Exercice 1:

1 – Dans chacun des cas ci-dessous, étudier la continuité des fonctions suivantes au point a :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} & \text{si } x>-2\\ \dfrac{x^2+5x+6}{x^3+8}, & \text{si } x<-2, \quad a=-2\\ \dfrac{1}{4}, & \text{si } x=-2\end{cases} \quad \text{et} \quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4}, & \text{si } x<2\\ \dfrac{x-\sqrt[3]{x(x-2)}-2}{x-2}, & \text{si } x>2, \quad a=2\\ \dfrac{3}{4}, & \text{si } x=2\end{cases}$$

2 – Déterminer la valeur du réel m pour que la fonction f ci aprè soit continue en $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}, & \text{si } x\neq 1\\ 2m, & \text{si } x=1\end{cases}$$

3 – Étudier la continuité de la fonction g ci après sur $\mathbb{R}$. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1}, & \text{si } x>1\\ 2x^2+\sqrt{5-x}, & \text{si } x\leq 1\end{cases}$

Exercice 2:

Soit f la fonction définie par $f(x)=4x^3+3x-1$.

1 – Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2 – Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et que $0<\alpha<1$.

3 – Donnez un encadrement du nombre α d'amplitude 0.25.

4 – Donner le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ telle que $f(a)<ab$ et $f(b)>b^2$.
Montrer que $\exists c\in[a,b]$ tel que $f(c)=bc$.

Exercice 4:

1. Montrer dans chacun des cas ci-dessous que f, définie sur I, admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer :

- $f(x)=-x^2+x+1, \quad I=]-\infty,\frac{1}{2}]$
- $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}, \quad I=[2,+\infty[$
- $f(x)=x^3+3x^2+x, \quad I=\mathbb{R}$
- $f(x)=\sqrt{2x-2}-x+1, \quad I=[\frac{3}{2},+\infty[$

Exercice 5:

Soit f la fonction définie par $f(x)=2x^3-1$.

1 – Montrer que l'équation $f(x)=-x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

2 – Justifier que $0<\alpha<1$. Puis donnez un encadrement du nombre α d'amplitude 10^{-2}.

3 – Montrer que $\alpha=\sqrt{\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{2\alpha}}$.

4 – Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'inéquation $x<\dfrac{1}{1+2x^2}$.

5 – Montrer que g, la restriction de f sur $I=]-\infty,\alpha]$, admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

6 – Calculer $g^{-1}(]-3;\alpha[)$.

7 – Trouver $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Exercice 6:

1 – Simplifier les expressions suivantes : $A=\dfrac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times(9)^{\frac{5}{2}}}{(27)^{\frac{17}{3}}}$; $B=\dfrac{\sqrt[4]{32}\times\sqrt[6]{27}\times\sqrt{108}}{\sqrt[4]{3}}$

2 – Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$x^5=32$; $\sqrt[3]{x^2+2}=\sqrt[3]{2x+1}$; $(x^2+5)^5=32$; $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{x-4}\geq 1$

3 – Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$
- $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{8x^3+1}-2x$
- $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-5x$