09 Chapitre 9 : Géométrie analytique dans l'espace

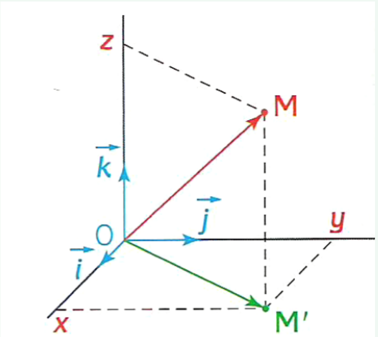
I Rappel

1 Repère et base

Propriété et définition

Dans l'espace $(\mathcal{E})$ un point O et trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$

$$(\forall M \in (\mathcal{E}))(\exists!(x, y, z) \in \mathbb{R})\ \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Le quadruplet $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ s'appelle un repère de l'espace $(\mathcal{E})$
Le triplet $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ s'appelle une base de l'espace vectoriel $(\mathcal{V}_3)$
Le triplet (x, y, z) s'appelle les cordonnées du point M
Le triplet (x, y, z) s'appelle les cordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$
x est appelé l'abscisse du point M
y est appelé l'ordonnée du point M
z est appelé la cote du point M

2 Vecteurs colinéaires

Propriété

Dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on considère le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$

1. les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$
2. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$,alors $\begin{cases} x = \lambda a + x_0 \\ y = \lambda b + y_0 \\ z = \lambda c + z_0 \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite $\mathfrak{D}(A;\vec{u})$
3. les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$
4. Si tous les composants du vecteur $\vec{u}$ sont non nuls alors $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ sont deux équations cartésiennes de la droite $(D) = \mathfrak{D}(A;\vec{u})$

3 Vecteurs coplanaires

Propriété

Dans l'espace muni d'un repère on considère le point $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$

1. les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe 2 réels α et β tel que $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ ou $\vec{v}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{w}$
2. Une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}(A;\vec{u};\vec{v})$ est $\begin{cases}x=\alpha a+\beta a'+x_0\\y=\alpha b+\beta b'+y_0\\z=\alpha c+\beta c'+z_0\end{cases}$
3. les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si
$$det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\\a''&b''&c''\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}b'&b''\\c'&c''\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}a'&a''\\c'&c''\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}a'&a''\\b'&b''\end{vmatrix}=0$$
4. Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non coliéaires alors $\alpha x+\beta y+\gamma z+\lambda=0$ est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}(A;\vec{u},\vec{v})$ avec $\alpha=\begin{vmatrix}b&b'\\c&c'\end{vmatrix}$, $\beta=-\begin{vmatrix}a&a'\\c&c'\end{vmatrix}$, $\gamma=\begin{vmatrix}a&a'\\b&b'\end{vmatrix}$ et $\lambda=-\alpha x_0-\beta y_0-\gamma z_0$

II Produit scalaire

Dans ce paragraphe et le paragraphe suivant du cours, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1 Formules analytiques

Propriété

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère les points $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=aa'+bb'+cc'$$

$$||\vec{u}||=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$$

2 Applications du produit scalaire

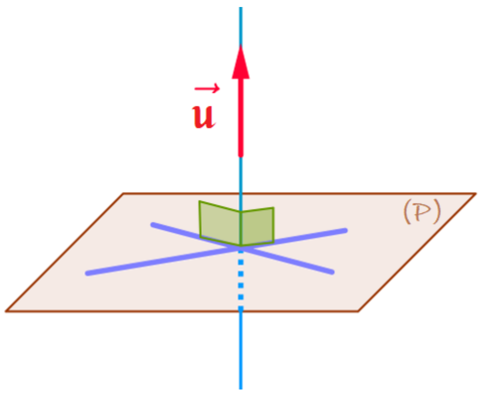
Orthogonalité de droites et de plans de l'espace

Orthogonalité de deux droites

Les droites (D_1) et (D_2) dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = O$

Orthogonalité de droite et plan

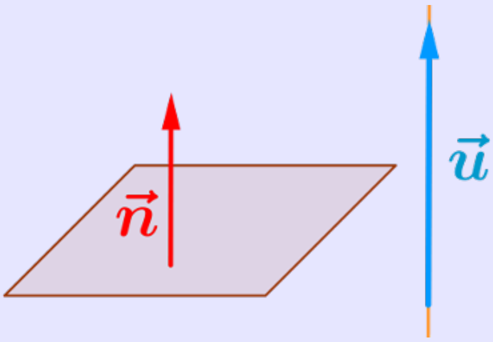
Dans l'espace on considère une droite (D) dirigée par un vecteur $\vec{u}$ et un plan (P) dirigé selon $\vec{v}$ et $\vec{w}$
On dit que (D) et (P) sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = O$ et $\vec{u}\cdot\vec{w} = O$



