Devoir libre n°1

Exercice 1:

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1 – Calculer les limites suivantes:

- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$ • $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{2x^2-x}+2x$ • $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x-1}$ • $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$.

2 – On considère le nombre $A = \dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt{\sqrt[4]{4}}}{\sqrt[3]{\sqrt{8}}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{32}}}$. Montrer que $A = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

3 – Comparer: $\sqrt[4]{4}$ et $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[4]{5}$ et $\sqrt[3]{4}$.

4 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) et l'inéquation (I):

$$(E_1) : \sqrt[5]{3x-4}=2, \quad (E_2) : \sqrt[5]{x^2}-5\sqrt[5]{x}+6=0, \quad (E_3) : \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-12=0, \quad (I) : \sqrt[3]{3x-1}<2.$$

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{2x^2-3x+1}, & x\neq \dfrac{1}{2}. \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = k \end{cases}$

Déterminer la valeur du réel k pour laquelle la fonction f est continue en $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+2x-2$.

1 – Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique a dans $\mathbb{R}$.

2 – Montrer que $a\in]0;1[$.

3 – Donner un encadrement de a d'amplitude 0.25.

4 – Donner le tableau de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4:

On considère f la fonction définie par: $f(x)=x-2\sqrt{x-1}$.

1 – Déterminer D_f puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 – Montrer que f est continue sur D_f.

3 – Montrer que f est dérivable à droite au point $x_0=1$, puis interpréter le résultat.

4 – Montrer que $\forall x\in[1;+\infty[\qquad f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1})}$.

5 – Dresser le tableau de variation de f sur D_f.

6 – Soit g la restriction de f sur $I=[2;+\infty[$.

- **a** – Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J à déterminer.
- **b** – Dresser le tableau de variation de g^{-1}.
- **c** – Vérifier que $g(x)=(\sqrt{x-1}-1)^2$, puis déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.