SUJET DU DEVOIR MAISON N V

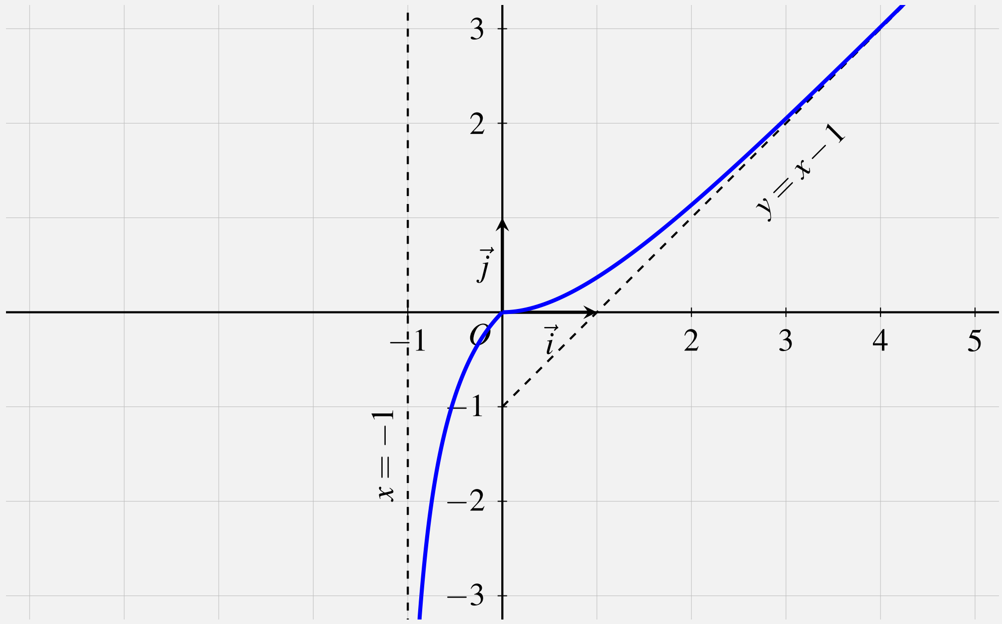
MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (Intégral, équations différentielles)

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty]$ par : $f(x) = \begin{cases} 2\ln(x+1) - x & : x \in]-1,0] \\ x - 1 + \exp(-x) & : x \in]0,+\infty[\end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ tel que $\left\|\vec{i}\right\| = 1.5$ cm

1. (a) Calculer $f(0)$, puis en déduire que f est continue en 0.
   (b) Étudier la dérivabilité de f à gauche au point 0, puis interpréter ce résultat.
2. En se basant sur la représentation graphique de la fonction f sur $]-1,+\infty]$:



   (a) Déterminer les limites : $\lim_{-1^+} f(x)$; $\lim_{+\infty} f(x)$ et $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-1,+\infty]$
   (c) Dresser le tableau de signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1,+\infty]$

3. (a) Soit $-1 < \alpha \leq 0$. En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$.
   (b) En déduire l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$ en cm^2
4. Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation complète de la courbe (C_f) autour de l'axe des abscisses, délimité par $x = 0$ et $x = 1$.
5. On considère l'équation différentielle (E) : $-\frac{1}{2}y'' + y' - \frac{5}{2}y = 0$.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_c) : $z^2 = 2z - 5$ d'inconnu z.
   (b) Trouver l'unique solution g de (E) dont la courbe admet une tangente horizontale au point de coordonnées $(0,1)$.
6. On pose $I = \int_0^{\pi} g(x)\, dx$ avec g est la solution particulière de (E).
   (a) Montrer que $g(x) = \frac{2}{5}g'(x) + \frac{1}{5}g''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   (b) Sans utiliser d'intégration par parties, déduire la valeur de I.

7. Calculer les intégrales suivants

(a) $A=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$

(b) $B=\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$

(c) $C=\int_e^{e^2} \frac{1}{3x\ln^2(x)}\,dx$

(d) $D=\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}\,dx$

Exercice 2 : (Produit scalaire et ses applications dans l'espace)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points non alignés $A(-1,3,4)$, $B(-2,0,1)$ et $C(-2,-3,4)$.

1. Soit (P) le plan qui passe par les points A, B et C.
   (a) Justifier que le vecteur $\vec{n}(-6,1,1)$ est normal à (P).
   (b) Vérifier que $-6x+y+z=13$ est une équation cartésienne du plan (P).
2. Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$$(S)\ :\ 2x^2+2y^2+2z^2-7x+17y-\frac{8}{3}z=\frac{55}{7}$$

   (a) Justifier que (S) est une sphère de centre Ω et de rayon R. Calculer R.
   (b) Montrer que (P) et (S) se coupent selon un cercle (π) de rayon r à déterminer.
3. Soit (D) la droite qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (P).
   (a) Trouver le triplet de coordonnées du point w centre du cercle (π).
   (b) Écrire une équation du plan (Q) qui coupe (S) et qui est parallèle à (P).
4. Soit (E) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}=0$
   (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}$. En déduire la nature de l'ensemble (E).
   (b) Justifier que (S) et (E) se coupent selon un cercle (π').
5. (a) Soit $N(a,b,c)$ un point du cercle (π') de rayon r' et ce centre w'. Montrer que $-9a+17b+\frac{40}{3}c+\frac{125}{7}=0$. Que représente.
   (b) On peut déduire le rayon r' et le centre w' du cercle (π') ?