Le vecteur $\vec{u}$ est appelé vecteur normal du plan (P)

Remarques

1. Si $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (P) alors tout vecteur colinéaire avec $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (P)



2. Soient $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (P) et $\overrightarrow{n'}$ est un vecteur normal du plan (P')
Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ alors (P) et(P') sont parallèle

3. Si $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (P) alors $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ tels que A et B appartiennent à (P)

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace

l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$
Une équation cartésienne de ce plan, s'écrit sous la forme : $ax+by+cz+d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$

Exercice résolu

énoncé

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(1;1;1)$ et $B(3;0;1)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$
2. Déterminer la représentation paramétrique de la droite (D) passant par B et perpendiculaire à (P)
3. Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point B sur le plan (P)
4. En déduire la distance du point B au plan (P)

Solution

1. Une équation de (P)

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in (P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)-(y-1)+(z-1)=0 \\ &\Leftrightarrow x-y+z-1=0 \end{aligned}$$

2. Puisque $(D) \perp (P)$ alors (D) est dirigée par le vecteur $\vec{n}$
$M(x;y;z) \in (D) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R})\overrightarrow{BM} = t\vec{u}$

$$(D) : \begin{cases} x = t+3 \\ y = -t \\ z = t+1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. $H\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (D) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t+3 \\ y = -t \\ z = t+1 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow t+3+t+t+1-1=0 \Leftrightarrow t=1$

Donc $(4;-1;2)$ est le triplet de coordonné du point H

$$D(B;(P)) = BH = \sqrt{(4-3)^2+(-1-0)^2+(2-1)^2} = \sqrt{3}$$

3 Distance d'un point à un plan

Propriété

Soit (P) plan d'équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace.
La distance du point A au plan (P) est :

$$d\left(A;(P)\right)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exemple

Calculons la distance du point $A(1;0;-1)$ au plan (P) passant par le point $B(2;3;4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Déterminons tout d'abord l'équation du plan (P) : le plan (P) étant l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0$

$$(P)\ :\ (x-2)+(y-3)+(z-4)=0$$

$$(P)\ :\ x+y+z-9=0$$

Donc $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{|1+0-1-9|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$

III Étude analytique de la sphère

1 équation d'une sphère

Sphère définie par son centre et son rayon

L'équation cartésienne de la spère S de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon r est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Exemple

☛ L'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(1;2;-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$ est :

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\sqrt{5}^2$$

Qu'on peut écrire aussi : $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z+1=0$
☛ Déterminant l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(2;1;-2)$ et qui passe par le point $A(6;4;0)$
On a $R=\Omega A=\sqrt{(6-2)^2+(4-1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{29}$
Donc l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(2;1;-2)$ et qui passe par le point $A(6;4;0)$ est :

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=\sqrt{29}^2$$

Qu'on peut écrire aussi : $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z-20=0$

Remarques

Soient a, b, c et d des nombres réel
L'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient $x^2+y^2+z^2+-2ax-2by-2cz+d=0$ est une sphère si et seulement si $a^2+b^2+c^2-d\geq 0$

Sphère définie par un de ses diamètres

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux pont de l'espace $(\mathcal{E})$
L'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ est la sphère (S) dont l'un de ses diamètres est $[A,B]$
Donc l'équation cartésienne de la sphère S est :

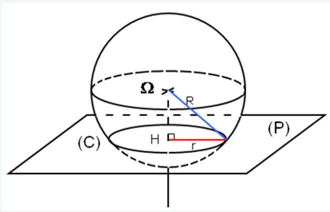
$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

2 Position relative d'une sphère et un plan

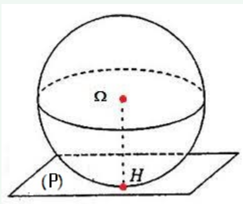
Propriété

Soients (P) un plan et (S) la sphère de centre Ω et de rayon R
L'intersection du plan (P) et la sphère (S) est :

