اتــصـــال دالـــة عــدديـــة

I– الاتصال في نقطة – الاتصال على مجال :

1- انشطة:

ا- نشاط تذكيري

② نضع $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$

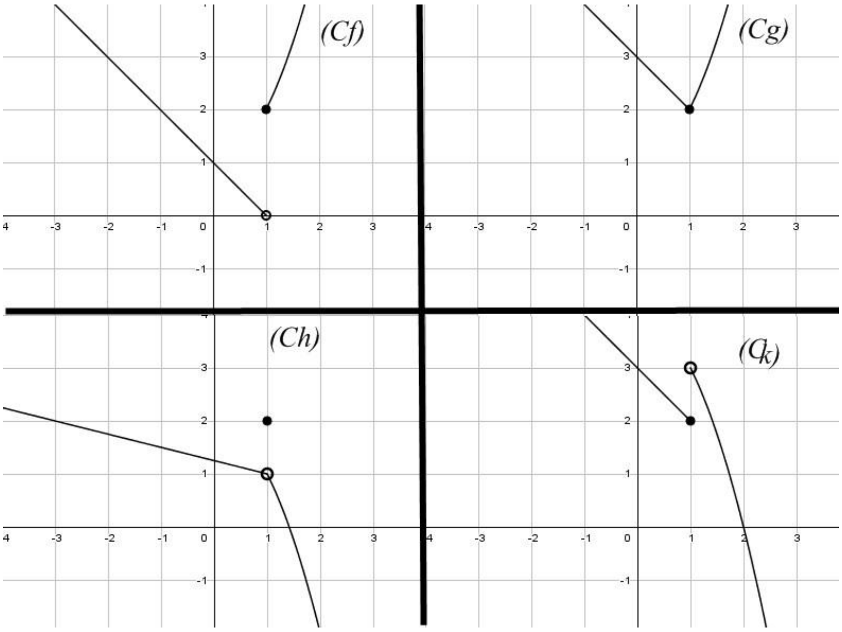
1) بين أن $\left|x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2} \Rightarrow \left|f(x)-\frac{3}{4}\right|\le\frac{1}{2}\left|x-\frac{1}{2}\right|$

2) استنتج أن $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\dfrac{3}{4}$

ب - نشاط 2

ج - نشاط 3

نعتبر الدوال العددية f و g و h و k الممثلة أسفله :



1)حدد مبيانيا النهايتين : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ و $f(1)$ ، ماذا تلاحظ ؟

(في هذه الحالة نقول إن الدالة f متصلة على اليمين في 1 وغير متصلة على اليسار في 1)

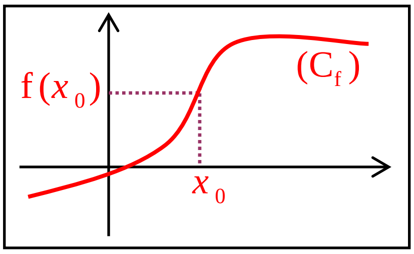
2) أدرس اتصال الدالة g على اليمين ثم على اليسار في 1.

3) نفس السؤال بالنسبة للدالتين hوk في النقطة 1 .

4) نقول إن الدالة f متصلة على المجال I إذا كانت متصلة في كل نقطة من نقط المجال I.

حدد من بين الدوال f وg وh وk الدالة المتصلة على المجال $[0\ 2]$

2- الاتصال في نقطة :



أ)تعاريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.
نقول إن الدالة f متصلة في x_0 إذا كان : $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[x_0;a[$ حيث $x_0 < a$.
نقول إن الدالة f متصلة على اليمين في x_0 إذا كان :
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]a;x_0]$ حيث $a < x_0$.
نقول إن الدالة f متصلة على اليسار في x_0 إذا كان :
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

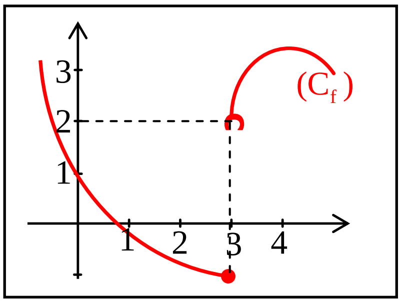
ب) خاصية :

