Exercice 1 : (3 points)

1) Résoudre l'équation différentielle (E) telle que : $(E) : y'' - y' - 2y = 0$.
2) Montrer f la solution de l'équation (E) vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$ est : $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$.
3) Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} f(x)\, dx$.

Exercice 2 : (8 points)

1. Calculer les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x \ln x}\, dx \qquad J = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$K = \int_1^e x^2 \ln x\, dx = \frac{2e^3 + 1}{9} \qquad ; \qquad M = \int_0^1 (x-1)e^x\, dx = -e$$
3. Soient la fonction f définie par : $f(x) = x^2 e^{-x} - xe^{-x} + x$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\|\vec{i}\| = 2\, cm$
   a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2 e^{-x}$.
   b) En déduire que : $N = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx = \frac{2e - 5}{e}$
   c) En utilisant une intégration par parties montrer que : $L = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\, dx = \frac{e-2}{e}$
   d) Vérifier que $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - x)\, dx = \frac{e-3}{e}$.
   e) Déduire en cm^2, l'aire du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (D) d'équation $y = x$ et les deux droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$

Exercice 3 : (9 points)

Soient (S) une sphère et (P) un plan définient par les équations cartésiennes suivantes :
$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0, \quad (P) : 2x + y + 2z - 3 = 0.$ respectivement

1) a) Montrer que (S) est une sphère du centre $\Omega(-1; 1; -1)$ et le rayon $R = 2$.
   b) Calculer $d(\Omega, (P))$ la distance du point Ω au plan (P).
   c) Déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S).
2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω centre de la sphère (S) et perpendiculaire au plan (P).
   b) En déduire les coordonnées du point H point d'intersection de la sphère (S) et le plan (P).
3) a) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) passant par le point $A(1; 2; -1)$, et dont $\vec{n}'(-1; 0; 1)$ est un vecteur normal à (Q).
   b) Vérifier que les plans (P) et (Q) sont orthogonaux.
4) Montrer que l'équation cartésienne de la sphère (S') définie par son diamètre $[AB]$ où $A(0; 1; 5)$ et $B(2; 3; 1)$ est : $(S') : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0$

﴿حُنَفَآءَ لِلَّهِ غَيۡرَ مُشۡرِكِينَ بِهِۦۚ وَمَن يُشۡرِكۡ بِٱللَّهِ فَكَأَنَّمَا خَرَّ مِنَ ٱلسَّمَآءِ فَتَخۡطَفُهُ ٱلطَّيۡرُ أَوۡ تَهۡوِي بِهِ ٱلرِّيحُ فِي مَكَانٖ سَحِيقٖ﴾ (الحج 31)