

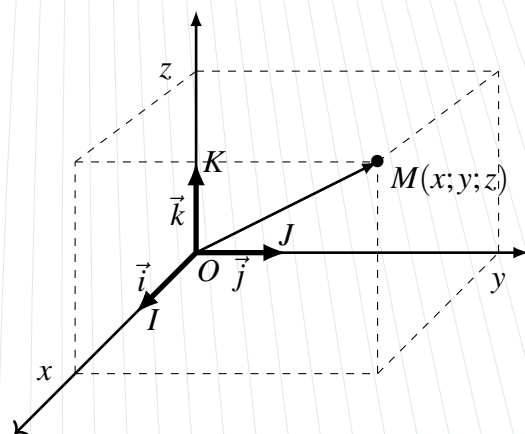
Géométrie analytique dans l'espace

I. Produit scalaire dans l'espace et ses applications

1. Repérage de l'espace et base d'un repère

On considère un point O et trois vecteurs **non coplanaires** \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} dans l'espace \mathcal{V}_3 . Alors pour tout point $M \in \mathcal{V}_3$ il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Soient I, J et K trois points de l'espace \mathcal{V}_3 tels que $\vec{OI} = \vec{i}$, $\vec{OJ} = \vec{j}$ et $\vec{OK} = \vec{k}$ on a :



Définition 1 : (Repère et base du repère)

- ① Le quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'appelle un repère dans l'espace \mathcal{V}_3 de trois dimensions
- ② Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite orthonormé si : $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$
- ③ Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'appelle base du repère ou de l'espace \mathcal{V}_3
- ④ Le triplet (x, y, z) s'appelle coordonnées du point M ou du vecteur \vec{OM} . Dans ce cas on appelle x l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote du point M

Dans tous ce qui suite du cours, on rapporter l'espace \mathcal{V}_3 à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

2. Vecteurs colinéaires, équation paramétrique d'une droite

Propriété 1 : (Deux vecteurs colinéaires)

On considère deux vecteurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ dans l'espace \mathcal{V}_3

- ① Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$
- ② Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$

Astuce : Dans le cas où les composantes de \vec{u} et \vec{v} non nuls, alors le coefficient α de colinéarité :

$$\alpha = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Sinon les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires

Définition 2 : (Équation d'une droite $D(A, \vec{u})$)

On considère dans l'espace \mathcal{V}_3 une droite (D) passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et orienté par le vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$. On le note par $D(A, \vec{u})$

① Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors pour tout $M(x, y, z) \in (D)$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

② Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $M(x, y, z) \in (D) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ est appelé représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$

③ Si tous les composants du vecteur \vec{u} sont non nuls alors $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ s'appelle deux (ou double) équations cartésiennes de la droite $D(A, \vec{u})$

Exemple 1. Soit (D) une droite passant par $A(1, -2, 4)$ et dont le vecteur directeur $\vec{u}(3, 2, -1)$

① Pour tout $M(x, y, z) \in D(A, \vec{u})$ on a $\overrightarrow{AM} \parallel \vec{u}$, donc

$$\exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases} : \forall t \in \mathbb{R}$$

La représentation paramétrique de la droite (D)

② Le double équations cartésiennes de (D) est $D(A, \vec{u}) : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$

3. Vecteurs coplanaires, équation paramétrique d'un plan

Propriété 2 : (Trois vecteurs coplanaires)

On considère trois vecteurs $\vec{u}(a, b, c)$, $\vec{v}(a', b', c')$ et $\vec{w}(a'', b'', c'')$ dans l'espace \mathcal{V}_3

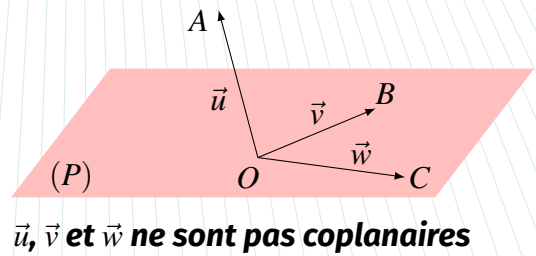
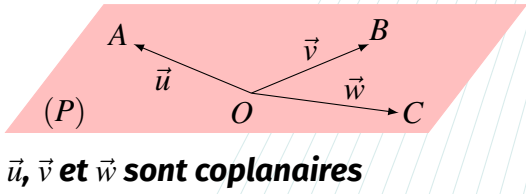
① Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si : $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

② Autrement. Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Avec :}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} = b'c'' - b''c' \quad \left| \quad \cdot \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} = a'c'' - a''c' \quad \left| \quad \cdot \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} = a'b'' - a''b' \right.$$

Interprétation 1. Soient \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace \mathcal{V}_3 . Alors deux cas se présentent :

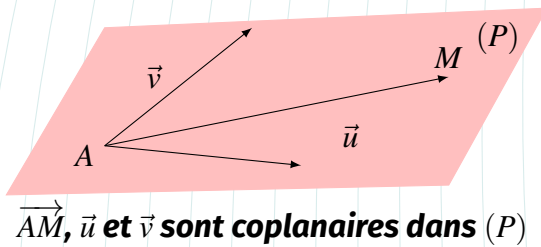


Définition 3 : (Équation d'un plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$)

On considère dans l'espace \mathcal{V}_3 un plan (P) passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et orienté par les deux vecteurs directeurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$. On le note $P(A, \vec{u}, \vec{v})$

- ① Si \vec{u} et \vec{v} non colinéaires alors pour tout $M(x, y, z) \in (P)$ il existe $t, t' \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$
- ② Si \vec{u} et \vec{u} non colinéaires alors le système
$$\begin{cases} x = x_0 + ta + t'a' \\ y = y_0 + tb + t'b' \\ z = z_0 + tc + t'c' \end{cases}$$
 où $t, t' \in \mathbb{R}$ est appelé représentation paramétrique du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$
- ③ Si \vec{u} et \vec{v} non colinéaires alors $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} (z - z_0) = 0$ est l'équation cartésienne du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$

Interprétation 2. Soient $A(x_0, y_0, z_0)$ un point et $\vec{u}(a, b, c), \vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs de l'espace



Alors il existe $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} : \forall t, t' \in \mathbb{R}$$