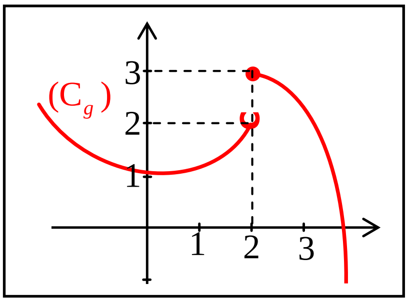
لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.
(الدالة f متصلة في x_0) $\Leftrightarrow$ (الدالة f متصلة على اليمين و على اليسار في x_0)

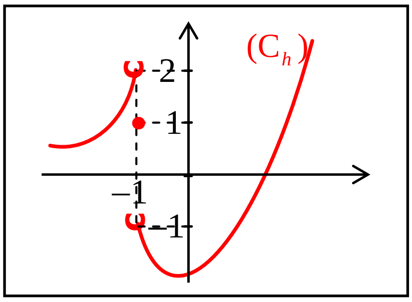
ج)امثلة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1} \quad ; \quad x \neq -1 \\ f(-1) = -2 \end{cases}$ ، أدرس اتصال الدالة f في -1 .

: نعتبر الدوال العددية f و g و h الممثلة أسفله :







1

3) الاتصال على مجال :

أ) تعريف :

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a<b$ و I مجالا مفتوحا .
- نقول إن الدالة f متصلة على المجال I إذا كانت متصلة في كل نقطة من نقط المجال I.
- نقول إن الدالة f متصلة على المجال $[a;b]$ إذا كانت متصلة على المجال المفتوح $]a;b[$ و متصلة على اليمين في a و على اليسار في b.
- نقول إن الدالة f متصلة على المجال $[a;+\infty[$ إذا كانت متصلة على المجال $]a;+\infty[$ ومتصلة على اليمين في a.

ب) ملاحظة :

بنفس الطريقة نعرف اتصال الدالة f على المجالات : $[a;b[$ ، $]a;b]$ و $]-\infty;a]$.

ج) اتصال الدوال الاعتيادية :

خاصية :

- الدالة الحدودية والدالة sin والدالة cos هي دوال متصلة على $\mathbb{R}$.
- الدالة الجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها .
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $[0;+\infty[$.
- الدالة tan متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها : $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$$\begin{cases} \mathrm{f}(x) = x^2 - x + \dfrac{2}{3} \ ; & x < 0 \\ \mathrm{f}(x) = \dfrac{2}{3+x} \ ; & x \geq 0 \end{cases}$$

1) أدرس اتصال الدالة f على المجال $]-\infty;0[$ ثم على المجال $[0;+\infty[$.

2) أدرس اتصال الدالة f على اليسار في 0 ، ماذا تستنتج ؟

4) العمليات على الدوال المتصلة :

خاصية 1:

ليكن I مجالا ضمن $\mathbb{R}$ و k عددا حقيقيا و f و g دالتين متصلتين على المجال I ، لدينا :
$\mathrm{f} + g$ و $\mathrm{f} \times g$ و $k.\mathrm{f}$ دوال متصلة على المجال I .
إذا كانت g لا تنعدم على المجال I ، فإن $\dfrac{1}{g}$ و $\dfrac{f}{g}$ دالتين متصلتين على المجال I.

أمثلة :

بين أن الدالة $\mathrm{f} : x \mapsto x^3 - 2x + 3\sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$ وأن الدالة $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{x}$ متصلة على $]0;+\infty[$

خاصية 2 : (اتصال مركب دالتين)

لتكن f و g دالتين عدديتين .
إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J و $\mathrm{f}(I) \subset J$ فإن $g o\mathrm{f}$ متصلة على المجال I .

مثال :

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{\mathrm{f}} & \mathrm{f}(I) \subset J & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{f}(x) = y & \mapsto & g(y) = g(\mathrm{f}(x)) \end{array}$$
$$g o\mathrm{f}$$

بين أن الدالة $\mathrm{f} : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ متصلة على $\mathbb{R}$.

تعريف : (التمديد بالاتصال)

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها $D_{\mathrm{f}} \neq \mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي لا ينتمي إلى D_{f} و $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{f}(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $\begin{cases} g(x) = \mathrm{f}(x) ; \ x \in D_{\mathrm{f}} \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$
هي دالة متصلة في النقطة x_0 وتسمى **التمديد بالاتصال** للدالة f في x_0 .

