الحساب التكاملي

I- تكامل دالة متصلة على مجال مغلق :

1) نشاط :

لتكن f دالة متصلة على مجال I ولتكن F و G دالتين أصليتين للدالة f على المجال I .
بين أنه لكل عددين a و b من المجال I لدينا : $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$

ملاحظة :

العدد $F(b)-F(a)$ غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية F للدالة f على I .

2) تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال I ولتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I و a و b عددين من I .
العدد $F(b)-F(a)$ يسمى تكامل الدالة f من a إلى b ويرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ أو بالرمز : $[F(x)]_a^b$

ونكتب : $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

3) أمثلة :

أحسب التكاملات التالية : $\int_1^2 x^2dx$ و $\int_1^e \frac{1}{t}dt$ و $\int_0^{\pi}\cos\alpha d\alpha$ و $\int_0^1 e^x dx$

ملاحظة :

الدالة العددية F المعرفة على المجال $[a;b]$ بـ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم في a .

4) خاصيات :

خاصية أساسية :

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و a و b و c أعداد من I و k عددا حقيقيا ، لدينا :

$\int_a^a f(x)dx=0$ و $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (علاقة شال)

$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ و $\int_a^b k.f(x)dx=k.\int_a^b f(x)dx$ (خطية التكامل)

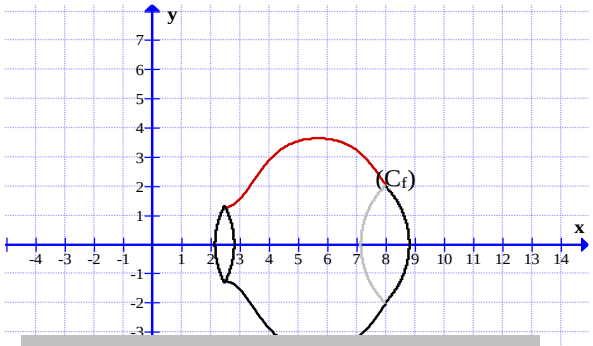
تمرين تطبيقي :

أحسب التكاملات : $I=\int_{-2}^4 |x|dx$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}d\alpha$ و $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2(x)dx$.

5) التأويل الهندسي للعدد $\int_a^b f(x)dx$:

خاصية مقبولة :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، إذا كانت f دالة **متصلة وموجبة** على مجال $[a;b]$ ($a<b$) فإن العدد $A=\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز Δf المحصور بين منحنى الدالة f ومحور الأفاصيل والمستقيمين الذين معادلتيهما هما $x=a$ و $x=b$ بوحدة قياس المساحة $(u.a)$



وحدة قياس المساحة تساوي : $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

تمرين تطبيقي :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=3cm$ ،

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $x\mapsto\frac{1}{x}$ ، أحسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f ومحور الأفاصيل والمستقيمين الذين معادلتيهما هما : $x=1$ و $x=e$.

II- تقنيات حساب التكامل :

1) الاستعمال المباشر للدالة الأصلية :

أمثلة :

أحسب التكاملات : $I=\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1+\sin t}}dt$ و $K=\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$

2) استعمال المكاملة بالأجزاء :

نشاط :

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a;b]$ بحيث u' و v' متصلتين على $[a;b]$.

1) نضع $f(x)=u(x)v(x)$ لكل x من $[a;b]$ ، أحسب $f'(x)$.

2) استنتج أن : $\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx$

خاصية :

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a;b]$ بحيث u' و v' متصلتين على $[a;b]$ ،

لدينا : $\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx$

أمثلة :

باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات : $I=\int_0^{\pi} x\cos x dx$ و $J=\int_0^1 xe^x dx$ و $K=\int_1^e \ln t dt$

III- التكامل والترتيب:

1) خاصيات :

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$ ، لدينا :

إذا كان $f\geq 0$ على $[a;b]$ فإن : $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

إذا كان $f\leq g$ على $[a;b]$ فإن : $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

تمرين تطبيقي :

1) بين أن : $\forall x\geq 1$: $\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$

2) استنتج تأطيرا للعدد $\ln 2$.