4. Expression analytique du produit scalaire dans l'espace

Définition 4

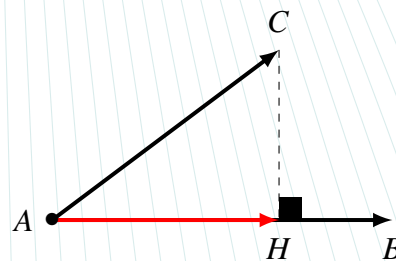
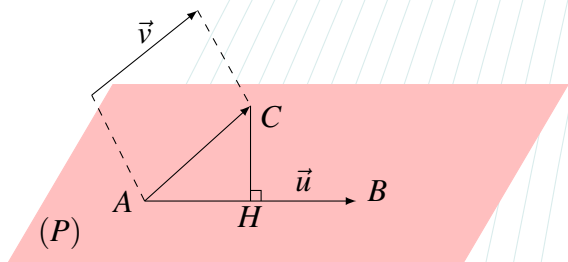
Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs et A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$. Il existe un et un seul plan (ABC) passant par les points A, B et C . Alors le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} dans

l'espace \mathcal{V}_3 est le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ dans le plan (ABC) , on écrit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

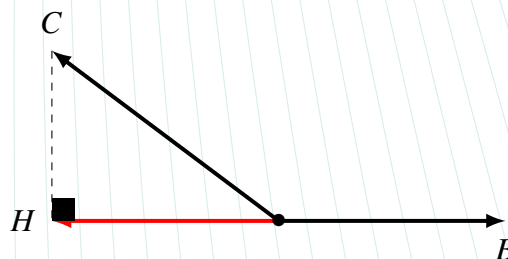
Interprétation 3. Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan se prolonge dans l'espace \mathcal{V}_3

① Le produit $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ne dépend pas de A, B et C



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AH \times AB$$

- Si \vec{AH} et \vec{AB} ont les sens contraires alors :



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AH \times AB$$

② Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

③ Soit H le projeté de C sur (AB)

- Si \vec{AH} et \vec{AB} ont le même sens alors :

Propriété 3

On considère deux vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ dans l'espace \mathcal{V}_3 . Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{Pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \text{ on a } \|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$$

$$\text{Inégalité triangulaire : } \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Propriété 4 : (Symétrie et linéarité)

Soient \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace \mathcal{V}_3 . On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Propriété 5

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace \mathcal{V}_3 . Alors

• On a les coordonnées : $\vec{OA}(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

• La distance : $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Définition 5 : (Orthogonalité)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs et A, B et C trois points dans l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

- ① On dit que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux et on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$ si
 - Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires
 - Ou l'un des vecteurs \vec{u} et \vec{v} soit nul ($\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$)
- ② Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Application 1. ① Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en déduire $\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$ sachant que $\vec{u}(3, 9, \sqrt{10})$ et $\vec{v}(1, -2, 1)$

② Soient $A(1, 1, 1); B(2, 0, -2)$ et $C(1, -2, 2)$ trois points de l'espace

▢ a Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis AB et AC

▢ b Déduire la nature du triangle ABC

5. Applications : ensemble des points $\{M \in \mathcal{V}_3 : \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k : k \in \mathbb{R}\}$

On considère un vecteur $\vec{u}(a, b, c)$ non nul et un point $A(x_A, y_A, z_A)$ dans l'espace \mathcal{V}_3 . On pose :

$$(P) = \{M(x, y, z) \in \mathcal{V}_3 : \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k \in \mathbb{R}\}$$

Alors $M(x, y, z) \in (P) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$

$$\Rightarrow (x - x_A, y - y_A, z - z_A) \cdot (a, b, c) = k$$

$$\Rightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = k$$

$$\Rightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = k$$

$$\Rightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad ; \quad \text{avec} \quad d = -ax_A - by_A - cz_A - k$$

Puisque \vec{u} non nul alors (P) est un plan dont l'équation cartésienne $(P) : ax + by + cz + d = 0$

Propriété 6

Soient $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point dans l'espace \mathcal{V}_3 . L'ensemble des points $\{M \in \mathcal{V}_3 : \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k : k \in \mathbb{R}\}$ est un plan (P) dont l'équation cartésienne

$$(P) : ax + by + cz + d = 0$$

où $d = -ax_A - by_A - cz_A - k$

Exemple 2. L'ensemble de points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = -2$ tel que $\vec{u}(5, 3, -2)$ et $A(1, 1, 1)$ est un plan d'équation cartésienne

$$(P) : 5x + 3y - 2z - 4 = 0$$

avec $d = -(5 \times 1 + 3 \times 1 - 2 \times 1) - (-2) = -4$

6. Applications : équation d'un plan défini par un vecteur normal

Définition 6 : (Vecteur normale)

Soit \vec{n} un vecteur non nul de l'espace \mathcal{V}_3 . On dit que \vec{n} est un vecteur normal au plan (P) si et seulement si \vec{n} est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires dirigent le plan (P)

$$i.e : \vec{n} \perp (P) \Leftrightarrow \forall A, B \in (P) : \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Définition 7 : (Équation d'un plan $P(A, \vec{n})$)

Soient A un point et \vec{n} un vecteur non nul de l'espace. L'ensemble des points $M(x, y, z) \in \mathcal{V}_3$ vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan (P) passant par le point A dont le vecteur normal \vec{n}

Exemple 3. Soient $\vec{u}(1, 0, 1)$ et $\vec{v}(3, -4, 0)$ deux vecteurs de l'espace \mathcal{V}_3 . On considère un plan (P) dirigé par les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