تطبيق :

نعتبر الدالة العددية : $\mathrm{f}(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ ،
حدد D_{f} ثم بين أن الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في 2 .

5) دالة الجزء الصحيح :

أ) تعريف :

العدد x	$2,5$	$-4,8$	6	$-\sqrt{2}$	π	$2,5^2$
$E(x)$						

دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ **بالعدد الصحيح النسبي** الوحيد n الذي يحقق $n \leq x < n+1$ والذي نرمز له بالرمز $E(x)$ أو $[x]$.

ب) أمثلة :

1) أملأ الجدول التالي :

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات $E(x) = 0$ ، $E(x) = 1$ ، $E(x) = 2$ و $E(x) = -1$.

3) مثل مبيانيا الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\mathrm{f}(x) = E(x)$.

ج) نتائج :

- دالة الجزء الصحيح متصلة على المجال $[n;n+1[$ لكل $n\in\mathbb{Z}$.
- دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في n وغير متصلة على اليسار في n، لكل $n\in\mathbb{Z}$.

II– صورة مجال بدالة متصلة – مبرهنة القيم الوسيطية :

1) صورة مجال بدالة متصلة :

أ) تعريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f و I مجال ضمن D_f و J مجموعة ضمن $\mathbb{R}$.
- نقول إن المجموعة J هي صورة المجال I بالدالة f ونكتب $J=f(I)$ إذا كان : $J=\{f(x)/x\in I\}$
- نقول إن المجال I قطعة إذا كان مغلقا ومحداه عددين حقيقيين .

أمثلة :

حدد القطع من بين المجالات التالية : $[1;3[$ ، $[0;1]$ ، $]-\infty;2]$ ، $]-1;5[$ و $[-1;2]$

ب) خاصية :

صورة مجال بدالة متصلة هو مجال ، صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة .

ج) حالة دالة متصلة ورتيبة قطعا :

لتكن f دالة عددية و D_f حيز تعريفها و I مجال ضمن D_f ، و a و b عددين حقيقيين حيث $a<b$.

طبيعة المجال $f(I)$ حيث f متصلة ورتيبة قطعا على I :

	المجال I	المجال $f(I)$
f تزايدية قطعا على I	$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$
	$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$
	$[a;+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right[$
f تناقصية قطعا على I	$[a;b]$	$[f(b);f(a)]$
	$[a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);f(a)\right]$
	$[a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty}f(x);f(a)\right]$

ملاحظة :

بنفس الطريقة نحسب $f(I)$ إذا كان المجال I على شكل : $]a;b[$ أو $]a;b]$ أو $]a;+\infty[$ أو $]-\infty;a]$ أو $]-\infty;a[$.

أمثلة :

حدد $f(I)$ في الحالات التالية : $I=[0;1[$ و $f(x)=3x-1$ ؛ $I=]-\infty;3[$ و $f(x)=-2x$

2) مبرهنة القيم الوسيطية :

مبرهنة :

لتكن f دالة **متصلة** على مجال $[a;b]$ ،
لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصرا c من المجال $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$ ،
وإذا كانت f **رتيبة قطعا** على المجال $[a;b]$ فإن العدد c **وحيد** .

خاصية :

إذا كانت f دالة **متصلة** على مجال $[a;b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a;b[$ ، وإذا كانت f **رتيبة قطعا** على المجال $[a;b]$ فإن هذا الحل **وحيد** .

تأويل هندسي :

المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a;b[$ **يعني هندسيا** أن منحنى الدالة f يقطع **محور الأفاصيل** في نقطة واحدة على الأقل، أفصولها من المجال $]a;b[$.

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{9x^5-x-2}{x^2+1}$

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]0;1[$.

3) طريقة التفرع الثنائي :

نشاط :

1) برهن أن المعادلة $x^3+x-1=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0;1[$.

2) أ) بين أن $\alpha\in]0,5;1[$ ثم أحسب سعة المجال $]0,5;1[$.

ب) بين أن $\alpha\in]0,5;0,75[$ ثم أحسب سعة المجال $]0,5;0,75[$.