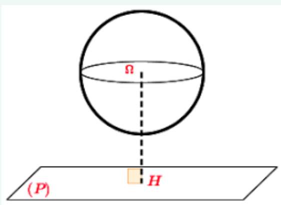
- *un cercle* si $d(\Omega,(P))<R$



- *un singleton* si $d(\Omega,(P))=R$ on dit dans ce cas que le plan (P) est tangent à la sphère (S)



- *l'ensemble vide* si $d(\Omega,(P))>R$



Remarques

Dans le cas où $d(\Omega,(P)) < R$ on a le rayon r de l'intersection de (P) et (S) est $\sqrt{R^2 - d(\Omega,(P))^2}$ et son centre est le projeté orthogonal de Ω sur (P)

Exercice résolu

énoncé

Dans l'espace $(\mathcal{E})$ on considère les points $A(1;0;-3)$, $B(0;1;-4)$ et $C(1;1;-7)$

1. Donner une equation cartésienne du plan (ABC)
2. Soit (Γ) le cercle définie par $\begin{cases} y = 3 \\ x^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$
   - **a)** Donner le rayon et centre de (Γ)
   - **b)** Donner l' equation de la sphère (S) qui contient (Γ) et dont le centre appartient au plan (ABC)

Solution

1. Les vecteur $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC)

   $M(x;y;z) \in (ABC) \Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA}) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & -1 & -1 \\ z+3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ Donc $(ABC)\ :\ 3x + 4y + z)0$

2. **a)** On a (Γ) : $\begin{cases} y = 3 \\ (x-1)^2 + (z-1)^2 = 9 \end{cases}$

   Donc (Γ) est le cercle de centre $\omega(1;3;1)$ et de rayon $r = 3$

   b) Ω le centre de la sphère (S) appartient à la droite (D) qui passe par ω et perpendiculaire au plan (P) d'équation $y = 3$

   Donc Ω à pour coordonnés $(1; t+3; 1)$ avec $t \in \mathbb{R}$

   Comme $\Omega \in (ABC)$ on a donc $3 \times 1 + 4(t+3) + 1 = 0$ d'où $t = -4$ donc $\Omega(1;-1;1)$

   On a $d = D(\Omega,(P)) = \dfrac{|-1-3|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = 4$

   Soit R le rayon de la sphère (S)

   On a $R^2 = r^2 + d^2 = 25$ donc $R = 5$

IV Produit vectoriel

1 Orientation de l'espace

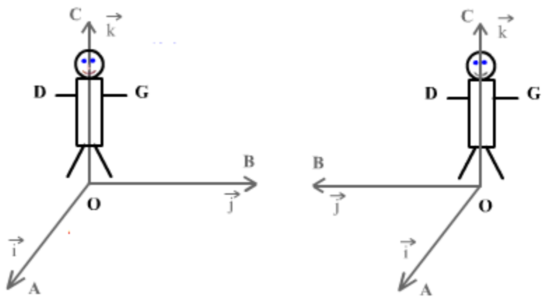
Soit un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace. Notons $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$

Orienter l'espace, c'est distinguer les repères "directs" de ceux qui sont "indirects", parmi les règles permettant de les différencier : "la règle du bonhomme d'Ampère"

Le bonhomme d'Ampère est un homme imaginaire ses pieds sont sur le point O et sa tête vers le point C et qui regarde vers le point A, alors on a deux situations pour le point B :

Situation 1 : le point B se trouve à *gauche* de notre bonhomme et on dit dans ce cas que le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est direct ou positif

Situation 2 : le point B se trouve à *droite* de notre bonhomme et on dit dans ce cas que le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est indirect ou négatif



Repère direct   Repère indirect

Définition

On dit que la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est directe si le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est direct

Remarque

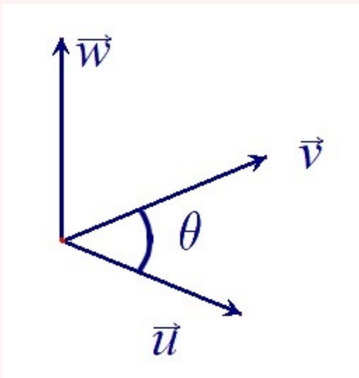
Si la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est directe alors les bases $(\vec{j};\vec{k};\vec{i})$ et $(\vec{k};\vec{i};\vec{j})$ le sont aussi tandis que les bases $(\vec{j};\vec{i};\vec{k})$, $(\vec{i};\vec{k};\vec{j})$ et $(\vec{k};\vec{j};\vec{i})$ sont indirectes