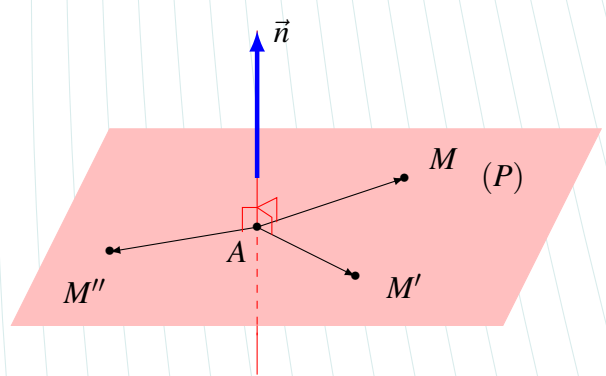
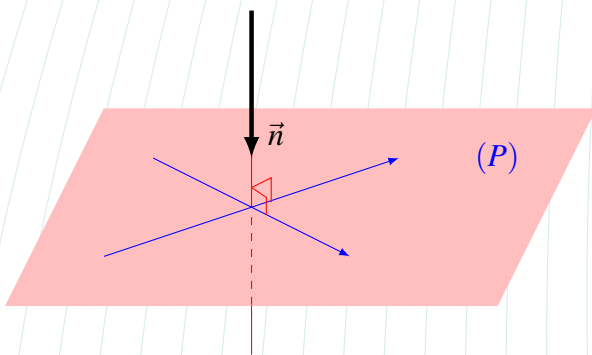
• Le vecteur $\vec{n}(-4, 3, 4)$ est normal au plan (P) . En effet.

$$\bullet \vec{n} \cdot \vec{v} = 12 - 12 = 0$$

$$\bullet \vec{n} \cdot \vec{u} = 4 - 4 = 0$$

• Alors $\vec{u} \perp \vec{n}$ et $\vec{v} \perp \vec{n}$, ensuite $\vec{n} \perp (P)$ alors l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \mathcal{V}_3$ vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan passant par A et dont le vecteur normal \vec{n}

Interprétation 4. Le vecteur normal \vec{n} est orthogonale à tout vecteur \overrightarrow{AM} contenant dans le plan (P)



Propriété 7 : (Équation cartésienne d'un plan)

Soient a, b, c et d des nombres réels non nuls. Alors

- L'équation cartésienne du plan (P) dont le vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ est : $ax + by + cz + d = 0$
- Si le plan (P) passe par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ alors la constante : $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$
- Réciproquement. L'ensemble des points $M(x, y, z) \in \mathcal{V}_3$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est un plan dont le vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$
- L'ensemble des points $M(x, y, z) \in \mathcal{V}_3$ vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est plan passant par A

Exemple 4. ① Soit (P) un plan dont le vecteur normal \vec{n} alors

- Le plan (P) d'équation $2x - 3y + z - 5 = 0$ est dont le vecteur normal $\vec{n}(2, -3, 1)$
- Le vecteur $\vec{n}(-1, 2, 1)$ est normal sur le plan $(P) : -x + 2y + z + d = 0$ pour tout $d \in \mathbb{R}$
- L'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $-3x + y + 2z - 1 = 0$ est un plan dont le vecteur normal $\vec{n}(-3, 1, 2)$

② Déterminons l'équation du plan (P) qui passe par le point $A(-1, 2, 1)$ et dont le vecteur normal $\vec{n}(2, 1, -3)$

- **Méthode 1 :** On a $\vec{n}(2, 1, -3) \perp (P)$ alors $(P) : 2x + y - 3z + d = 0$ et donc

$$\begin{aligned}A \in (P) &\Rightarrow (P) : 2x_A + y_A - 3z_A + d = 0 \\&\Rightarrow (P) : 2 \times (-1) + 1 \times 2 - 3 \times 1 + d = 0 \Rightarrow d = 3 \\&\Rightarrow (P) : 2x + y - 3z + 3 = 0\end{aligned}$$

- **Méthode 2 :** Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace \mathcal{V}_3 et qui appartient à (P) alors

$$\begin{aligned}M(x, y, z) \in (P) &\Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\&\Rightarrow (2, 1, -3) \cdot (x + 1, y - 2, z - 1) = 0 \\&\Rightarrow 2(x + 1) + (y - 2) - 3(z - 1) = 0 \\&\Rightarrow 2x + 2 + y - 2 - 3z + 3 = 0 \\&\Rightarrow 2x + y - 3z + 3 = 0\end{aligned}$$

Application 2. Soient $A(1, -4, 0)$ et $B(3, 2, -5)$

- ① Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB) en déduire son équation paramétrique
- ② Déterminer l'équation du plan (P) qui passe par B et perpendiculaire à (AB)
- ③ Déduire la distance $d(A, (P))$ du point A au plan (P)

7. Applications : parallélisme et orthogonalité dans l'espace

Propriété 8

On considère dans l'espace \mathcal{V}_3 deux plans (P) et (Q) de vecteurs normaux respectivement \vec{n}_P et \vec{n}_Q et (D) une droite dont le vecteur directeur \vec{u} . Alors

- | | | |
|--|--|---|
| • $(P) // (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_P$ et \vec{n}_Q sont colinéaires | | • $(P) // (D) \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{u} = 0$ |
| • $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$ | | • $(P) \perp (D) \Leftrightarrow \vec{n}_P$ et \vec{u} sont colinéaires |

Exemple 5. Soient (P) et (Q) deux plans de l'espace d'équations respectives

$$(P) : 2x - 4y + z + 1 = 0 ; (Q) : x + y + 2z - 3 = 0$$

- ① Montrons que $(P) \perp (Q)$. On a $\vec{n}(2, -4, 1) \perp (P)$ et $\vec{n}'(1, 1, 2) \perp (Q)$ alors

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = (2, -4, 1) \cdot (1, 1, 2) = 2 \times 1 - 4 \times 1 + 1 \times 2 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

- ② On considère le plan (L) passant par $C(0, 0, -\frac{1}{2})$ et de vecteur normal $\vec{n}''(1, -2, \frac{1}{2})$.

