4\right)$.

VI- دراسة مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ بحيث $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$:

نعتبر المجموعة : $(E)=\left\{M(x,y;z)/x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0\right\}$ ،

حيث $a;b;c;d\in\mathbb{R}$ ،

نضع $\Omega\left(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2};\frac{-c}{2}\right)$ ، لتكن $M(x,y;z)$ نقطة من الفضاء ، لدينا :

$$M(x,y;z)\in(E)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{4}+y^2+2\frac{b}{2}y+\frac{b^2}{4}+z^2+2\frac{c}{2}z+\frac{c^2}{4}+d=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2-4d)\quad (*)$$

العلاقة (*) تحيلنا على ثلاث حالات مختلفة هي :

ـ ا>

تمرين تطبيقي :

حدد المجموعات :

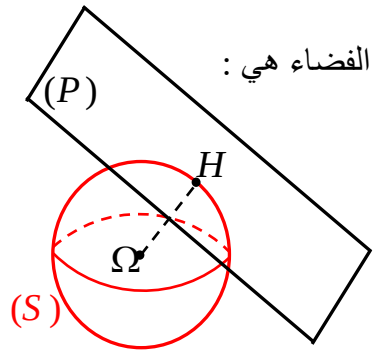
$$(E_1)=\left\{M(x,y;z)/x^2+y^2+z^2-x+3y-\frac{3}{2}=0\right\}$$

$$(E_2)=\left\{M(x,y;z)/x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+7=0\right\}$$

$$(E_3)=\left\{M(x,y;z)/x^2+y^2+z^2-x+2y-z+\frac{3}{2}=0\right\}$$

6- الأوضاع النسبية لمستوى وفلكة :

الأوضاع النسبية لفلكة (S) مركزها Ω وشعاعها R مع مستوى (P) في الفضاء هي :



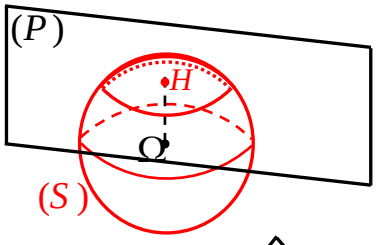
أ) إذا كان $d(\Omega;(P))=R$:

فإن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) في نقطة وحيدة H ،

هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (P) ،

أي : $(S)\cap(P)=\{H\}$ ، وفي هذه الحالة نقول :

المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H.

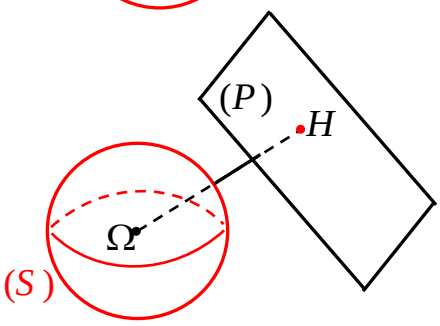


ب) إذا كان $d(\Omega;(P))<R$:

فإن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة ،

مركزها H المسقط العمودي للنقطة Ω على (P) ،

وشعاعها $r=\sqrt{R^2-d^2}$ حيث $d=d(\Omega;(P))$.



ج) إذا كان $d(\Omega;(P))>R$:

فإن المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S) ،

أي : $(S)\cap(P)=\phi$.

تمرين تطبيقي :

نعتبر الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1;-1;0)$ وشعاعها $R=5$.

حدد الوضع النسبي للمستوى (P) بالنسبة للفلكة (S) ثم حدد تقاطعهما في كل حالة من الحالات التالية :

1) $(P): x-2y+2z+6=0$

2) $(P): -4x+8y+z-42=0$

3) $(P): x-4y+2\sqrt{2}z+20=0$

3) معادلة ديكارتية لمستوى مماس لفلكة في نقطة معلومة :

خاصية:

لتكن (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها R و A نقطة من الفلكة (S).

يوجد مستوى وحيد (P) مماس للفلكة (S) في A وهو المستوى المار من A والمتجهة $\overrightarrow{\Omega A}$ منظمية عليه .

مثال :

نعتبر في الفضاء النقطة $A(2;1;-2)$ والفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1;2;-1)$ وشعاعها $R=\sqrt{3}$.

تحقق من أن $A\in(S)$ ثم حدد معادلة المستوى المماس للفلكة (S) في النقطة A .