Exercice 1 (17 points)

Soit f une fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2, & x > 0 \\ f(0) = 2 \\ f(x) = x^3 + 2x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
2. Étudier la continuité de f en 0.
3. (a) Étudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0 à gauche et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4. (a) Étudier la dérivabilité de f sur $]0, +\infty[$ puis vérifier que : $(\forall x \in]0, +\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$
   (b) Étudier la dérivabilité de f sur $]-\infty, 0]$ puis vérifier que : $(\forall x \in]-\infty, 0])$; $f'(x) = 3x^2 + 2$
   (c) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0]$ et elle est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
   (d) Donner le tableau de variations de f.
5. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse -1.
6. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-1, 0[$.
   (b) Calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ en déduire un autre encadrement de la solution α.
7. (a) Étudier le signe de $f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[$; $2\sqrt{x} \leq x + 2$.
8. Soit g une fonction numérique définie sur $]-\infty, 0]$ par : $g(x) = f(x)$
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle I à déterminer.
   (b) Montrer que g^{-1} est dérivable en -1.
   (c) Déterminer $(g^{-1})'(-1)$.
   (d) Donner le tableau de variations de g^{-1}.
9. On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x^3 + 2x + 2}{x - \alpha}, & x \neq \alpha \\ h(\alpha) = 3\alpha^2 + 2 \end{cases}$

   Montrer que h est continue en α (où α est le réel donné dans la question 6).

Exercice 2 (3 points)

Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On donnera $f'(x)$ sous la forme réduite dans les cas suivants :

1. $f(x) = (\sin(x) + 3)^5$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x - 7 + \dfrac{2}{2x+1}$, $I = \left]\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[$
3. $f(x) = x\sqrt{2x+3}$, $I = \left[\dfrac{-3}{2}, +\infty\right[$