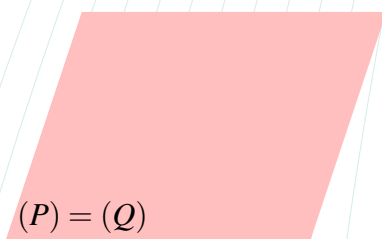
- On a $\vec{n} = 2\vec{n}''$ alors \vec{n} et \vec{n}'' sont colinéaires, ensuite les plans (L) et (P) sont parallèles
- On a \vec{n}'' normal à (L) alors $(L) : x - 2y + \frac{1}{2}z + d = 0$ et puisque $C \in (L)$ alors

$$(L) : x - 2y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x - 4y + z + 1 = 0 \Rightarrow (L) = (P)$$

Les deux plans (L) et (P) sont confondus

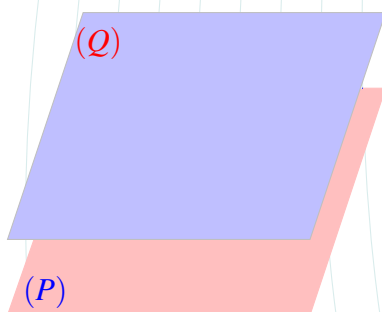
8. Interprétations : positions relatives de droites et de plans dans l'espace

- ① Deux plans sont confondus si leurs vecteurs normaux sont colinéaires et passant par le même point (l'intersection est un plan)

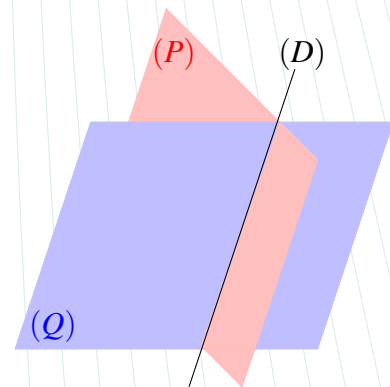


dans ce cas on dit aussi que $(P) // (Q)$

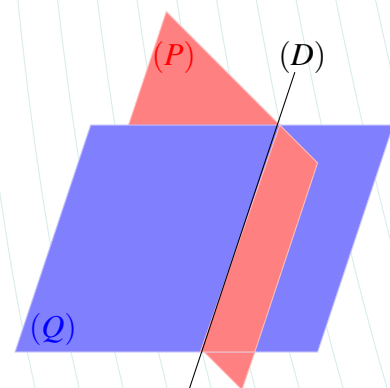
- ② Deux plans parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires (sécantes ou non)



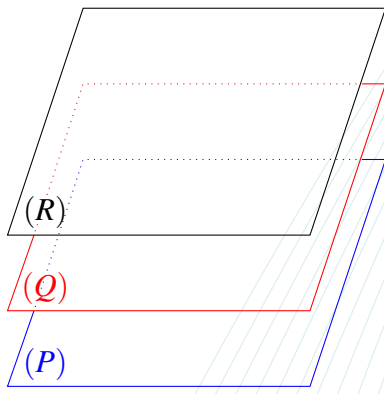
- ③ Deux plans sécantes si leurs vecteurs normaux sont non colinéaires (l'intersection est une droite (D))



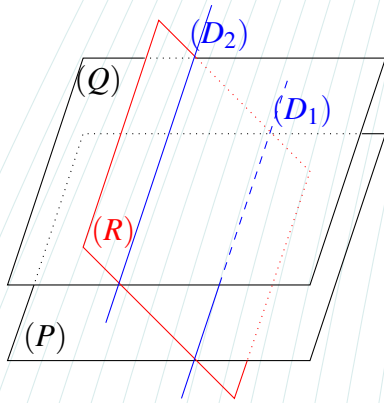
- ④ Deux plans sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux



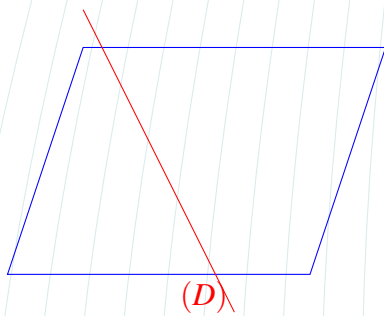
- ⑤ Trois plans parallèles entre eux si leurs vecteurs normaux sont colinéaires deux à deux



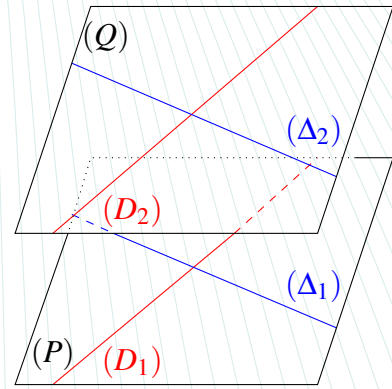
- ⑥ Deux plans strictement parallèles et sécantes au troisième (se coupent suivant deux droites parallèles (D_1) et (D_2))



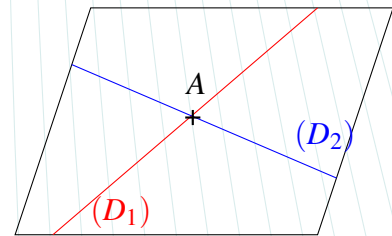
- ⑦ Une droite et un plan sont parallèles si le vecteur normal du plan et le vecteur directeur de la droite sont orthogonaux



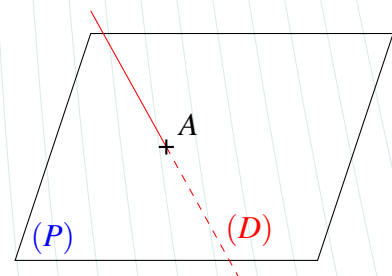
- ⑧ Deux droites non coplanaires (D_1) et (Δ_2) ou (D_2) et (Δ_1) et non parallèles



- ⑨ Deux droites sécantes selon un point A sont deux droites coplanaires



- ⑩ Une droite coupe un plan suivant un point si le vecteur directeur du plan et le vecteur de la droite sont non orthogonaux



Remarque 1

- ① Deux droites perpendiculaires dans l'espace ne sont pas forcément coplanaires.
- ② Deux droites coplanaires dans l'espace sont sécantes ou parallèles

9. Applications : distance d'un point à un plan dans l'espace

Définition 8

Soient (P) un plan passant par le point B et dont le vecteur normal \vec{n} . La distance d'un point A au plan (P) notée $d(A, (P))$ est la distance AH où H est le projeté orthogonale de A sur (P) et on écrit

$$d(A, (P)) = AH = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Propriété 9

La distance du point $A(x_A, y_A, z_A)$ au plan (P) d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule : $d(A, (P)) = AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Exemple 6. Soient (P) le plan passant par l'origine et dont le vecteur normal est $\vec{n} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

- Soit $M(x, y, z)$ un point du plan (P) alors $\vec{OM} \cdot \vec{n} = 0$ donc $(P) : x - 3y + 2z = 0$ l'équation de (P)
- Soit $A(5, 4, -7)$ un point de l'espace, on a : $d(A, (P)) = \frac{|x_A - 3y_A + 2z_A|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{|-21|}{\sqrt{14}} = \frac{21}{\sqrt{14}}$
- Soit $H = (x_H, y_H, z_H)$ le projeté orthogonale du point A sur le plan (P) , alors $(AH) \perp (P)$ ensuite (AH) est la droite qui passe par le point A et perpendiculaire sur le plan (P) au point $H(AH) \cap (P)$.