2) القيمة المتوسطة لدالة متصلة على مجال $[a;b]$:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ حيث $a<b$ ،

M و m على التوالي القيمة القصوى والقيمة الدنيا للدالة f على $[a;b]$.

1) بين أن : $m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq M$

2) استنتج أنه يوجد على الأقل عددا c من $[a;b]$ يحقق $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

تعريف وخاصية :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ حيث $a<b$ ،

- العدد $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$.

- يوجد على الأقل عددا c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=\mu$.

مثال :

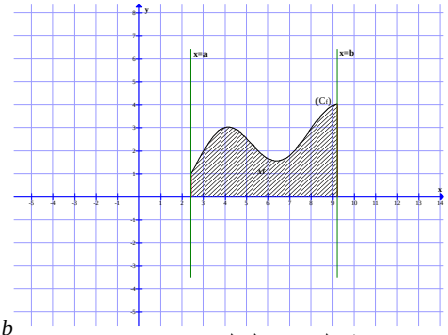
حدد القيمة المتوسطة للدالة f على $[-1;1]$ حيث : $f(x)=4-3x^2$.

IV- تطبيقات الحساب التكاملي :

1) حساب المساحات الهندسية :

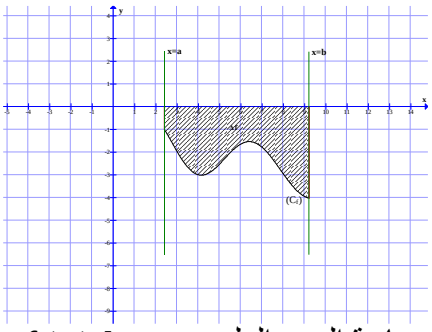
أ) حالة حيز محصور بين منحنى دالة متصلة f ومحور الأفاصيل :

f دالة موجبة على مجال $[a;b]$:



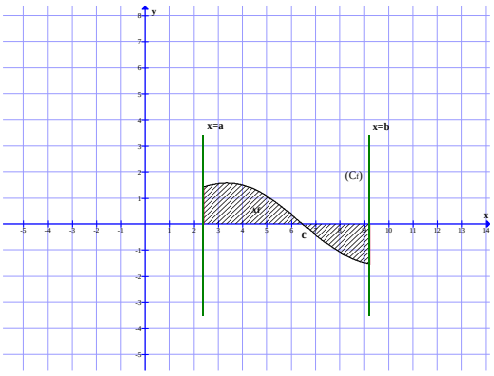
مساحة الحيز الملون هي $A=\int_a^b \mathrm{f}(x)dx$ بوحدة قياس المساحة .

f دالة سالبة على مجال $[a;b]$:



مساحة الحيز الملون هي $A=\int_a^b -\mathrm{f}(x)dx$ بوحدة قياس المساحة .

f دالة موجبة على $[a;c]$ وسالبة على $[c;b]$ حيث $a<c<b$:



مساحة الحيز الملون بوحدة قياس المساحة هي :

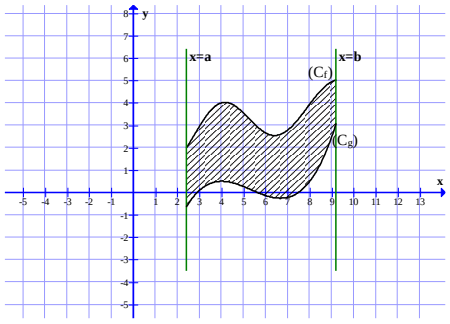
$$A=\int_a^c \mathrm{f}(x)dx+\int_c^b -\mathrm{f}(x)dx$$

بصفة عامة :

مساحة الحيز المحصور بين منحنى دالة f متصلة على مجال $[a;b]$ ومحور الأفاصيل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ هي : $A=\int_a^b |\mathrm{f}(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة .

ب) حالة حيز محصور بين منحنيي دالتين متصلتين f و g :

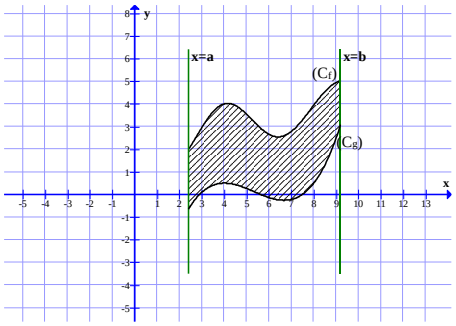
(C_f) فوق (C_g) على مجال $[a;b]$:



مساحة الحيز الملون بوحدة قياس المساحة هي

$$A=\int_a^b \left(\mathrm{f}(x)-g(x)\right)dx.$$

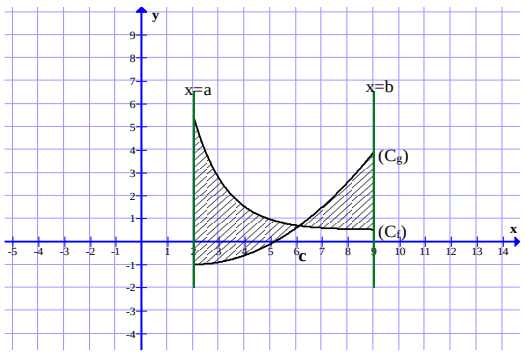
(C_f) تحت (C_g) على مجال $[a;b]$:



مساحة الحيز الملون بوحدة قياس المساحة هي

$$A=\int_a^b \left(g(x)-\mathrm{f}(x)\right)dx.$$

(C_f) فوق (C_g) على $[a;c]$ و (C_f) تحت (C_g) على $[c;b]$ حيث $a<c<b$:



مساحة الحيز الملون بوحدة قياس المساحة هي

$$A=\int_a^c \left(\mathrm{f}(x)-g(x)\right)dx+\int_c^b \left(g(x)-\mathrm{f}(x)\right)dx$$

بصفة عامة :

مساحة الحيز المحصور بين منحنيي دالتين f و g متصلتين على مجال $[a;b]$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ هي :

$A=\int_a^b |\mathrm{f}(x)-g(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة .

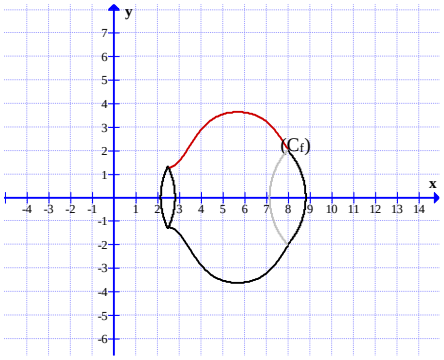
مثال :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=8cm$ و $\left\|\vec{j}\right\|=6cm$ ، لتكن f و g الدالتين المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ والمستقيمين : $(D):x=\frac{1}{2}$ و $(\Delta):x=2$.

بين أن المساحة الهندسية للحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) والمستقيمين : (D) و (Δ) هي : $98cm^2$.

2) حساب حجم مجسم الدوران :

تعريف :



الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

لتكن f دالة **متصلة وموجبة** على مجال $[a;b]$ ،

و (C_f) منحناها في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

إذا دار (C_f) حول المحور $\left(o;\vec{i}\right)$ دورة كاملة فإنه يولد شكلا يسمى مجسم دوران (C_f) حول المحور $\left(o;\vec{i}\right)$.

خاصية :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ و f دالة **متصلة وموجبة** على مجال $[a;b]$

و (C_f) منحناها في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران (C_f) حول محور الأفاصيل هو : $V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx$

مثال :

الفضاء منسوب إلى معلم م م $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي : $f(x)=e^x$.

أحسب حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران (C_f) حول محور الأفاصيل .