2 Produit vectoriel

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_3$ et O, A et B trois points de l'espace $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$
Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans cet ordre, est le vecteur qu'on note $\vec{u}\wedge\vec{v}$ qui vérifie :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaire alors
  - $(\vec{u}\wedge\vec{v})$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
  - $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base directe
  - $||\vec{u}\wedge\vec{v}|| = ||\vec{u}||\times||\vec{v}||\sin\theta$ où $\theta = mes[\widehat{AOB}]$



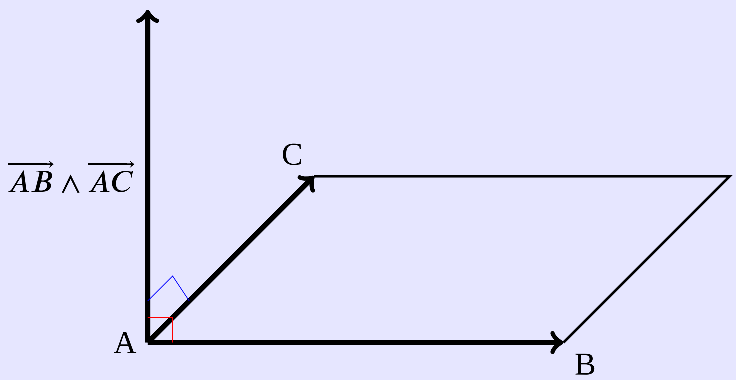
Exemple

Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{V}_3$

- $\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$
- $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i};\quad \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$
- $\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k};\quad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i};\quad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$

Remarques

Soient A, B et C trois points de l'espace $\mathcal{E}$ Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est *normal* sur le plan (ABC)



Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_3$
$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Propriété

Le produit vectoriel est un produit distributif par rapport à la somme et anticommutatif :
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{V}_3$ et pour tout nombre réel α

- Distributivité par rapport à l'addition :

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$$

- Compatibilité avec la multiplication par un scalaire

$$(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$$

- Antisymétrie

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$$

3 Expression analytique du produit vectoriel

On considère dans tout ce qui suit que l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Propriété

Soient $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs de l'espace

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$$

Exemple

Calculons le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}(1;-2;-1)$ et $\vec{v}(3;1;2)$
On a

$$\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} \\ &= -3\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k}\end{aligned}$$

Déduisons une équation cartésienne du (P) plan passant par $A(0;3;1)$ est dirigé selon les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
On sait que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est normal sur (P)
Donc $(P)\,:\,-3x-5y+7z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}A(0;3;1)\in(P) &\Leftrightarrow -3\times 0-5\times 3+7\times 1+d=0 \\ &\Leftrightarrow d=8\end{aligned}$$

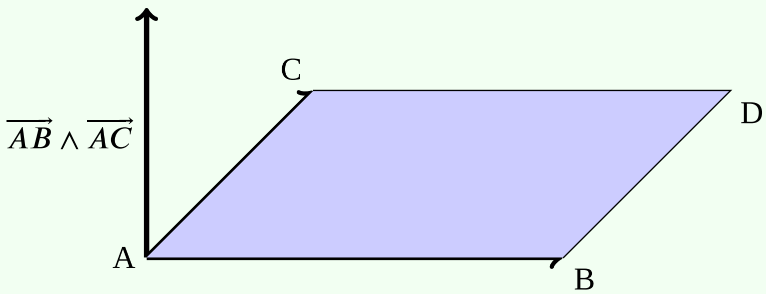
4 Applications du produit scalaire

Calcul de surface

Propriété

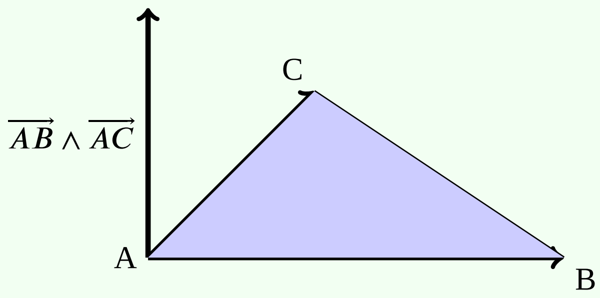
- La surface S d'un parallélogramme $(ABDC)$ est :

$$S=||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||$$



- La surface S' d'un triangle ABC est :