Alors la droite (AH) est passe par A et dont le vecteur directeur \vec{n} , donc

$$\begin{cases} x_H = x_A + t \\ y_H = y_A - 3t \\ z_H = z_A + 2t \\ x_H - 3y_H + 2z_H = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_H = 5 + t \\ y_H = 4 - 3t \\ z_H = -7 + 2t \\ x_H - 3y_H + 2z_H = 0 \end{cases}$$

On remplace dans l'équation du plan (P) on obtient : $(5 + t) - 3(4 - 3t) + 2(-7 + 2t) = 0$

$$\implies (5 + t) - 3(4 - 3t) + 2(-7 + 2t) = t + 9t + 4t - 21 = 0 \implies 14t - 21 = 0 \implies \frac{21}{14}$$

$$\implies \begin{cases} x_H = 5 + \frac{21}{14} = \frac{91}{14} \\ y_H = 4 - 3 \times \frac{21}{14} = -\frac{7}{14} \\ z_H = -7 + 2 \times \frac{21}{14} = -\frac{36}{14} \end{cases}$$

Comment déterminer le triplet des coordonnées du projeté H ?

Application 3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 1, 1)$ et $B(3, 0, 1)$ et un vecteur $\vec{n}(1, -1, 1)$.

- ① Déterminer l'équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteur normal \vec{n}

- ② Déterminer la représentation paramétrique de la droite (D) passant par B et perpendiculaire à (P)
- ③ Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point B sur le plan (P)
- ④ En déduire la distance du point B au plan (P)

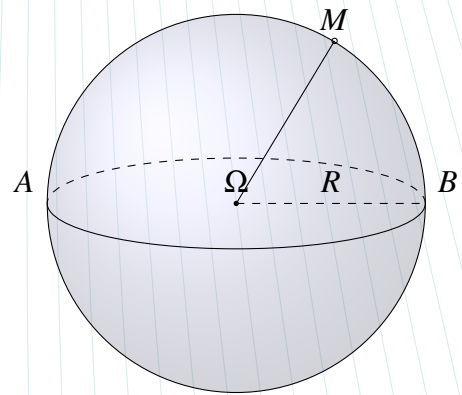
II. Étude analytique d'une sphère dans l'espace \mathcal{V}_3

1. Définition d'une sphère de centre Ω et de rayon R

Définition 9

Soient Ω un point de l'espace \mathcal{V}_3 et R un nombre réel positif. L'ensemble des points $M \in \mathcal{V}_3$ tel que $\Omega M = R$ est appelée sphère de centre Ω et de rayon R et on la note par $S(\Omega, R)$ ou (S)

Interprétation 5. Si A et B deux points de la sphère (S) tel que Ω est le milieu du segment $[AB]$ alors $[AB]$ est un diamètre de la sphère (S) .



Soit $M(x, y, z) \in (S)$ on pose $\Omega(a, b, c)$ on a :

$$\begin{aligned} M \in (S) &\Rightarrow \Omega M = R \\ &\Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R \\ &\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \end{aligned}$$

Alors $(S) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ l'équation cartésienne de la sphère (S) de centre (a, b, c) et de rayon R

Propriété 10

L'équation cartésienne d'une sphère (S) de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon $R > 0$ est

$$(S) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Exemple 7. L'équation de la sphère (S) de centre $\Omega(1, -2, 3)$ est de rayon $R = 5$ est :

$$(S) : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$$

$$(S) : (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) = 25$$

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 - 25 = 0$$

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$$

Application 4. On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 5x + y - 7z - 25 = 0$

- ① Écrire l'équation de la sphère (S) sous forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d$

② Dédurre le rayon R et le centre de la sphère (S)

2. L'ensemble des points $M \in \mathcal{V}_3$ vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

Soient A et B deux points distinctes de l'espace \mathcal{V}_3 et I le milieu du segment $[AB]$. Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$$\begin{aligned}M(x, y, z) \in \mathcal{V}_3 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\&\Leftrightarrow (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = 0 \\&\Leftrightarrow (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) \cdot (-\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) = 0 \\&\Leftrightarrow -\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}^2 = 0 \\&\Leftrightarrow -\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IM}^2 = 0 \\&\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}^2 = \overrightarrow{IA}^2 \Leftrightarrow IM^2 = IA^2 \Leftrightarrow IM = IA\end{aligned}$$

Car $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AI}$. Donc (S) est une sphère de centre I le milieu de $[AB]$ et dont le rayon $IA = \frac{1}{2}AB$

Propriété 11

Soient A et B deux points distinctes de l'espace. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est une sphère (S) dont le diamètre $[AB]$ et dont l'équation cartésienne :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

Exemple 8. Soient $A(1, 3, -3)$ et $B(5, -1, -3)$ deux points de l'espace et (S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ alors (S) est une sphère de centre Ω et de rayon $R = IA$:

$$\Omega \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) = (3, 1, -3) ; IA = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 0^2}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Donc

$$(S) : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$(S) : x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 6z + 9 = 8$$

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 6z + 11 = 0$$

3. L'ensemble des points $M \in \mathcal{V}_3$ vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Propriété 12

Soient (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

tels que a, b, c et d des nombres réels. On pose $\delta = a^2 + b^2 + c^2 - d$ Alors

- ① Si $\delta > 0$ alors (S) est une sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon $R = \sqrt{\delta}$
- ② Si $\delta = 0$ alors $(S) = \{\Omega(a, b, c)\}$ est un point
- ③ Si $\delta < 0$ alors $(S) = \emptyset$ aucun point vérifiant (S)