ملاحظة (تعريف) :

هذه الطريقة لتحديد تأطير للعدد α تسمى طريقة التفرع الثنائي .

III– الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال :

1) تعريف :

لتكن f دالة **متصلة ورتيبة قطعا** على مجال I ، وليكن J مجالا بحيث $J=f(I)$:
الدالة التي تربط كل عنصر y من J بالعنصر الوحيد x من I الذي يحقق $y=f(x)$ تسمى **الدالة العكسية** للدالة f ، ونرمز لها بالرمز : f^{-1} ، أي : $(\forall x\in I)(\forall y\in J):\ f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$

2) ملاحظة :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية و J مجال بحيث $J=f(I)$ ، فإن :

$(\forall x\in I)\ f^{-1}of(x)=f^{-1}(f(x))=x$ و $(\forall y\in J)\ fof^{-1}(y)=f(f^{-1}(y))=y$

3) خاصية :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و $J=f(I)$ ،
الدالة العكسية f^{-1} متصلة ورتيبة قطعا على المجال J ولها نفس رتابة الدالة f .
منحنى الدالة f^{-1} في م م م متماثل مع منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=x$.

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x)=x^2$

1) بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J ينبغي تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

2) أنشئ منحنيي الدالتين f و f^{-1} والمستقيم $(\Delta):y=x$ في نفس المعلم المتعامد الممنظم.

4) دالة الجذر من الرتبة n (الجذر النوني) :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ : $f(x)=x^n$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ ، إذن الدالة f تقبل دالة عكسية متصلة وتزايدية قطعا على $f(\mathbb{R}^+)$:

$$f\left(\mathbb{R}^+\right)=f\left([0;+\infty[\right)=[f(0);\lim_{x\to+\infty}f(x)[=[0;+\infty[=\mathbb{R}^+$$

تعريف :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، الدالة العكسية للدالة : $x\mapsto x^n$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n ، نرمز لها بالرمز $\sqrt[n]{\ }$ ، ونكتب: $\sqrt[n]{\ }:x\mapsto\sqrt[n]{x}$ ، العدد $\sqrt[n]{x}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد x .

أمثلة :

1) أحسب $\sqrt[5]{32}$ ، $\sqrt[4]{81}$ و $\sqrt[1]{7}$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^6-64=0$

حالات خاصة :

ليكن $x\in\mathbb{R}^+$ ، لدينا : $\sqrt[1]{x}=x$ ، نرمز عادة للعدد $\sqrt[2]{x}$ بالرمز $\sqrt{x}$

خاصية :

الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$.

5) العمليات على الجذور من الرتبة n :

خاصية :

ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$ و n و m من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا :

$\sqrt[n]{x.y}=\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}$ ، $\sqrt[n]{x^n}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$ ، $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[nm]{x}$

وإذا كان $y\neq 0$: $\sqrt[n]{\dfrac{1}{y}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{y}}$ ، $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

6) القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا :

تعريف :

ليكن $x\in\mathbb{R}_+^*$ و $r\in\mathbb{Q}^*$ بحيث $r=\dfrac{p}{q}$ (حيث $p\in\mathbb{Z}^*$ و $q\in\mathbb{N}^*$).

نسمي القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r العدد الحقيقي الذي نرمز له بـ x^r والمعرف بـ : $x^r=x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$

ملاحظة :

لكل $x\in\mathbb{R}_+^*$ و $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا : $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$

أمثلة :

أحسب : $32^{-\frac{2}{5}}$ و $81^{0,75}$.

خاصيات :

ليكن x و y من $\mathbb{R}_+^*$ و r و r' من $\mathbb{Q}^*$ ، لدينا :

$x^r.x^{r'}=x^{r+r'}$ ، $\dfrac{x^r}{x^{r'}}=x^{r-r'}$ ، $\left(x^r\right)^{r'}=x^{r.r'}$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)^r=\dfrac{1}{x^r}=x^{-r}$ ، $\dfrac{x^r}{y^r}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^r$ ، $x^r.y^r=(x.y)^r$

تمرين تطبيقي :

1) أكتب على شكل قوة أساسها 2 العدد : $A=\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{2^5}\times\sqrt{2}$ ،

2) حل المعادلة : $(3x+1)^{\frac{3}{4}}=8$.