$$S = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$$



Exemple

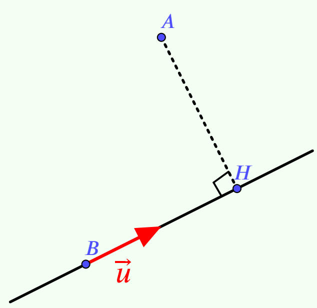
Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère les points $A(1;-1;1)$, $B(2;3;1)$ et $C(1;2;3)$
Calculons la surface S du triangle ABC On calcule tout d'abord $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix}\vec{i} & 1 & 0\\ \vec{j} & 4 & 3\\ \vec{k} & 0 & 2\end{vmatrix} \qquad (par\ abus\ d'\ominus criture)\\ &= \begin{vmatrix}4 & 3\\0 & 2\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 0\\4 & 3\end{vmatrix}\vec{k}\\ &= 8\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\end{aligned}$$

Distance d'un point à une droite de l'espace

Propriété

(D) une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par B A un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur (D)
La distance du point A à la droite (D) est le réel positif :



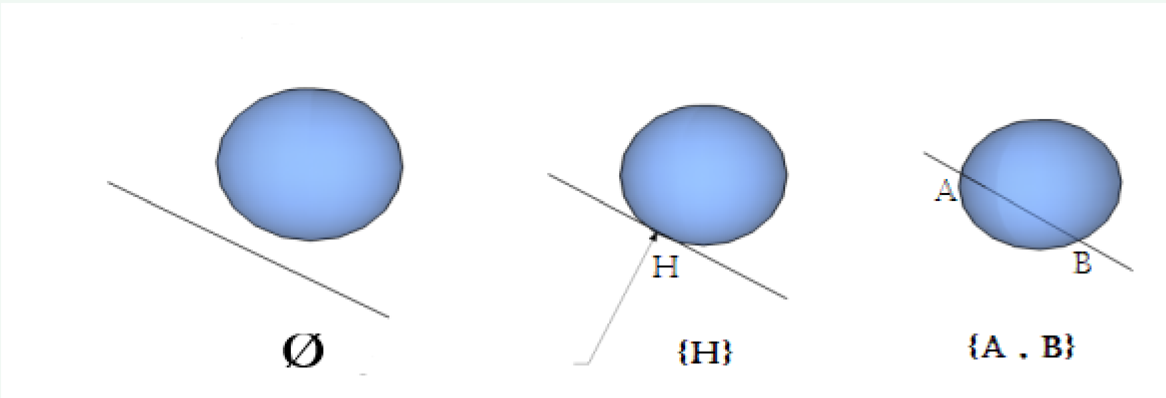
$$d(A;(D)) = AH = \frac{||\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||}$$

Position relative d'une droite et d'une sphère

Propriété

Soient (D) une droite et (S) la sphère de centre Ω et de rayon R
L'intersection de droite (D) et la sphère (S) est :

- *l'ensemble vide* si $d(\Omega, (D)) > R$
- *un singleton* si $d(\Omega, (D)) = R$ on dit dans ce cas que la droite (D) est tangente à la sphère (S)
- *une paire* si $d(\Omega, (D)) < R$



Exercice résolu

énoncé

Dans l'espace $(\mathcal{E})$ on considère la sphère (S) de centre centre de $\Omega(0;3;-2)$ et de rayon $R = 3$ et la droite (D) passant par le point $A(0;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

1. Calculer $d(\Omega;(D))$, en déduire que la droite (D) est tangente à la la sphère (S)
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (D)
3. Déterminer les coordonnées du point H intersection de de la droite (D) et la sphère (S)

Solution

1. On a

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\Omega A} & \vec{u} \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

D'où $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$

$$d(\Omega;(D)) = \frac{||\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{3^2(1 + 2^2 + 2^2)}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3 = R$$

Donc la droite (D) est tangente à la la sphère (S)

2 $(D) : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t + 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$

3

$$H\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (S) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t + 1 \\ x^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 3^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2t)^2 + (t-3)^2 + (-2t+1+2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + t^2 - 6t + 9 + 4t^2 - 12t + 9 = 9$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 18t + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(t-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1$$

Pour obtenir les coordonnées du point H on remplace la valeur de t dans le système puis on s'assure que H appartient à (S)
Donc $(2; 1; -1)$ sont les coordonnées du point H intersection de (D) et (S)