Remarque 2 : Autre méthode

Pour l'équation de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$$

$$\text{On prend } \delta = \left(\frac{\alpha}{-2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{-2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{-2}\right)^2 - d = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - d$$

Exemple 9. Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dans l'espace tel que

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 3z - 1 = 0$$

$$\text{Alors } M \in (S) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 3z - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)x - 2 \times (1)y - 2\left(\frac{3}{2}\right)z + (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \delta = a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} - (-1) = \frac{9}{2}$$

$$\text{Alors } (S) \text{ est une sphère de centre } \Omega\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right) \text{ et de rayon } R = \sqrt{\delta} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

4. Représentation paramétrique d'une sphère dans l'espace \mathcal{V}_3

Propriété 13

Soient $M(x, y, z)$ un point de l'espace est (S) une sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R . Alors

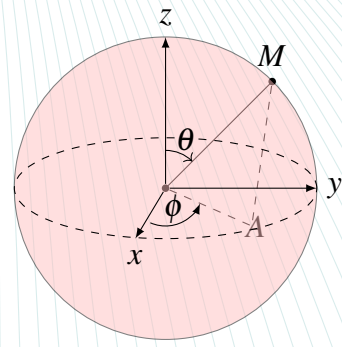
$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + R \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = b + R \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = c + R \cos(\phi) \end{cases} : \theta, \phi \in \mathbb{R}$$

s'appelle représentation paramétrique de la sphère (S) dans l'espace

Exemple 10. Soit (S) la sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Alors (S) est de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1 donc

$$\begin{cases} x = \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = \cos(\phi) \end{cases} : \theta, \phi \in \mathbb{R}$$

est la représentation paramétrique de la sphère (S) dans l'espace



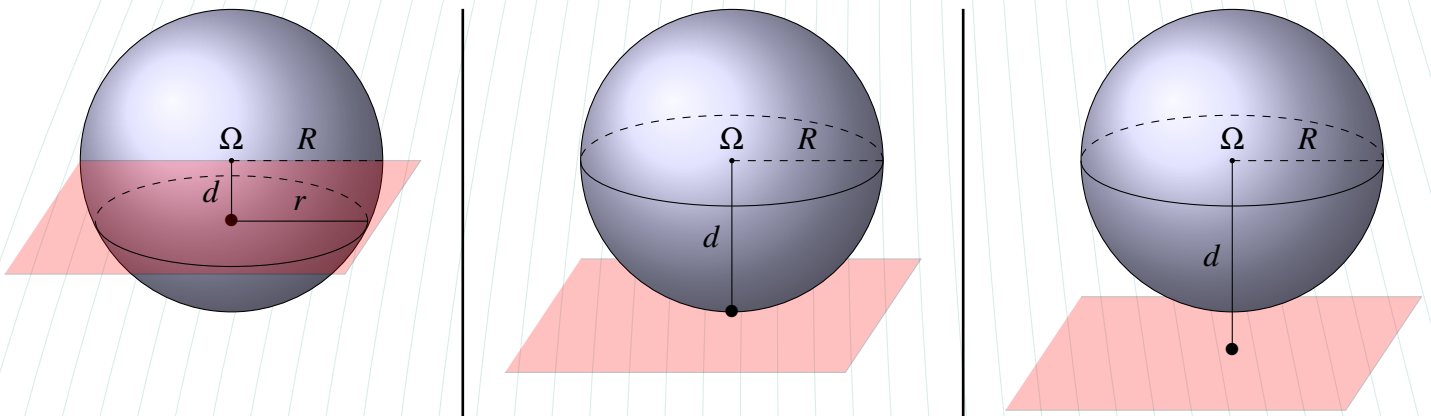
5. Positions relatives d'une sphère et un plan dans l'espace

Propriété 14

Soient (P) un plan et (S) une sphère de centre Ω et de rayon R . Alors

- ① Si $d(\Omega, (P)) < R$ alors le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C)
- ② Si $d(\Omega, (P)) = R$ alors le plan (P) est tangente à la sphère (S) selon un point
- ③ Si $d(\Omega, (P)) > R$ alors le plan (P) ne coupe pas la sphère (S)

Interprétation 6. Soient $d(\Omega, (P))$. Alors trois cas possibles se présentent :



Remarque 3

Dans le cas où $d(\Omega, (P)) < R$ alors le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C)

- Dont le rayon $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega, (P))^2}$
- Dont le centre H le projeté de Ω sur le plan (P)

6. Positions relative d'une sphère et une droite dans l'espace

Propriété 15

Soient (S) une sphère de centre Ω et de rayon R et (D) une droite dans l'espace. On pose H la projection orthogonale du point Ω sur la droite (D) Alors

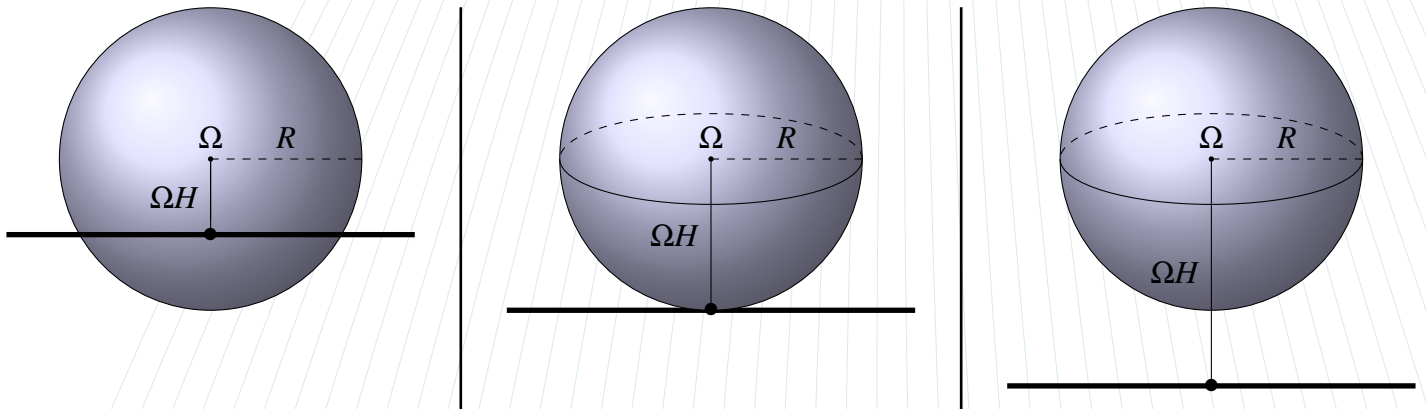
- ① Si $\Omega H < R$ alors la droite (D) coupe la sphère (S) suivant deux points A et B
- ② Si $\Omega H = R$ alors la droite (D) est tangente à la sphère (S) au point H

