I - Calcul Intégral (4 exercices)

Exercice 1 : Intégration par parties

On considère l'intégrale $I = \int_1^e x^2 \ln(x)dx$.

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I = \frac{2e^3+1}{9}$$

2. Soit $J = \int_1^e x(\ln x)^2 dx$. Calculer J à l'aide d'une IPP.

Exercice 2 : Changement de forme

Soit $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

1. Vérifier que $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
2. En déduire la valeur exacte de l'intégrale : $K = \int_0^1 f(x)dx$
3. Donner une valeur approchée de K à 10^{-2} près.

Exercice 3 : Calcul d'aire (Fonction Logarithme)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1. Calculer l'intégrale $L = \int_1^e f(x)dx$.
2. Interpréter graphiquement ce résultat en calculant l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = e$ (Unité : $2cm \times 2cm = 4cm^2$).

Exercice 4 : Volume de révolution (Exponentielle)

Soit la fonction $h(x) = e^{-x}\sqrt{x}$ définie sur $[0, 1]$.

1. Calculer l'intégrale $M = \int_0^1 xe^{-2x}dx$ à l'aide d'une IPP.
2. En déduire le volume V du solide engendré par la rotation de la courbe (C_h) autour de l'axe des abscisses entre $x = 0$ et $x = 1$.
3. Exprimer V en fonction de π.

II - Géométrie dans l'espace (4 exercices)

Exercice 5 : Équation de plan et produit vectoriel

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on considère $A(1, 2, 1)$, $B(2, 1, 3)$ et $C(-1, 4, 2)$.

1. Déterminer les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
2. Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
3. Montrer que l'équation du plan (ABC) est : $x + y + z - 4 = 0$.

Exercice 6 : Sphère et position relative

Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 11 = 0$.

1. Montrer que (S) a pour centre $\Omega(1, -2, 3)$ et pour rayon $R = \sqrt{3}$.

2. Calculer la distance du point Ω au plan $(P) : x - y + z + 2 = 0$.
3. En déduire que le plan (P) est extérieur à la sphère (S).

Exercice 7 : Intersection cercle (Vérifié)

Soit la sphère (S) de centre $\Omega(1, 0, 1)$ et de rayon $R = 3$. Soit (Q) le plan d'équation $x + y - z + 3 = 0$.

1. Montrer que la distance $d(\Omega, (Q)) = \sqrt{3}$.
2. Justifier que $(Q) \cap (S)$ est un cercle (C).
3. Calculer le rayon r du cercle (C).
4. Déterminer les coordonnées de H, centre du cercle (C) (Intersection de (Q) avec la droite perpendiculaire à (Q) passant par Ω).

Exercice 8 : Droites et distances

On considère les points $A(2, 1, 1)$ et $B(1, 3, 0)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Soit $C(1, 1, 1)$. Calculer l'aire du triangle ABC en utilisant le produit vectoriel.
3. En déduire la distance du point C à la droite (AB).

I - Calcul Intégral (4 exercices)

Exercice 9

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$.

1. Vérifier que pour tout x : $\dfrac{x^3}{x^2+1} = x - \dfrac{x}{x^2+1}$
2. En déduire la valeur exacte de I.
3. Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 x \ln(x^2+1)dx$ en utilisant une intégration par parties.

Exercice 10

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln x)}$.

1. Déterminer une primitive de f sur $[1, e]$.
2. Calculer $K = \displaystyle\int_1^e f(x)dx$.
3. En utilisant une IPP, calculer : $L = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(1 + \ln x)}{x}dx$

Exercice 11 (Calcul d'aire)

Soit $f(x) = (x - 2)e^x + 2$. Soit (C_f) sa courbe.

1. Montrer que $H : x \mapsto (x-3)e^x$ est une primitive de $h : x \mapsto (x-2)e^x$.
2. Calculer l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$.
3. On donne $\|\vec{i}\| = 1cm$. Exprimer le résultat en cm^2.

Exercice 12 (Volume)

On considère la fonction $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ sur $[0, \dfrac{\pi}{4}]$.

1. Calculer le volume V du solide engendré par la rotation de (C_g) autour de l'axe des abscisses entre $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$.
2. Vérifier que ce volume est égal à π unités de volume.

II - Géométrie dans l'espace (4 exercices)

Exercice 13

Soient les points $A(1,-1,1)$, $B(0,1,3)$ et $C(2,0,0)$.

1. Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.
3. Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 14

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,1)$ et de rayon $R=3$.

1. Écrire l'équation cartésienne de (S).
2. Vérifier que le point $A(1,-2,1)$ appartient à (S).
3. Déterminer l'équation du plan (P) tangent à (S) au point A.

Exercice 15 (Intersection vérifiée)

Soit $(S) : x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+2=0$.

1. Montrer que (S) a pour centre $\Omega(2,-1,1)$ et pour rayon $R=2$.
2. Soit (Q) le plan d'équation $x+y+z-1=0$.
   (a) Calculer $d(\Omega,(Q))$.
   (b) Montrer que $(Q)\cap(S)$ est un cercle de rayon $r=\sqrt{\dfrac{11}{3}}$.

Exercice 16

Soient $A(1,2,0)$ et $(P) : 2x-y+2z+4=0$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (P).
2. Déterminer les coordonnées de H, projection orthogonale de A sur (P).
3. Calculer la distance AH par deux méthodes différentes.