

Exercice 1

1 – Dans chacun des cas ci-dessous, étudier la continuité des fonctions suivantes au point a :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} & \text{si } x > -2 \\ \frac{x^2+5x+6}{x^3+8}, & \text{si } x < -2, \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x = -2 \end{cases} \quad a = -2 \quad \text{et} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4}, & \text{si } x < 2 \\ \frac{x-\sqrt[3]{x(x-2)}-2}{x-2}, & \text{si } x > 2, \\ \frac{3}{4}, & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad a = 2$$

2 – Déterminer la valeur du réel m pour que la fonction f ci après soit continue en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}, & \text{si } x \neq 1 \\ 2m, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

3 – Étudier la continuité de la fonction g ci après sur $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1}, & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + \sqrt{5-x}, & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4x^3 + 3x - 1$.

- 1 – Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 2 – Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et que $0 < \alpha < 1$.
- 3 – Donnez un encadrement du nombre α d'amplitude 0.25.
- 4 – Donner le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) < ab$ et $f(b) > b^2$.

Montrer que $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = bc$.

Exercice 4

1. Montrer dans chacun des cas ci-dessous que f , définie sur I , admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer :

$$\bullet f(x) = -x^2 + x + 1, \quad I =]-\infty, \frac{1}{2}]$$

$$\bullet f(x) = \frac{4x}{x^2+4}, \quad I = [2, +\infty[$$

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x, \quad I = \mathbb{R}$$

$$\bullet f(x) = \sqrt{2x-2} - x + 1, \quad I = [\frac{3}{2}, +\infty[$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 1$.

1 – Montrer que l'équation $f(x) = -x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

2 – Justifier que $0 < \alpha < 1$. Puis donnez un encadrement du nombre α d'amplitude 10^{-2} .

3 – Montrer que $\alpha = \sqrt{\frac{-1}{2} + \frac{1}{2\alpha}}$.

4 – Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'inéquation $x < \frac{1}{1+2x^2}$.

5 – Montrer que g , la restriction de f sur $I =]-\infty, \alpha]$, admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

6 – Calculer $g^{-1}([-3; \alpha])$.

7 – Trouver $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 6

1 – Simplifier les expressions suivantes : $A = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times (9)^{\frac{5}{2}}}{(27)^{\frac{17}{3}}}$; $B = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt{108}}{\sqrt[4]{3}}$

2 – Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^5 = 32 \quad ; \quad \sqrt[3]{x^2+2} = \sqrt[3]{2x+1} \quad ; \quad (x^2+5)^5 = 32 \quad ; \quad \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{2} \quad ; \quad \sqrt[3]{x-4} \geq 1$$

3 – Calculer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{8x^3+1}-2x \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{x^3+x^2+1}-5x$$