③ Si $\Omega H > R$ alors la droite (D) ne coupe pas la sphère (S)

Remarque 4

La distance du point Ω à la droite (d) est $d((D), \Omega) = \Omega H$

Interprétation 7. Soit H la projection orthogonale du point Ω sur la droite (D) . Alors trois cas possibles se pressentent :



Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(-3, 1, 2)$, $C(1, 2, -1)$ et (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 12z + 40 = 0$

- ①
 - a) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés
 - b) Vérifier que $\vec{n} = 2\vec{i} + 16\vec{j} + 8\vec{k}$ est un vecteur normal au plan (ABC)
 - c) Dédire que $2x + 16y + 8z - 26 = 0$ est l'équation du plan (ABC)
- ②
 - a) Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(2, 4, -6)$ et de rayon $R = 4$
 - b) Dédire que la distance entre Ω et le plan (ABC) est $d(\Omega, (ABC)) = \frac{1}{3}$
 - c) Dédire que (ABC) coupe (S) selon un cercle (Γ) de rayon R' à calculer
- ③ Soit (D) la droite qui passe par Ω est perpendiculaire au plan (ABC) :
 - a) Déterminer la représentation paramétrique de la droite (D)
 - b) Déterminer le triplet (x_H, y_H, z_H) des coordonnées du centre de (Γ)
 - c) Déterminer l'équation cartésienne du plan (P) parallèle à (ABC) et tangente à (S)

Exercice 2

Soient (S) une sphère de centre $\Omega(3, -2, 1)$ tel que $A(2, 0, 1) \in (S)$

- ① Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S)

- ② Déduire le rayon de (S) puis déterminer son expression paramétrique
- ③ Déterminer l'équation (P) le plan passant par $B(1, 1, 1)$ et dont le vecteur normal $\vec{\Omega A}$
- ④ Calculer la distance de Ω au plan (P) en déduire la position relative de (S) par rapport à (P)
- ⑤ Déterminer le triplet des coordonnées de H le projeté de Ω sur le plan (P)

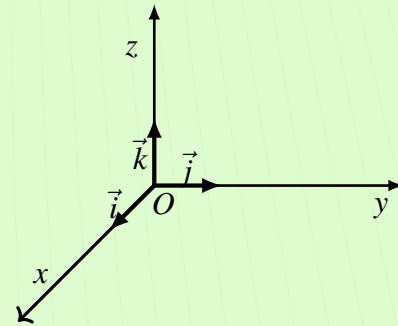
III. Produit vectoriel dans l'espace et ses applications

1. Orientations dans l'espace : trièdre

Définition 10 : (Trièdre)

Trois demi-droites $[OX)$, $[OY)$ et $[OZ)$ de même origine O et non coplanaires déterminant, dans cet ordre un trièdre que l'on note (OX, OY, OZ) .

- ① Les demi-droites $[OX)$, $[OY)$ et $[OZ)$ sont appelées les arêtes du trièdre (OX, OY, OZ)
- ② Les trois plan (XOY) , (XOZ) et (YOZ) sont appelés les faces du trièdre (OX, OY, OZ)
- ③ Le trièdre $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ détermine une base dans l'espace



Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère dans l'espace. Notons $\vec{i} = \vec{OI}$, $\vec{j} = \vec{OJ}$ et $\vec{k} = \vec{OK}$. Dire orienter l'espace, c'est distinguer les repères "directs" de ceux qui sont pas direct ou "indirects".

La règle du "**Bonhomme d'Ampère**" nous permettant de déterminer le sens d'orientation d'un repère.

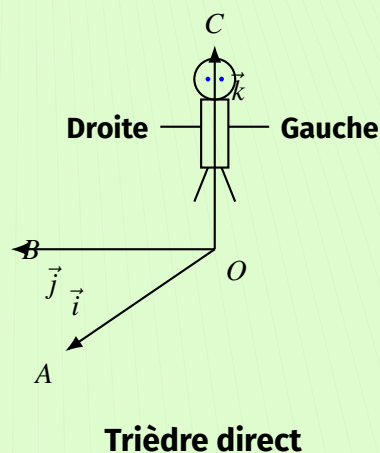
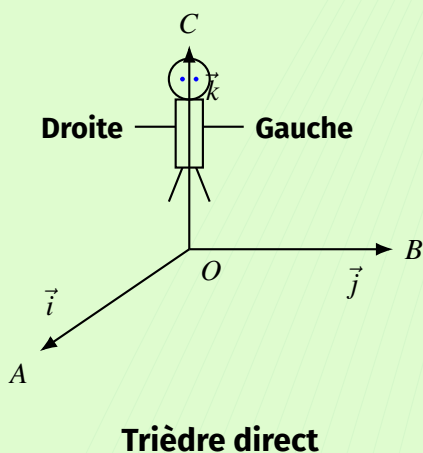
Définition 11 : (Bonhomme d'Ampère)

Le Bonhomme d'Ampère du trièdre $([OX], [OY], [OZ])$ est un personnage imaginaire porté sur l'axe $[OK)$, ses pieds sont à l'origine O et regarde vers l'axe $[OI)$. Alors on a deux situations pour l'axe $[OJ)$:

- Si l'axe $[OJ)$ se trouve à gauche de notre bonhomme, on dit que notre repère est direct ou positif
- Si l'axe $[OJ)$ se trouve à droite de notre bonhomme, on dit que notre repère est indirect ou négatif

Définition 12 : (Base direct)

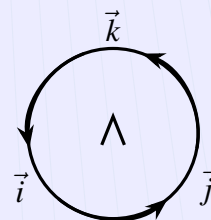
On dit que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe si le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est *direct*. Sinon on dit qu'elle est indirect



Remarque 5

Si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct, alors

- Les bases $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ sont directes
- Les bases $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ et $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ sont indirectes



L'espace \mathcal{V}_3 est orienté positivement lorsqu'il est muni d'un repère direct.

2. Produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace

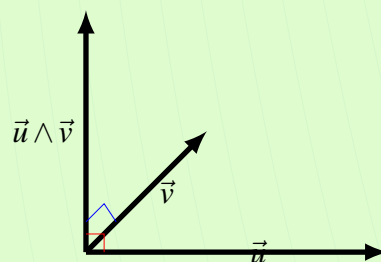
Définition 13

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathcal{V}_3 . Le produit vectoriel des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , dans cet ordre, est le vecteur qu'on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$ qui vérifie :

- ① Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaire alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- ② Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaire alors

- La vecteur $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ est orthogonal à \vec{u} et \vec{v}
- Le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ forme une base directe

- La norme $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$



Remarque 6

- ① Les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- ② Les points A, B et C de l'espace sont alignés si, et seulement si $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$

③ Si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ alors le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ détermine une base orthonormée dans l'espace

Application 5. ① Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace tels que : $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$ Calculons $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

② Dans le cube $ABCDEFGH$ de côté est égale à 1 :

a) Montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{CD} = \vec{0}$ et $\vec{AC} \wedge \vec{EG} = \vec{0}$

b) Déterminer les vecteurs $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$ et $\vec{BA} \wedge \vec{BC}$

Propriété 16 : (Interprétation géométrique du produit vectoriel)

Soient A, B et C trois points non alignés dans l'espace. La norme du produit vectoriel de \vec{AB} et \vec{AC} est égale à la surface du parallélogramme de côtés $[AB]$ et $[AC]$

Propriété 17

Soit \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace, et α un nombre réel. Alors

- Antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$
- $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = (\vec{v} \wedge \vec{u}) + (\vec{w} \wedge \vec{u})$
- $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$

3. Expression analytique du produit vectoriel dans l'espace

Propriété 18

Soit $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base orthonormée de l'espace.

① Pour tout vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ de l'espace on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k} = (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - zx')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

② Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(yz' - zy'; xz' - zx'; xy' - yx')$

4. Équation d'un plan formé par trois points non alignés

Propriété 19

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

- ① Le vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est normal au plan (ABC) .
- ② L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $\vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$ est le plan (ABC)

Application 6. Soit O, A, B et C des points de l'espace. Montrer que : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{OA} \wedge \vec{OB} + \vec{OB} \wedge \vec{OC} + \vec{OC} \wedge \vec{OA}$

Application 7. Soient $\vec{u}(1, -2, 3)$ et $\vec{v}(3, 1, -1)$ Déterminons les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans l'espace.

Application 8. Soit $A(1, 2, -1)$, $B(2, -1, 0)$ et $C(0, -1, -2)$ trois points de l'espace, Établir équation cartésienne du plan (ABC) .

5. Applications : surface d'un triangle ABC

Propriété 20

Soient A, B et C trois points non-alignés de l'espace. Alors

- ① La norme du produit vectoriel de $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est l'aire du parallélogramme formé par \vec{AB} et \vec{AC}
- ② L'aire du triangle ABC est égale à : $S = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

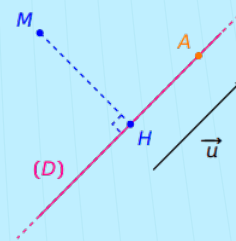
Application 9. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que : $AB = 6$ et $AD = 4$ et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{6}$. Calculer l'aire de $ABCD$

6. Applications : distance d'un point à une droite

Propriété 21

Soit (D) une droite passant par le point A et dont le vecteur directeur \vec{u} . Alors pour tout M un point de l'espace, on a :

$$d(M, (D)) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$



Application 10. Calculer la distance de $M(-1; 0; 1)$ à la droite (D) définie par :
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -1-2t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

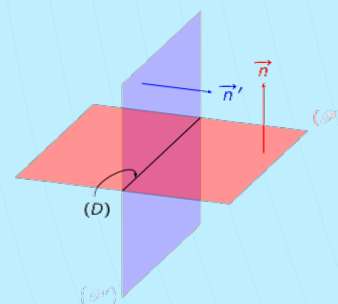
7. Applications : intersection de deux plans dans l'espace

Propriété 22

Soient (\mathcal{P}) et (\mathcal{P}') deux plans sécants suivant une droite (D) dans l'espace. Alors si

- ① Le vecteur \vec{n} est normal au plan (\mathcal{P})
- ② Le vecteur \vec{n}' est normal au plan (\mathcal{P}')

Alors le vecteur $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$ est un vecteur directeur de la droite (D)



Application 11. Étudier l'intersection des plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{P}') dans les cas suivants

$$\textcircled{1} (P) : x - y + 2z + 4 = 0 \text{ et } (P') : x + y + z - 1 = 0 \quad | \quad \textcircled{2} (P) : x - y = 0 \text{ et } (P') : x - z - 2 = 0$$

Exercice 3

Dans l'espace \mathcal{V}_3 muni d'un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : $A(0, 1, 1)$ et $B(-2, 1, -1)$ et $C(0, 2, 1)$ et $M(x, y, z)$

- ①
 - a Calculer $\vec{AM} \cdot \vec{BM}$
 - b Déduire que l'ensemble des point M tel que $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 3$ est une sphère (S) de centre Ω et le rayon R
- ②
 - a Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ en déduire que les point A, B et C ne sont pas alignés
 - b Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC)
- ③ Calculer $D(\Omega, (ABC))$ la distance entre le point Ω et le plan (ABC)
- ④ Déduire l'équation cartésienne du plan (ABC) et la sphère (S)

Exercice 4

Dans l'espace \mathcal{V}_3 muni d'un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considèrent les trois points : $A(2, -1, 1)$ et $B(2, 3, -1)$ et $C(1, 1, -1)$ et le plan $(P) : x + y - 3 = 0$

- ①
 - a Montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$
 - b Déduire la distance entre A et la droite (BC)
- ② Déterminer les coordonnées du point H le projeté de A sur la droite (BC)
- ③ Donner la représentation paramétrique de la sphère (S) définie par son diamètre $[AH]$